

## خواص ساختاری سیستم‌های نمونه برداری چند نرخ

محمد مهدی شرع پسند<sup>۱</sup>، محسن منتظری<sup>۲</sup>

<sup>۱</sup> عضو هیات علمی، گروه پژوهشی برق و الکترونیک، پژوهشکده برق، مکانیک و ساختمان، پژوهشگاه استاندارد، sharepasand@standard.ac.ir

<sup>۲</sup> استادیار، دانشکده مهندسی برق، گروه کنترل، دانشگاه شهید بهشتی، m\_montazeri@sbu.ac.ir

پذیرش: ۱۳۹۷/۰۳/۰۹

ویرایش: ۱۳۹۷/۰۱/۲۴

دریافت: ۱۳۹۶/۰۹/۱۶

**چکیده:** کاربرد سیستم‌های کنترل شبکه شده که در آن‌ها برای انتقال سیگنال‌های حسگری و کنترلی از یک شبکه مشترک استفاده می‌شود، در حال گسترش روزافزون بوده و لذا این سیستم‌ها، طی دهه اخیر مورد توجه محققین قرار گرفته‌اند. از سوی دیگر، سیستم‌های نمونه برداری چند نرخ از مدت‌ها پیش، موضوع پژوهش‌های متعدد بوده‌اند. در این مقاله ابتدا شرایطی که تحت آن یک سیستم شبکه شده، به صورت سیستم چند نرخ قابل مدل‌سازی است، بیان شده و سپس با استفاده از نتایج اخیر در حوزه سیستم‌های شبکه شده، آخرین نتایج موجود در خصوص کنترل پذیری و پایدارپذیری سیستم‌های نمونه برداری چند نرخ، توسعه داده شده است. بدین منظور، شرایط کافی که کنترل پذیری (پایدارپذیری) سیستم کنترل نمونه برداری شده چند نرخ را حفظ کند، ارائه شده است. مثالی عددی جهت تبیین نتایج ارائه شده است.

**کلمات کلیدی:** خواص ساختاری، سیستم‌های کنترل شبکه شده، سیستم‌های نمونه برداری چند نرخ، دنباله مخابراتی

## Structural Properties of Multirate Sampled-Data Systems

Mohammad Mahdi Share Pasand, Mohsen Montazeri

**Abstract:** The application of Networked Control Systems (NCS) in which sensory and control signals are transmitted via shared data communication networks, is growing significantly and these systems have been the subject of research during the last decade. On the other hand, multirate sampled data systems have been investigated since a long time. In this paper, conditions under which a networked control system could be modeled as a multi rate sampled data system are provided. After that, using recent results in the field of networked control systems, existing results for controllability and stabilizability of multi rate sampled data systems are enhanced. For this purpose, sufficient conditions are provided based on the system eigenvalues, to preserve controllability (stabilizability) of a multi rate sampled data system. The results are compared to the existing results in the literature. A numerical example is included as well for clarification and comparison.

**Keywords:** Structural properties, Networked control systems, Multirate sampled data systems, communication sequence.

## ۱- مقدمه

سیستم‌های کنترل شبکه شده<sup>۱</sup> یا تحت شبکه سیستم‌هایی هستند که در آن‌ها حلقه پسخور از طریق یک شبکه مشترک برقرار شده باشد [۱]. در این سیستم‌ها، داده‌های حسگری یا کنترلی از طریق شبکه به/از کنترل کننده (ها) ارسال/دریافت می‌شوند. این سیستم‌ها با گسترش کاربرد شبکه‌های انتقال داده، مخابرات بی سیم و شبکه‌های صنعتی، توسعه روزافزون یافته و امروزه بخش عمده‌ای از فرآیندهای صنعتی، توسط سیستم‌های کنترلی شبکه شده، کنترل می‌شوند. از مزایای استفاده از شبکه در حلقه کنترلی می‌توان به مزیت اقتصادی، سهولت بازیکربندی<sup>۲</sup> و عیب یابی و موارد مشابه اشاره نمود [۱].

چنین سیستم‌هایی در کنترل سیستم‌های گسترده صنعتی [۱]، سیستم‌های کنترل هوشمند ساختمان [۲]، کنترل کارکردهای اتومبیل [۳]، مانند سیستم تعلیق، سیستم سوخت رسانی و مانند آن، و موارد مشابه بسیار کاربرد دارند. در یک سیستم شبکه شده، به دلیل محدودیت‌های شبکه مخابراتی (تاخیر، محدودیت پهنای باند، خطای ناشی از تعداد ارقام محدود داده<sup>۳</sup>، از دست رفتن بسته های داده و غیره) رفتار پویای سیستم با سیستم اولیه (شبکه نشده) متفاوت می‌باشد. محدودیت‌های ناشی از حضور شبکه میان اجزای حلقه کنترل، بسته به پروتکل کنترل دسترسی در شبکه متفاوت می‌باشند. از دیدگاه کنترلی، شبکه‌های انتقال داده به دو نوع مبتنی بر رقابت<sup>۴</sup> و بدون رقابت<sup>۵</sup> طبقه‌بندی می‌شوند [۵]. در شبکه‌های بدون رقابت که مورد نظر این پژوهش هستند، کنترل کننده می‌تواند حسگر/عملگر مورد نظر خود را جهت برقراری ارتباط انتخاب نماید. این وضعیت با شبکه‌های مبتنی بر رقابت مانند اینترنت و اترنت که در آن گره‌ای که زودتر اقدام به درخواست تخصیص عرض باند می‌نماید، در اولویت قرار می‌گیرد، متفاوت است [۵].

از آنجایی که تاخیر انتشار داده در شبکه‌های بدون رقابت، ثابت و معمولاً قابل اغماض است [۶] محدودیت اصلی در این شبکه‌ها محدودیت عرض باند می‌باشد. محدودیت عرض باند بدین معناست که تمامی اطلاعات حسگری یا عملگری نمی‌توانند در یک لحظه و به طور همزمان از طریق شبکه انتقال داده شوند. لذا در حالی که الگوریتم‌های کنترلی موجود، تمامی حسگرها به طور همزمان خوانده شده و تمامی سیگنالهای کنترلی به طور همزمان به فرآیند اعمال می‌شوند، در سیستم شبکه شده، حسگرها طی یک توالی یا دنباله مخابراتی حسگر/خروجی<sup>۶</sup> توسط کنترل کننده خوانده شده و بردار کنترلی نیز بر اساس یک دنباله مخابراتی عملگر/ورودی<sup>۷</sup> به عملگر ارسال می‌شود. در نتیجه سیگنالهای حسگری و کنترلی با تاخیرهای متفاوت و متغیر ارسال می‌شوند [۷]. این مساله منجر به ایجاد تفاوت‌های اساسی میان سیستم شبکه شده و سیستم اولیه می‌شود [۷]. از جمله

این تفاوتها می‌توان به تغییر خصوصیات ساختاری سیستم اولیه و از دست رفتن احتمالی کنترل پذیری، رویت پذیری و خصوصیات مشابه اشاره نمود. [۸-۱۲] هم چنین یک قانون کنترلی پایدارساز برای سیستم اولیه ممکن است برای سیستم شبکه شده پایدارساز نبوده و لذا بی توجهی به دینامیک شبکه منجر به از دست رفتن پایداری شود. قانون کنترل/رویت بهینه برای سیستم اولیه لزوماً قانون بهینه یا حتی مناسبی برای سیستم شبکه شده نمی‌باشد. این موارد انگیزه اصلی پژوهشهای پیشین به منظور توسعه روشهای کنترل و تخمین به سیستمهای دارای محدودیت مخابراتی اعم از اینکه شبکه به کار رفته مبتنی بر رقابت بوده و یا بدون رقابت باشد، شده است.

در اثر حضور شبکه به عنوان یک دینامیک جدید در حلقه کنترلی، سه گانه حسگر، عملگر، کنترل کننده به چهارگانه حسگر، عملگر، شبکه و کنترل کننده تبدیل شده و مدل سازی شبکه بر اساس تاثیرات آن بر عملکرد کنترل و تخمین شامل تاخیر، محدودیت عرض باند و از دست رفتن داده از اهمیت خاصی برخوردار است [۱۳ و ۱۴]. هم چنین زمان بندی دسترسی حسگرها و عملگرها به شبکه برای ارسال/دریافت داده حائز اهمیت می‌باشد. تعیین زمان بندی دسترسی که می‌توان آن را صورت تعمیم یافته زمان نمونه برداری دانست، ممکن است به دو روش صورت پذیرد. روش نخست تعیین زمان بندی و سپس تعیین قانون کنترلی می‌باشد. در این روش ابتدا یک دنباله مخابراتی مشخص تعیین شده و سپس برای سیستم حاصل (که در نتیجه ادغام با دنباله مخابراتی منظور شده، به صورت یک سیستم خطی تغییر پذیر با زمان یا ترکیبی در می‌آید) قانون کنترلی تعیین می‌شود. این روش در فصل ششم [۵]، [۸-۱۲] و بسیاری منابع دیگر اتخاذ شده است. در روش دوم ابتدا یک قانون کنترلی تعیین شده و سپس سعی می‌شود برای سیستم حلقه بسته یک روش زمان بندی مناسب انتخاب شود. در این روش برخلاف روش اول، لازم است ارتباطی میان پایداری حلقه بسته و دنباله مخابراتی (که معمولاً بر حسب حداکثر تاخیر ایجاد شده بیان می‌شود) استخراج گردد. این روش در فصل هفتم [۵] و [۱۵] دنبال شده است.

اولین مساله مورد بررسی در رویکرد نخست، موضوع خواص ساختاری سیستم شبکه شده است. یک دنباله مخابراتی مناسب می‌تواند تاثیر بسزایی روی عملکرد کنترل و تخمین داشته باشد. حداقل خصوصیتی که این دنباله باید احراز نماید، این است که خواص ساختاری سیستم اولیه را حفظ نماید بدین معنا که با فرض کنترل پذیر/رویت پذیر بودن سیستم اولیه، سیستم شبکه شده نیز کنترل پذیر/رویت پذیر باشد. لذا لازم است خصوصیات چنین دنباله‌ای معرفی شوند. حفظ خواص ساختاری سیستم با توجه به کاربرد نظریه کنترل بهینه برای سیستم‌های خطی تغییر پذیر با زمان، زمینه ساز استفاده از روشهای کنترل و تخمین بهینه مجدوری LQR و

<sup>5</sup>Contention free<sup>6</sup> Sensor/output Communication sequence<sup>7</sup> Actuator/input Communication sequence<sup>1</sup>Networked Control Systems (NCS)<sup>2</sup>Reconfiguration<sup>3</sup>Quantization error<sup>4</sup>Contention-based

$$S_A(k) = \text{diag}(s_{Ai}(k))$$

$$S_S(k) = \text{diag}(s_{Si}(k)) \quad (4)$$

ماتریسهای زمان بندی (۲) الی (۴) در پژوهشهای بسیاری به عنوان مدل شبکه به کار رفته اند. از جمله می توان به [۸-۱۲] اشاره نمود. این ماتریسها برای مدل سازی سیستمهای نمونه برداری شده چند نرخی نیز استفاده شده اند [۱۷]. این ماتریسها می توانند از دست رفتن بسته های داده را نیز مدل سازی نمایند [۵]. محدودیت عرض باند شبکه عبارتست از:

$$\text{rank}(S_A(k)) \leq b_A \quad \forall k \in Z$$

$$\text{rank}(S_S(k)) \leq b_S \quad \forall k \in Z \quad (5)$$

در نتیجه، سیستم حاصل از اتصال شبکه با عرض باند محدود به سیستم اولیه، می تواند با ادغام بردارهای نگهدار مرتبه صفر ورودی و/یا خروجی در بردار حالت به صورت سیستم تغییر پذیر با زمان خطی زیر توصیف شود.

$$A(k) = \begin{bmatrix} A & B\bar{S}_A(k) \\ 0 & \bar{S}_A(k) \end{bmatrix}, B(k) = \begin{bmatrix} BS_A(k) \\ S_A(k) \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$A(k) = \begin{bmatrix} A & 0 \\ S_S(k)C & \bar{S}_S(k) \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$C(k) = [S_S(k)C \quad \bar{S}_S(k)]$$

رابطه (۶) ارتباط ورودی و حالت و رابطه (۷) ارتباط خروجی و حالت را نشان می دهد. می توان با ادغام هر دو بردار در بردار حالت، رابطه کلی تری را استخراج نمود.

**تعریف ۱-** دنباله مخابراتی متناوب خروجی ( $\sigma_{ps}$ ) / ورودی ( $\sigma_{pa}$ ) یک مجموعه مرتب از ماتریسهای زمان بندی خروجی/ورودی است. این دنباله تعداد اعضای نامحدود داشته و متناوب می باشد. یک تناوب از چنین دنباله ای به صورت زیر نمایش داده می شود.

$$\sigma_{pa} = \{S_A(0), \dots, S_A(p_A - 1)\}$$

$$\sigma_{ps} = \{S_S(0), \dots, S_S(p_S - 1)\}$$

که در آن  $p_A$  دوره تناوب دنباله مخابراتی عملگرها و  $p_S$  دوره تناوب دنباله مخابراتی حسگرها را نشان می دهند.

**تعریف ۲-** دنباله مخابراتی متناوب خروجی/ورودی مجاز نامیده می شود اگر به تمامی حسگرها/عملگرها در هر تناوب دنباله لااقل یک بار دسترسی داده شود [۵]. در نتیجه رتبه ماتریس حاصل از جمع ماتریسهای زمان بندی حسگر/ عملگر، با تعداد حسگرها/ عملگرها برابر خواهد بود.

LQG بوده و لذا بخش عمده ای از مساله کنترل و تخمین سیستمهای شبکه شده را مرتفع می نماید.

این موضوع در [۱۱ و ۱۶] برای سیستمهایی که سیگنال کنترلی / حسگری در صورت عدم دسترسی به شبکه به صفر باز نشانده می شود و در [۵ و ۸-۱۲] برای سیستمهایی که از نگهدار مرتبه صفر در خروجی و ورودی سیستم اولیه، استفاده می کنند، بررسی شده است. نتایج در بخش آتی به همراه مدل به کار رفته برای سیستم شبکه شده، جهت مرور و مقایسه با نتایج این پژوهش آورده می شود. در بخش سوم، به موضوع دوره تناوب دنباله مخابراتی پرداخته شده و نتایج پژوهش ارائه می شود. در بخش چهارم، با ارائه یک مثال عددی، نتایج این پژوهش با نتایج پژوهشهای پیشین مقایسه می شود. بخش پنجم به جمع بندی و نتیجه گیری اختصاص داده شده است.

## ۲- بیان مساله

توصیف خطی تغییرناپذیر با زمان زیر برای سیستم اولیه مورد نظر می باشد.

$$x(k+1) = A_{n \times n}x(k) + Bu(k) \quad (1)$$

$$y(k) = Cx(k) \quad (2)$$

$$u(k) = S_A(k)\hat{u}(k) + \bar{S}_A(k)u(k-1)$$

$$\hat{y}(k) = S_S(k)y(k) + \bar{S}_S(k)\hat{y}(k-1) \quad (3)$$

ماتریسهای زمان بندی  $S_A(k)$ ،  $S_S(k)$  نشان دهنده دسترسی/عدم دسترسی یک عملگر/حسگر به شبکه انتقال داده در  $k$  امین پنجره زمانی می باشند. به عبارت دیگر، اگر درایه قطری  $S_A(k)(i,i)$  برابر ۱ باشد به این معناست که عملگر  $i$  ام در  $k$  امین پنجره زمانی یعنی بازه زمانی  $t_k \leq t \leq t_{k+1}$  به شبکه دسترسی داشته و لذا داده های به روز شده را از سوی کنترل کننده دریافت می نماید. در صورتی که این درایه صفر باشد، به معنای آن است که عملگر  $i$  ام در بازه زمانی مذکور، به شبکه دسترسی نداشته و لذا باید از داده های قبلی استفاده نماید. ماتریسهای مکمل زمان بندی  $\bar{S}_A(k)$  و  $\bar{S}_S(k)$  عنوان تفاضل ماتریسهای زمان بندی از ماتریس همانی با ابعاد یکسان تعریف میشوند. به عبارت دیگر؛

$$\bar{S}_A(k) = I - S_A(k)$$

$$\bar{S}_S(k) = I - S_S(k)$$

در [۹، ۱۰ و ۱۷] فرض شده است که عملگر در این بازه زمانی، سیگنال کنترلی را به صفر باز نشانی می نماید. در حالی که [۵۸ و ۱۲] فرض رایج تر نگهدار مرتبه صفر را در نظر گرفته اند. این مقاله نیز مدل نگهدار مرتبه صفر را در نظر می گیرد. ترم دوم سمت راست رابطه (۲) و (۴) بیان کننده استفاده از نگهدار مرتبه صفر هستند. بدین معنا که در شرایط عدم ارتباط با شبکه، مقادیر قبلی استفاده می شوند. درایه های غیر قطری ماتریسهای زمان بندی برابر صفر است.

$$\sum_{j=0}^{p-1} \mu^j = 0$$

در حد اطلاعات نویسنده‌گان این مقاله، تاکنون پژوهشی بر روند انتخاب دنباله مخابراتی به نحوی که شرط (۹) احراز شود، صورت نگرفته است. در صورت عدم احراز شرط کافی (۹) سیستم حاصل از ادغام دنباله مخابراتی در دینامیک سیستم اولیه، ممکن است کنترل‌پذیر نباشد. لم‌های زیر که از نتایج این پژوهش هستند، ارتباط حالت تعمیم یافته (شرط (۹)) را با سیستم‌های چند نرخ نمونه‌برداری شده بیان می‌کنند. در لم ۳، ابتدا برخی خواص جالب توجه ضرایب چندجمله‌ای مشخصه مطرح می‌شود و سپس در لم ۴، ارتباط میان نتایج [۱۸] با نتایجی که پیشتر برای سیستم‌های چند نرخ مطرح شده است [۱۷] ارائه می‌شود.

ماتریس  $G_A(\mu)$  یک ماتریس قطری است که هر یک از درایه‌های روی قطر آن یک چندجمله‌ای  $g_{ai}(\mu)$  بوده و دترمینان این ماتریس حاصل ضرب این چند جمله‌ای‌ها می‌باشد. لم ۳، برخی خصوصیات درایه‌های این ماتریس را بیان می‌نماید که در ادامه این مقاله، مورد استفاده قرار خواهند گرفت.

**لم ۳-** در خصوص رابطه (۹) موارد زیر برقرار است:

الف) هر یک از درایه‌های این ماتریس به صورت زیر قابل بیان است.

$$g_{ai}(\mu) = \sum_{j=0}^{p-1} n_j^{(i)} \mu^{p-j-1} \quad (11)$$

که در آن  $n_j^{(i)}$  تعداد دسترسی داده شده به  $i$  امین عملگر در یک دوره تناوب دنباله مخابراتی است که پس از آن دسترسی، لااقل تا  $j$  بازه زمانی (یا بیشتر) بعدی، دسترسی دیگری به  $i$  امین عملگر داده نشود. به عنوان مثال اگر به  $i_1$  امین عملگر در هر بازه زمانی، یک دسترسی داده شود،  $n_0^{(i_1)}$  برابر دوره تناوب و  $n_j^{(i_1)}$  به ازای  $1 < j$  برابر صفر است. به عنوان مثالی دیگر، اگر به  $i_2$  امین عملگر تنها یک بار در هر دوره تناوب دسترسی داده شود، در آن صورت  $n_j^{(i_2)}$  به ازای  $j < p$  برابر واحد است.

ب) هم چنین:

$$n_j^{(i)} \geq n_{j+1}^{(i)} \geq 0 \quad i = 1..n_u \quad (12)$$

پ) مجموع ضرایب هر یک از درایه‌های قطری برابر دوره تناوب دنباله مخابراتی ورودی است.

$$\sum_{j=0}^{p-1} n_j^{(i)} = p \quad i = 1..n_u \quad (13)$$

#### اثبات-

الف) با توجه به تعریف ماتریس‌های زمان‌بندی در (۴)، و تعریف چندجمله‌ای مشخصه در (۹)، واضح است که ماتریس  $G_A(\mu)$  قطری است. با برابر قرار دادن (۹) و (۱۱) و استفاده از نتیجه (۱۰)، به ازای هر مقدار دلخواه  $\mu$ ، ضریب جمله  $\mu^{p-j-1}$  عبارتست از:

$$n_j^{(i)} = \sum_{l=0}^{p-1} S_A(l)(i, l) \prod_{q=l+1}^{p+j-l-1} \bar{S}_A(q)(i, l) \quad (14)$$

(دسترسی مکرر به یک حسگر/عملگر، رتبه این ماتریس را اضافه نخواهد کرد) به عبارت دیگر:

$$\begin{aligned} \text{rank} \sum_{k=0}^{p_S-1} S_S(k) &= n_y \\ \text{rank} \sum_{k=0}^{p_A-1} S_A(k) &= n_u \end{aligned} \quad (8)$$

### ۳- دنباله مخابراتی و خواص ساختاری سیستم

#### شبکه شده

ذیلا ارتباط میان خصوصیات یک دنباله مخابراتی و خواص ساختاری سیستم بررسی شده است. این دو لم از [۱۸] نقل می‌شوند.

**لم ۱-** سیستم شبکه شده (۷) با دنباله مخابراتی خروجی  $\sigma_{ps}$  رویت‌پذیر/آشکارپذیر است اگر: [۱۸]

- سیستم اولیه (۱) رویت‌پذیر/آشکارپذیر باشد.

- دنباله مخابراتی خروجی  $\sigma_{ps}$  مجاز باشد.

**لم ۲-** سیستم شبکه شده (۶) با دنباله مخابراتی ورودی  $\sigma_{pa}$

$$\{S_A(0), \dots, S_A(p_A - 1)\}$$

- سیستم اولیه (۱) کنترل‌پذیر/پایداری‌پذیر است اگر: [۱۸]

- دنباله مخابراتی ورودی  $\sigma_{pa}$  مجاز باشد.

- چند جمله‌ای مشخصه دنباله مخابراتی ورودی به ازای هیچ یک از مقادیر ویژه ماتریس حالت اولیه، صفر نشود؛

$$g_a(\lambda) \neq 0 \quad \forall \lambda: \det(\lambda I - A) = 0$$

$$g_a(\mu) \triangleq \det(G_A(\mu)) = \det \left( \sum_{l=0}^{p-1} S_A(l) \sum_{j=0}^{p-1} \mu^j \prod_{q=l+1}^{p-j+l-1} \bar{S}_A(q) \right) \quad (9)$$

**تکته:** اگر دنباله مخابراتی مجاز نباشد، چند جمله‌ای مشخصه دنباله مخابراتی

(۹) متحداً برابر صفر بوده و لذا سیستم شبکه شده کنترل‌ناپذیر خواهد بود.

رابطه‌ای مشابه (۹) به صورت دیگری نیز بر اساس پارامترهای متفاوتی از دنباله مخابراتی در [۵] و [۸] بیان شده است. شرایط مطرح شده در [۵] و [۸] هر دو شرایط کافی می‌باشند. لازم است توجه شود (۹) تعمیمی از شرط زمانهای نمونه برداری سالم است که در خصوص سیستم‌های گسسته نمونه‌برداری شده شناخته شده است [۱۹]. این شرط بیان می‌دارد که به منظور حفظ خواص ساختاری یک سیستم زمان-پیوسته، کافی است زمان نمونه برداری، شرط زیر را احراز نماید؛

$$\frac{\lambda_a}{\lambda_b} \neq \exp \left( \frac{2\pi l \sqrt{-1}}{p_A} \right) \quad \forall \lambda_a \neq \lambda_b, l = \dots, -1, 0, 1, \dots$$

که در رابطه فوق  $\lambda_a \neq \lambda_b$  هر دو مقدار ویژه متمایز سیستم (۱) می‌باشند.

سمت راست این رابطه ریشه‌های معادله زیر هستند که حالت خاصی از چند جمله‌ای (۹) است.

<sup>1</sup> Non-pathological sampling periods

**اثبات-** چون فاصله زمانی میان تمام دسترسی‌های متوالی به هر عملگر، مقدار ثابتی است، لذا اگر این مقدار ثابت را برای عملگر  $i$  ام برابر  $d^{(i)}$  در نظر بگیریم، دو حالت زیر قابل تمایز خواهند بود:

حالت ۱. در صورتی که طول بازه  $(j)$  از فاصله ثابت میان تمامی دسترسی‌ها  $n_j^{(i)}$  ( $d^{(i)}$ ) کمتر باشد، تمامی دسترسی‌های داده شده به عملگر  $i$  ام در محاسبه  $n_j^{(i)}$  شمرده می‌شوند.

حالت ۲. در صورتی که طول بازه از فاصله ثابت میان تمامی دسترسی‌ها بیشتر باشد، لااقل یک دسترسی دیگر به عملگر مزبور در بازه زمانی  $j$  وجود خواهد داشت و لذا هیچ یک از دسترسی‌ها شمرده نشده و  $n_j^{(i)}$  صفر خواهد بود. لذا می‌توان نوشت:

$$n_j^{(i)} = \begin{cases} 0 & j > d^{(i)} \\ n_0^{(i)} & j \leq d^{(i)} \end{cases} \quad (17)$$

بر این اساس (۱۶) نتیجه می‌شود.

لازم به ذکر است (۱۶) مضرب ثابتی از یک چندجمله‌ای AOP است که ریشه‌های آن ریشه‌های مختلط واحد بوده و روی محیط دایره واحد در صفحه مختلط قرار می‌گیرند. برای نشان‌دادن این موضوع کافی است توجه شود:

$$\sum_{j=0}^{p-1} \mu^{p-j-1} = \frac{\mu^p - 1}{\mu - 1} = \frac{\mu^{n_0^{(i)}} - 1}{\mu - 1} \quad (18)$$

هم چنین می‌توان توجه نمود که دنباله‌های مخابراتی با فاصله زمانی ثابت، مدل کننده سیستم‌های چند نرخ هستند و لذا (۱۶) شرایط کافی برای کنترل پذیری/پایداری سیستم‌های چند نرخ را بیان می‌کند. این موضوع در قالب قضیه ۱ بیان شده است.

**قضیه ۱-** یک سیستم نمونه‌برداری شده چند نرخ کنترل پذیر/پایدار پذیر است اگر:

- سیستم زمان-پیوسته کنترل پذیر/پایدار پذیر باشد.
- کوچکترین زمان نمونه برداری (کهسایر زمانهای نمونه برداری مضربی طبیعی از آن هستند) شرایط زمان نمونه برداری سالم برای سیستم‌های نمونه برداری تک نرخ را احراز نماید.
- سیستم حاصل از نمونه برداری با کمترین زمان نمونه برداری قطبی برابر با ریشه رابطه (۱۸) نداشته باشد.

**اثبات قضیه ۱-** بر اساس لم ۲، در صورت احراز شرط (۹) سیستم چند نرخ خصوصیات ساختاری خود را حفظ خواهد کرد. با توجه به (۱۶)، شرط (۹) به نداشتن قطبی برابر با ریشه‌های رابطه (۱۸) کاسته می‌شود. بنابراین، در مورد سیستم‌های چند نرخ، شرایط لم ۲، به شرایط فوق کاسته خواهد شد. لذا، سیستم چند نرخ کنترل پذیر/پایدار پذیر است اگر، سیستم زمان-گسسته تک نرخ کنترل پذیر/پایدار پذیر بوده (شرایط اول و دوم این قضیه) و رابطه (۱۸) برآورده شود (شرط سوم این قضیه). بدین ترتیب اثبات کامل می‌شود.

قضیه ۱، شرایط کنترل پذیری/پایداری را برای یک سیستم چند نرخ بیان می‌کند. این شرایط کافی بوده و در مقایسه با آخرین نتایج موجود که از جمله در [۱۷] و [۲۰] گزارش شده است، ساده تر هستند. این نتایج تعمیمی از زمان‌های نمونه برداری سالم [۲۱] می‌باشند. در [۱۷] مساله کنترل پذیری سیستم چند نرخ بر حسب رتبه ماتریس کنترل پذیری سیستم بالا برده شده که دارای ابعاد بیشتری

با توجه به ساختار ماتریس زمان بندی، ترمهای مجموع در سمت راست (۱۴) همواره صفر هستند مگر به ازای  $l = k$  که در لحظه  $k$  به عملگر  $i$  ام دسترسی داده شده باشد. از سوی دیگر حاصل ضرب درایه‌های قطری  $\bar{S}_A(q)$  تنها در صورتی غیر صفر خواهد بود که در بازه زمانی  $l - 1 \leq q \leq p + j - l$  دسترسی دیگری به عملگر  $i$  ام داده نشود. در غیر این صورت، اگر در این بازه دسترسی به عملگر  $i$  ام داده شود، درایه قطری متناظر  $\bar{S}_A(q)(i, i)$  صفر شده و حاصل ضرب صفر می‌شود. بنابراین  $n_j^{(i)}$  شمارنده تعداد دسترسی‌هایی است که پس از آنها تا  $j$  بازه زمانی، دسترسی دیگری به عملگر  $i$  ام داده نشده باشد.

(ب) با توجه به نتیجه بخش (الف)، واضح است که تعداد دسترسی‌های داده شده به عملگر  $i$  ام پس از آن تا  $j$  بازه زمانی دسترسی دیگری به آن عملگر داده نشده است، از تعداد دسترسی‌های داده شده به همان عملگر که پس از آن تا  $j + 1$  بازه زمانی دسترسی دیگری وجود ندارد، بیشتر است. ضمناً تفاضل این مقدار برابر تعداد دسترسی‌های داده شده به عملگر مذکور است که پس از آنها دقیقاً تا  $j + 1$  بازه بعدی دسترسی دیگری وجود نداشته باشد. هم چنین می‌توان توجه نمود که:

$$n_j^{(i)} = 0 \quad j > p - 1, \quad i = 1..n_u \quad (15)$$

(ب) با توجه به نتیجه بخش (ب) از همین لم،  $n_j^{(i)}$  تعداد بازه‌های زمانی قرار گرفته پس از یک دسترسی به عملگر  $i$  ام که در آنها دسترسی دیگری به آن عملگر داده نشده است، می‌شمارد.

برای  $j^* > 0$  اگر  $n_{j^*}^{(i)} \neq 0$  باشد به معنای قرار داشتن  $j^*$  بازه زمانی است که به عملگر  $i$  ام اختصاص ندارند. بنابر نتیجه بخش (ب) از همین لم، این تعداد  $j^*$  بار شمرده می‌شود، بنابراین به ازای هر ضریب غیر صفر  $n_{j^*}^{(i)} \neq 0$ ، کل بازه‌های زمانی موجود در یک تناوب به جز بازه‌های اختصاص داده شده به عملگر  $i$  ام در مجموع (۱۳) شمارش می‌شوند. برای  $j^* = 0$  یا  $n_0^{(i)}$  تعداد دسترسی‌های عملگر  $i$  ام که پس از آن در صفر بازه زمانی بعدی دسترسی دیگری به آن عملگر وجود ندارد می‌شمارد. لذا  $n_0^{(i)}$  تعداد کل دسترسی‌های داده شده به عملگر  $i$  ام را می‌شمارد. بنابراین مجموع (۱۳) عبارتست از:

$$\sum_{j=0}^{p-1} n_j^{(i)} = n_0^{(i)} + \sum_{j=1}^{p-1} n_j^{(i)} = p; \quad i = 1..n_u$$

ترم نخست ( $n_0^{(i)}$ ) تعداد دسترسی داده شده به عملگر  $i$  ام و ترم دوم تعداد دسترسی داده نشده به این عملگر را می‌شمارد که جمعا برابر طول دوره تناوب است. می‌توان توجه نمود که مجموع (۱۵) برابر ماتریس  $G_A(1)$  است:  $\text{trace}(G_A(1))$ .

**لم ۴-** اگر فاصله زمانی میان تمامی دسترسی‌های متوالی داده شده به یک عملگر ثابت باشد، درایه‌های قطری ماتریس چندجمله‌ای مشخصه زمان بندی (۹) به صورت زیر خواهد بود:

$$g_{Ai}(\mu) = n_0^{(i)} \sum_{j=0}^{\frac{p}{n_0^{(i)}}-1} \mu^{p-j-1} \quad (16)$$

نمود که کنترل پذیر باشد. به عبارت دیگر، شرایط کافی ارائه شده در [۱۱] برای کنترل پذیری سیستم مطروحه در این مثال، راه حلی ارائه نمی‌نماید. بر اساس شرایط به دست آمده در این مقاله (قضیه ۱)، برای سیستمهای زمان-گسسته دارای قطبهای متعدد روی دایره واحد نیز، امکان کنترل پذیری (پایدار پذیری) فراهم خواهد بود. براین نبل به این مقصود، کافی است دنباله مخابراتی به نحوی انتخاب شود که شرایط قضیه (۱) برآورده شوند. این مساله در ردیف ۵ جدول برای سیستمهای چند نرخ احراز شده است.

#### ۴- نتیجه گیری

در این مقاله ضمن مرور نتایج پژوهشهای پیشین در زمینه خصوصیات دنباله مخابراتی ورودی و خروجی که خواص ساختاری یک سیستم تحت شبکه را حفظ کنند، برخی خصوصیات جالب توجه ضرایب چند جمله‌ای مشخصه دنباله مخابراتی ارائه شده و شرایطی که تحت آن حفظ خواص ساختاری سیستم چند نرخ تضمین می‌شود، استخراج شده و نتایج موجود در خصوص کنترل پذیری سیستمهای چند نرخ بهبود داده شده است. یک مثال عددی برای نشان دادن مزیت نتایج به دست آمده در مقایسه با پژوهشهای پیشین نیز ارائه شده است.

#### مراجع

- [1] Zeltwanger, H., "An inside look at the fundamentals of CAN", *Control Engineering*, 42.1 (1995), 81-87.
- [2] Kastner, Wolfgang, et al. "Communication systems for building automation and control." *Proceedings of the IEEE* 93.6 (2005): 1178-1203.
- [3] Gaid, ME Mongi Ben, ArbenCela, and YskandarHamam. "Optimal integrated control and scheduling of networked control systems with communication constraints: application to a car suspension system." *Control Systems Technology, IEEE Transactions on* 14.4 (2006): 776-787.
- [4] Qu, Zhihua. "Cooperative control of dynamical systems: applications to autonomous vehicles". Springer Science & Business Media, 2009.
- [5] Longo, Stefano, et al. *Optimal and robust scheduling for networked control systems*. CRC Press, 2013.
- [6] Gupta, Rachana Ashok, and Mo-Yuen Chow. "Networked control system: overview and research trends." *Industrial Electronics, IEEE Transactions on* 57.7 (2010): 2527-2535.
- [7] Zhang, Lixian, HuijunGao, and OkyayKaynak. "Network-induced constraints in networked control systems—a survey." *Industrial Informatics, IEEE Transactions on* 9.1 (2013): 403-416.
- [8] Longo, Stefano, Guido Herrmann, and Phil Barber. "Controllability, observability in networked control." *Robust Control Design*, 6.1, (2009): 438-446.
- [9] Share Pasand, Mohammad Mahdi, and Mohsen Montazeri. "Structural Properties of Networked Control Systems with Bandwidth Limitations and Delays." *Asian Journal of Control* 19.3 (2017): 1228-1238.
- [10] Share Pasand, Mohammad Mahdi, and Mohsen Montazeri. "Structural properties, LQG control and

می‌باشد، مطرح شده است. در [۲۰] شرط نداشتن قطبی روی دایره واحد مطرح شده است که در مقایسه با شرایط قضیه ۱ فوق‌الذکر، محدودکننده‌تر است. لذا قضیه ۱، شرایط کنترل پذیری برای طیف وسیع‌تری از سیستمها را بیان می‌نماید.

#### مثال عددی

در این بخش یک مثال عددی به منظور تبیین نتایج و مزیت قضیه ۱ در مقایسه با آخرین نتایج موجود در [۱۱]، ارائه می‌شود. سیستم کنترل‌پذیر زیر را در نظر بگیرید:

$$A = \begin{bmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 & 0 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, b = 1$$

چون این سیستم دارای سه قطب روی دایره واحد است، نتایج [۱۱] نمی‌تواند در خصوص کنترل پذیری سیستم چند نرخ / تحت شبکه حاصل از هر دنباله مخابراتی، به کار رود. جدول زیر برخی دنباله‌های مخابراتی و خواص ساختاری سیستم حاصل را خلاصه کرده است.

ردیف	دنباله مخابراتی	نتیجه	توضیحات
۱	$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$	کنترل پذیر	سیستم تک نرخ
۲	{1,2}	کنترل پذیر	سیستم تک نرخ با محدودیت عرض باند
۳	$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, 1 \right\}$	کنترل پذیر	سیستم چند نرخ
۴	$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, 1, 1 \right\}$	کنترل ناپذیر	
۵	$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, 1, 1, 1 \right\}, \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$	کنترل پذیر	
۶	$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, 1, 1, 1, 1 \right\}$	کنترل ناپذیر	

در ردیف نخست جدول (دنباله مخابراتی عملگر  $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ) فرض شده است که دسترسی همزمان هر دو ورودی به شبکه (به روز رسانی هر دو عملگر با نرخ یکسان و به صورت همزمان) می‌باشد. در ردیف دوم، (دنباله مخابراتی {1,2}) فرض شده است که ابتدا عملگر اول و پس از آن عملگر دوم به روزرسانی می‌شوند. به عبارت دیگر، ورودی‌ها به جای آنکه همزمان به روزرسانی شده یا به شبکه متصل شوند، با فاصله زمانی یک زمان نمونه برداری، به روزرسانی می‌شوند. در ردیف سوم (دنباله مخابراتی  $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, 1 \right\}$ ) فرض شده است که ابتدا دو ورودی به صورت همزمان به روز رسانی شده و پس از آن ورودی (عملگر) اول به تنهایی به روزرسانی می‌شود. به عبارت دیگر، ورودی اول با نرخ دو برابر ورودی دوم، به روزرسانی می‌شود. لذا سیستم معرفی شده در ردیف سوم، یک سیستم چند نرخ است. ردیفهای چهارم و پنجم نیز سیستمهای چند نرخ دیگر که در آنها نرخ به روزرسانی ورودی اول سه، چهار، پنج و شش برابر نرخ به روزرسانی ورودی دوم است را نشان می‌دهند. با توجه به این جدول، اولاً شرایط کنترل پذیری سیستم چند نرخ با استفاده از نتایج این مقاله، ساده‌تر از شرایط معرفی شده در [۱۱] می‌باشد. چون [۱۱] برای کنترل پذیری (پایدار پذیری) سیستم چند نرخ، فرض کرده است که سیستم اولیه (تک نرخ) هیچ قطبی روی دایره واحد نداشته باشد. این فرض بسیار محدودکننده بوده و عملاً بسیاری از سیستمهای زمان-گسسته حاصل از گسسته‌سازی سیستمهای زمان-پیوسته، قطب یا قطبهایی روی دایره واحد دارند. از جمله، سیستم مورد بحث در این مثال، دارای سه قطب روی دایره واحد است. در نتیجه بر اساس نتایج [۱۱] نمی‌توان هیچ فرم چند نرخ برای این سیستم تصور

scheduling of a networked control system with bandwidth limitations and transmission delays." *IEEE/CAA Journal of Automatica Sinica* (2017).

[11] Hristu-Varsakelis, Dimitrios. "Short-period communication and the role of zero-order holding in networked control systems." *Automatic Control, IEEE Transactions on* 53.5 (2008): 1285-1290.

[12] Share Pasand, Mohammad Mahdi, and Mohsen Montazeri. "L-Step Reachability and Observability of Networked Control Systems with Bandwidth Limitations: Feasible Lower Bounds on Communication Periods." *Asian Journal of Control* (2017).

[13] Bushnell, Linda G. "Networks and control." *IEEE Control Systems Magazine* 21.1 (2001): 22-23.

[14] Baillieul, John, and Panos J. Antsaklis. "Control and communication challenges in networked real-time systems." *Proceedings of the IEEE* 95.1 (2007): 9-28.

[15] Walsh, Gregory C., Hong Ye, and Linda G. Bushnell. "Stability analysis of networked control systems." *Control Systems Technology, IEEE Transactions on* 10.3 (2002): 438-446.

[16] Pasand, Mohammad Mahdi Share, and Mohsen Montazeri. "Kalman Filtering with Optimally Scheduled Measurements in Bandwidth Limited Communication Media." *ETRI Journal* 39.1 (2017): 13-20.

[17] Longhi, Sauro. "Structural properties of multirate sampled-data systems." *IEEE Transactions on Automatic Control* 39.3 (1994): 692-696.

[18] Suzuki, Tatsuo, et al. "Controllability and stabilizability of a networked control system with periodic communication constraints." *Systems & Control Letters* 60.12 (2011): 977-984.

[19] Åström, Karl J., and Björn Wittenmark. *Computer-controlled systems: theory and design*. Courier Corporation, 2013.

[20] Wang, Jiandong, Tongwen Chen, and Biao Huang. "Multirate sampled-data systems: computing fast-rate models." *Journal of process control* 14.1 (2004): 79-88.

[21] Middleton, Rick, and Jim Freudenberg. "Non-pathological sampling for generalized sampled-data hold functions." *Automatica* 31.2 (1995): 315-319.