

ارایه یک رهیافت محاسباتی جدید به منظور تحلیل تماس بین یک نانو فرورونده کروی با رویه یک نیم فضای ویسکوالاستیک

حسین اشرفی، مهرداد فرید و مهدی کسرای

قطب علمی مکانیک محاسباتی- دانشکده مهندسی مکانیک- دانشگاه شیراز

(دریافت مقاله : ۸۸/۸/۳ - پذیرش مقاله : ۸۸/۱۲/۹)

چکیده

مسائل مقدار مرزی در برگرفته تماس یکی از با اهمیت ترین مسائل در صنایع وابسته به مهندسی مکانیک جامدات، سازه و همچنین در کاربردهای علوم فضایی و نظامی، علوم پزشکی، بیوسیستم و محیط زیست می باشند. در این مقاله، فرآیند حل محاسباتی جدیدی به منظور فرمول بندی و تحلیل مسایل نانو فروروی تماسی (*contact nanoindentation*) بین یک فرورونده کروی صلب با رویه یک نیم فضای ویسکوالاستیک با هر هندسه دلخواه در شرایط بدون اصطکاک ارایه می شود. استخراج روابط بین توزیع فشار تماسی، نیروی عامل بر فرورونده و میزان نفوذ در لایه ویسکوالاستیک خواسته اصلی این مطالعه می باشد. مساله نانو فروروی ویسکوالاستیک با بکارگیری یک فرمول بندی مناسب در معادلات متشکله و استفاده از روش محاسباتی وارون سازی ماتریسی (*matrix inversion method*) با ارضای دقیق شرایط مرزی حل شده است. مقایسه نتایج عددی با حل تحلیلی فرآیند بارگذاری و باربرداری برای نانو فرورونده های کروی، دقت رهیافت حل محاسباتی را نشان می دهد.

واژه های کلیدی: مسایل تماسی ویسکوالاستیک، رهیافت محاسباتی وارون سازی ماتریسی، رویه ی نیم فضا، فروروی نانو.

A new numerical approach for the contact analysis between a spherical nanoindenter on the surface of viscoelastic half-space

H. Ashrafi, M. Farid and M. Kasraei

Center of Excellent in Computational Mechanics, Department of Mechanical Engineering,
Shiraz University

Abstract

Boundary value problems involving contact are great importance in industries related to mechanical and civil engineering, also in environmental, medical, military and aerospace applications. In this paper, the nanoindentation contact problem between a rigid spherical indenter and surface of a viscoelastic half-space of arbitrary shape is considered under assumption of interfacial surfaces are frictionless. Deriving of the relations between the contact pressure distribution, the resultant force on the indenter and the penetration on viscoelastic surface is the main scope of presented study. By appropriate formulation of the viscoelastic constitutive equations, the problem can be solved numerically using the Matrix Inversion Method (MIM), extended to viscoelastic indentation case and with exactly satisfying the boundary conditions. Comparison of the numerical results with analytical ones for loading-unloading procedure of spherical indenters, shows the efficiency of the method in case of a prescribed penetration as well as given load history.

Keywords: *Viscoelastic Contact Problems, Matrix Inversion Approach, Surface of Half-space, Nanoindentation*

E-mail of corresponding author: *ashrafi@shirazu.ac.ir*

مقدمه

الاستیک و هم ویسکوز می‌باشند. از این رو پیکربندی کلی تماس، ناحیه مشترک تماسی و نحوه توزیع تنش‌های تماسی همگی وابسته به زمان خواهند بود. علاوه بر این، مسایل تماسی در مواد تغییرشکل پذیر به دلیل تغییر پیوسته شرایط مرزی در میانجی تماسی، غیرخطی و هنگامی که یکی از پیکره‌ها نیز ویسکوالاستیک باشند، تحلیل این مسایل غیرخطی و وابسته به زمان خواهد بود.

اغلب در تحلیل‌های ویسکوالاستیک از قضیه تناظر (correspondenc theorem) الاستیک - ویسکوالاستیک استفاده می‌شود [۲-۴]. معادلات ویسکوالاستیک را به وسیله ی تبدیلات لاپلاس یا فوریه می‌توان به معادل الاستیک آن‌ها تبدیل نمود و پس از حل مساله تبدیل شده، با معکوس سازی می‌توان رفتار را در دامنه زمانی مطلوب بازیابی کرد. از این رو به علت پیچیدگی‌های رفتار ویسکوالاستیک، این رهیافت‌ها فقط در تحلیل مسایلی مقدور می‌باشند که پذیرش خزش (creep compliance) و یا مدول وارهیدگی (relaxation) ماده با یک مدل ساده مکانیکی قابل بیان باشند.

از دیرباز به علت میزان اهمیت تحلیل تماس در مسایل کاربردی، تعداد قابل توجهی از محققان به پژوهش در این زمینه مشغول بوده‌اند. نخستین فرمول‌بندی‌های سه بعدی تئوری ویسکوالاستیسیته خطی و ایزوتروپیک توسط برخی از محققان پیشگام مانند ماکسول، کلونین، ووت و بولتزمن معرفی شده‌اند. تماس نرمال بین یک فرورونده کاملاً صلب با یک لایه الاستیک صفحه‌ای به وسیله تئوری‌های پتانسیلی ابتدا توسط بوسینسک مطرح و بررسی گردید [۵]. یک رهیافت تحلیلی برای توصیف تنش‌ها و تغییرشکل‌ها در نزدیکی نقطه تماس توسط هرتز [۵] با بررسی تماس الاستیک بین رویه‌های دو پیکره الاستیک یکنواخت معرفی شد. سپس تعداد قابل توجهی از رهیافت‌های تحلیلی و نیمه تحلیلی ارائه شدند. رهیافت ماندگاری با استفاده از تئوری بوسینسک برای انواع متفاوتی از فرورونده‌های صلب روی نیم فضای الاستیک در شرایط تماس با تقارن محوری توسط اسندن [۶] ارائه گردید. سپس رهیافت ابتدایی توسط لی و رادوک [۷] با استفاده از راه حل تماس الاستیک هرتز و روش تبدیل

با افزایش استفاده از مواد با ساختارهای بسیار کوچک، فیلم‌های نازک، مواد هدفمند، نانو کامپوزیت‌ها، نانو مواد بیولوژیکی و سایر مواد نامتجانس در شاخه‌های مختلف علوم مهندسی، تحلیل و ارزیابی دقیق تنش و تغییرشکل چنین موادی برای پیش بینی رفتار نهایی شکست قابل اطمینان، بسیار احساس می‌شود. در سال‌های اخیر، ابزار مناسبی که به منظور بررسی مشخصه‌های مکانیکی موضعی مواد ویسکوالاستیک در مقیاس‌های کوچک میکرو و نانو بسیار مورد توجه قرار گرفته است، استفاده از عمق سنجی فروروی در بارهای بسیار کم می‌باشد که به روش فروروی نانو مشهور است [۱]. با کاهش گسترده ضخامت پوشش‌ها و لایه‌های نازک در تولیدات مهندسی، اندازه‌گیری مستقل خواص مکانیکی واقعی فیلم‌ها و پوشش‌ها و لایه‌های زیرین نیز به دلیل برهمکنش بر یکدیگر به همان اندازه در حال پیچیده شدن می‌باشد. در اکثر موارد، محدودیت‌های آزمایشی برای تعیین خواص آن‌ها وجود دارد و نیز فراهم نمودن دستگاه‌های آزمایش در مقیاس نانو نیازمند صرف هزینه‌های بالایی می‌باشد. در نتیجه، مدل‌سازی این فرآیندها در مسایل مهندسی از اهمیت ویژه‌ای برخوردار شده است.

در گذشته اکثر مطالعات تئوری برای تخمین فشار و ناحیه تماس اجسام در حال تماس با هم بر اساس تئوری‌های تماس الاستیک پایه‌ریزی شده بودند. افزوده شدن اثرات ویسکوالاستیک سبب ایجاد پیچیدگی‌های عملی در حل مساله می‌شود. یکی از شاخصه‌های اساسی رفتار جامدات الاستیک، ظرفیت ذخیره‌سازی انرژی مکانیکی در هنگام تغییرشکل در اثر بارگذاری و آزادسازی کامل این انرژی پس از باربرداری می‌باشد. برخلاف این رفتار در سیالات ویسکوز، انرژی مکانیکی بطور پیوسته و بدون ذخیره‌سازی مستهلک می‌شود. به طور اختصاصی، برخی از مواد پرکاربرد و با اهمیت مهندسی، انرژی مکانیکی را هنگام مواجه شدن با نیروهای اعمالی به صورت همزمان هم ذخیره و هم مستهلک می‌سازند که به این پاسخ ساختاری، رفتار ویسکو الاستیک گفته می‌شود. در مقابل تنش‌های تماسی الاستیک، تنش‌های تماسی ویسکوالاستیک، هم تحت تأثیر خواص

فرورونده صلب متقارن محوری بدون اصطکاک با پروفیل چند جمله‌ای بر یک نیم فضای ویسکوالاستیک با استفاده از قضیه تناظر توسط فو [۱۳] مطالعه شد. لارسن و همکارانش [۱۴] نیز مدل‌سازی جامعی را بر روی نانو فرورونده‌های برکویچ انجام دادند. تحلیل نانو فروروی کاملی توسط واندامی و الم [۱۵] با استفاده از روش توسعه یافته توابع کنشمند ویسکوالاستیک بیان شد که در آن به طور اختصاصی از فرورونده‌های مخروطی و مدلهای ویسکوالاستیک خطی متفاوتی استفاده گردید. گودیر و همکارانش [۱۶] نیز نانو فروروی تماسی یک فرورونده متقارن محوری بر رویه یک نیم فضای الاستیک را تحت اعمال یک بار یکنواخت نرمال با فرض اصطکاک کولمب در میانجی تماسی آن‌ها مورد تحلیل قرار دادند. لو و همکارانش [۱۷-۱۸] ضریب پذیرش خزشی و مدول وارهیدگی یانگ چند ماده پلیمری را با کاربرد قضیه تناظر بر تئوری‌های تماس هرتز و اسندن برای نانو فروروی استخراج نمودند. جیاناکوپولوس [۱۹] تماس بدون اصطکاک و چسبندگی سطوح هموار الاستیک و ویسکوالاستیک را با نانو فرورونده‌های هرمی بررسی کرد. مساله فروروی تماسی نانو فرورونده‌های کروی بر رویه‌های جامدات ویسکوالاستیک نیز توسط چنگ و همکارانش [۲۰] مطالعه شد.

در این مقاله، یک رهیافت حل جدید برای محاسبه نانو فروروی تماسی بین یک پیکره کروی صلب با رویه یک نیم فضای ویسکوالاستیک با هر هندسه دلخواه ارائه شده است. از یک رهیافت محاسباتی وارون‌سازی ماتریسی برای حل نانو فروروی تماسی و استخراج تاریخچه توزیع فشار در هر تاریخچه بار یا نفوذ استفاده شده است. یافتن ارتباط بین توزیع فشار، نیروی وارد بر فرورونده و عمق نفوذ با این فرآیند حل جدید از اهداف این مقاله می‌باشد.

فرمول‌بندی معادلات متشکله ویسکوالاستیک

معادلات متشکله که منعکس‌کننده ساختار ذاتی و درونی یک ماده خاص می‌باشند، مدلهای متفاوتی از رفتار مواد را مشخص می‌کنند. از منظر ریاضی، سودمندی معادلات متشکله در توصیف روابط میان معادلات میدانی گرمایی، مکانیکی و

لاپلاس برای تماس یک کره صلب هموار بر روی یک نیم فضای ویسکوالاستیک بدون اصطکاک مورد مطالعه قرار گرفت. آن‌ها سطح تماس را در این مطالعه به صورت یک تابع با افزایش یکنواخت در زمان در نظر گرفتند، از اینرو رهیافت آن‌ها در موارد کاهش در سطح تماس پاسخی نداشت. این نقص توسط تینگ [۸-۹] برای تحلیل رفتار تماسی بین فرورونده‌های صلب با تقارن محوری و غیرمتقارن با یک نیم فضای ویسکوالاستیک مورد مطالعه قرار گرفت. در مطالعه او این امکان وجود داشت که سطح تماس به صورت هر تابع دلخواهی از زمان انتخاب شود و راه حل‌های هم به صورت همبسته با مساله بوسینسک بیان گردید. تحلیل ارائه شده لی و رادوک برای دو جسم در حال تماس با در نظر گرفتن رویه‌های تماسی دلخواه مرتبه دوم توسط یانگ [۱۰] بهبود یافت. معادلات متشکله ویسکوالاستیک در تحقیق یانگ به وسیله عملگرهای انتگرالی بیان شدند و از فرورونده‌های صلب بیضوی نیز استفاده نمودند. نقیه و همکارانش [۱۱] یک مدل تماسی ویسکوالاستیک لایه‌ای را توسعه دادند که در آن، تماس یک لایه ویسکوالاستیک خطی که به طور کامل بر روی یک زیرلایه صلب قرار گرفته با یک فرورونده صلب بدون اصطکاک تحت بارگذاری مرحله‌ای مورد تحلیل قرار گرفت. هیات و همکارانش [۱۲] یک مدل پایدار در شرایط تماس چسبندگی برای پیکره‌های ویسکوالاستیک خطی در سایش فرمول‌بندی کردند. در فرمول‌بندی آن‌ها از تعمیم مدل تماسی ساده تینگ به یک مدل خود پایداری در تحلیل تماس چسبندگی پیکره‌های متقارن استفاده شد.

در پی گسترش فناوری نانو، تحلیل‌های نوین نانو فروروی در سال‌های اخیر جایگزین تحلیل‌های کلاسیک مسایل فروروی شده است. تحلیل‌های کلاسیک مسایل فروروی تماسی یک فرورونده صلب بر رویه یک نیم فضای ویسکوالاستیک که اغلب در کاربردهای عملی برای تعیین خواص متشکله رویه‌های ویسکوالاستیک بکار می‌رود، در سال‌های اخیر منجر به ظهور روش نانو فروروی گردیده است [۱]. رهیافت‌های میکرو و نانو فروروی به عنوان ابزارهایی توانمند در یافتن خواص مکانیکی مواد به ویژه فیلم‌های نازک و زیر لایه‌های ویسکوالاستیک تثبیت شده اند. تماس کامل نانو فروروی یک

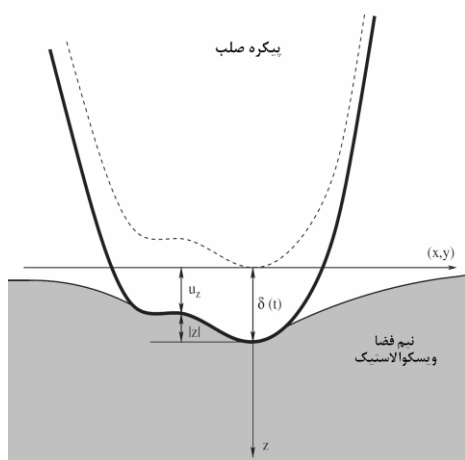
رهیافت محاسباتی جدید برای فروروی تماسی ویسکوالاستیک

در اینجا یک نانو فرورونده صلب با هندسه دلخواه $z(x, y)$ در فروروی تماسی بدون اصطکاک به درون رویه یک نیم فضای جامد ویسکوالاستیک مورد نظر قرار می‌گیرد. میزان نفوذ $\delta(t)$ فرورونده و ناحیه تماس حاصل از فروروی تحت یک بارگذاری یکنواخت نرمال با زمان افزایش می‌یابند که این امر سبب تغییر در چگونگی توزیع فشار تماسی $p(x, y, t)$ خواهد شد. یافتن روابطی بین توزیع فشار، نیروی برآیند روی فرورونده و نفوذ در این بخش دنبال می‌شود. با استفاده از مختصات کارتزین، رویه نیم فضای ویسکوالاستیک قبل از بارگذاری نسبت به صفحه (x, y) در شکل ۱ نشان داده شده است. شرایط مرزی برای مساله در $z=0$ به صورت زیر بیان می‌شود:

$$u(x, y, t) = \delta(t) - |z| \quad (x, y) \in \Psi(t) \quad (5)$$

$$\sigma_{xz} = \sigma_{yz} = \sigma_{zz} = 0 \quad (x, y) \notin \Psi(t) \quad (6)$$

که در اینجا $u(x, y, t)$ بیانگر مؤلفه عمودی جابجایی نقطه‌ای از رویه نیم فضا در جهت z می‌باشد، $\Psi(t)$ هم بیانگر میانجی تماسی فعلی و σ نیز تانسور وضعیت تنش را نشان می‌دهد.



شکل ۱. طرح فروروی تماسی بیکره صلب دلخواه بر رویه یک نیم فضای ویسکوالاستیک

سینماتیکی و تشکیل فرمول‌بندی‌های مسایل قابل طرح در مکانیک محیط‌های پیوسته می‌باشد. از منظر فیزیکی، سودمندی معادلات متشکله در تعریف مواد گوناگون و به صورت ایده‌آل درآمده می‌باشد، که با بکارگیری مدل‌های متفاوت برای بیان رفتار واقعی مواد انجام می‌شود. با این وجود، امکان پذیر نیست که یک معادله را برای بیان یک ماده مشخص برای تمام محدوده کاربردهای آن ثبت نمود؛ به این دلیل که اکثر مواد تحت سطوح تغییر بارگذاری مانند پاسخ الاستیک - پلاستیک در اثر افزایش تنش رفتارهای کاملاً متفاوتی دارند. از اینرو به طور کلی بهتر است که معادلات متشکله بیانگر یک رفتار ویژه باشند تا برای یک ماده مشخص شوند [۲۱-۲۲].

رابطه تنش-کرنش حاکم بر جامدات الاستیک تراکم ناپذیر را به صورت زیر می‌توان نشان داد:

$$s_{ij} = 2\mu e_{ij} \quad (1)$$

و یا به عبارت دیگر

$$e_{ij} = (1/2\mu) s_{ij} \quad (2)$$

که در این روابط، (s_{ij}) و (e_{ij}) به ترتیب مؤلفه‌های انحرافی تنش و کرنش و (μ) بیانگر ضریب لامه و یا مدول برشی می‌باشند. مطابق اصول متناظری در الاستیسیته می‌توان روابط حاکم بر بیکره‌های ویسکوالاستیک خطی را با معرفی توابع وارهدگی و خزشی در قالب معادلات ولترا معرفی نمود و با استفاده از فرم کلی رابطه بازنمایی ایزوتروپیک تانسور مرتبه چهارم توابع وارهدگی و خزشی، معادلات انتگرالی را به صورت زیر می‌توان نمایش داد [۲۳و۲]:

$$s_{ij} = \int_0^t G(t-\tau) \frac{de_{ij}(\tau)}{d\tau} d\tau \quad (3)$$

$$e_{ij} = \int_0^t J(t-\tau) \frac{ds_{ij}(\tau)}{d\tau} d\tau \quad (4)$$

بنحوی که $G(t)$ و $J(t)$ به ترتیب توابع وارهدگی و خزشی ویسکوالاستیک نامیده می‌شوند.

$$u_z(x, y, t) = \frac{(1-\nu)}{\pi} \int_0^t J(t-\tau) d\tau \left[\iint_{\Psi_m} \frac{p(\xi, \eta, \tau)}{r} d\xi d\eta \right] d\tau$$

$$= \frac{(1-\nu)}{\pi} \int_0^t J(t-\tau) \left[\iint_{\Psi_m} \frac{1}{r} \frac{dp(\xi, \eta, \tau)}{d\tau} d\xi d\eta \right] d\tau$$

$$= \delta(t) - |z|$$

در روش های کلاسیک تماس که قالب پیکره تماس مشخص فرض می شود، توزیع فشار تماس به صورت مجموعه ای از توابع بی نهایت توابع مشخص بیان می شود. سپس این سری از توابع مشخص با ارضای شرایط مرزی به صورت تقریبی کوتاه سازی می شدند. این روش ها به طور قطعی به دلیل به دست آوردن توزیع پیوسته تراکشن تماسی ایجاد خطای بالایی می کنند. با توسعه تکنولوژی رایانه های مدرن و محاسبات سریع این امکان فراهم گردیده است که با ارایه یک الگوریتم محاسباتی مناسب بتوان تراکشن را به جای توزیع پیوسته به صورت یک مجموعه گسسته سازی شده از المان های دلخواه جایگزین نمود و سپس شرایط مرزی را در یک تعداد نقاط گسسته سازی شده ارضا نمود. ساده ترین صورت بیان توزیع تراکشن نمایش به صورت یک آرایش نیروهای متمرکز عمودی و مماسی در سراسر ناحیه میانجی تماسی می باشد که در شکل ۲ نشان داده شده است. مشکل این بیان در شرایط تکین می باشد چرا که جابجایی های سطحی در نقاط اعمال بار متمرکز بی نهایت می شود. این مشکل را هم می توان با بیان توزیع تراکشن به صورت یکنواخت و تدریجی در ستون های مجاور یکدیگر برای هر المان گسسته سازی شده رویه میانجی تماسی بر طرف نمود شکل ۲. جابجایی های رویه میانجی تماسی در این حالت دیگر تکین نمی شود و در تمام المان ها دارای مقدار محدودی است. توزیع تراکشن نیز به طور کامل به واسطه مقادیر تراکشن المان های گسسته قابل تعیین می باشد. روش محاسباتی معکوس سازی ماتریسی به منظور تعیین مقادیر المان های تراکشن ویسکوالاستیک با ارضای مناسب شرایط مرزی و اولیه توسعه می یابد که در آن شرایط مرزی به صورت دقیق در نقاط گسسته مشخص (نقاط مرکزی المان های مرزی) ارضا می شوند. این روش توسط پائول و هاشمی

مساله بوسینسک را در پیکره های الاستیک با ضریب پواسون ν و در برگیرنده جابجایی نرمال نقطه فرضی (x, y) بر روی رویه ی نیم فضا می توان به صورت زیر بیان نمود [۵]:

$$u_z(x, y) = \frac{(1-\nu)}{2\pi\mu} \frac{p}{r} \quad (7)$$

بنحوی که

$$r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} \quad (8)$$

مطابق قضیه تناظر الاستیک - ویسکوالاستیک [۲-۴]، با تبدیل لاپلاس گیری از رابطه (۷) می توان نوشت:

$$\bar{u}_z(x, y, s) = \frac{(1-\nu)}{\pi r} s \bar{J}(s) \bar{p}(s) \quad (9)$$

که تابع خزشی فضای لاپلاسی را با رابطه زیر می توان به مدول وارهیدگی مرتبط ساخت [۲-۳]:

$$\bar{J}(s) = 1/s^2 \bar{G}(s) \quad (10)$$

با اعمال قضیه کانولوشن (convolution) [۲-۴] به رابطه لاپلاسی (۹) و تعمیم نتیجه به دست آمده برای در برگرفتن توزیع نیروی تماس داریم:

$$\bar{u}_z(x, y, s) = \frac{(1-\nu)}{\pi} J * d \left[\iint_{\Psi_m} \frac{p(\xi, \eta, \tau)}{r} d\xi d\eta \right] \quad (11)$$

که Ψ_m بیانگر ناحیه تماسی پیشینه می باشد که در هر گام زمانی همواره از ناحیه تماسی فعلی بایستی بزرگتر باشد. پیشینه میانجی تماسی در تشکیل ماتریس **B** الگوریتم عددی مورد استفاده قرار می گیرد. مساله برای پیکره های ویسکوالاستیک با اعمال شرایط مرزی به صورت زیر

که $z_i = z(x_i, y_i)$ ، $\delta^l = \delta(l d\tau)$ ، $p_k^j = p(x_k, y_k, j d\tau)$ نیز $n = n(t)$ تعداد المان‌های تماسی در زمان t را نشان می‌دهند. ضریب اثر B_{ik} که بیانگر جابجایی کلی در نقطه مختصاتی i المان هندسی در اثر فشار واحد تمرکز یافته در نقطه k است، نقش کلیدی در این الگوریتم محاسباتی دارد. این ضریب با استفاده از نتایج تئوری لایو (Love's theory) برای رویه مستطیلی یک نیم فضای الاستیک به صورت زیر محاسبه می‌شود [۲۶]:

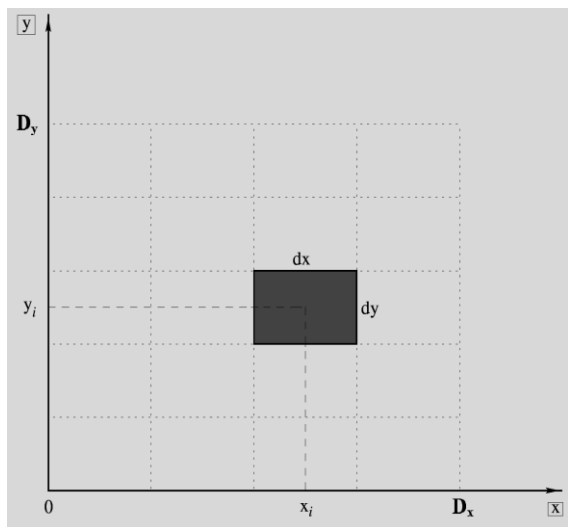
$$B_{ij} = \frac{(1-\nu)}{\pi} \int_{y_k-dy/2}^{y_k+dy/2} \int_{x_k-dx/2}^{x_k+dx/2} \frac{d\eta d\xi}{\sqrt{(y_i-\eta)^2 + (x_i-\xi)^2}} \quad (15)$$

بنابراین اکنون می‌توان معادله کلی فروروی ویسکوالاستیک (۱۴) را با استفاده از رابطه لایو به صورت محاسباتی نهایی زیر بیان نمود:

$$J(0) \sum_{k=1}^n B_{ik} p_k^l = \delta^l - z_i - q_i^{l-1} \quad (16)$$

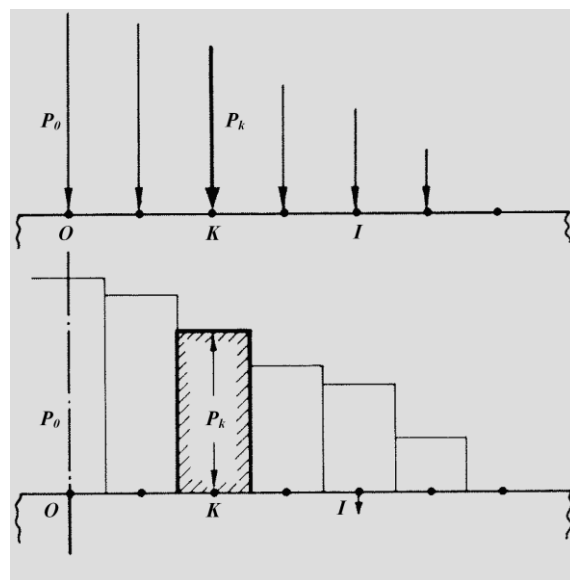
بنحوی که

$$q_i^{l-1} = \sum_{j=1}^{l-1} J([l-j]d\tau) \sum_{k=1}^n B_{ik} \left(\frac{p_k^j - p_k^{j-1}}{d\tau} \right) d\tau - J(0) \sum_{k=1}^n B_{ik} p_k^{l-1} \quad (17)$$



شکل ۳. طرح گسسته‌سازی هندسی رویه میانجی تماسی

[۲۴] و کالکر [۲۵] برای حل مسایل الاستواستاتیک غیرهرتزی و تماس عمودی تک سویه استفاده شده است و در هندبوک تماس جانسون [۵] برای جامدات الاستیک بیان شده است.



شکل ۲. طرح گسسته‌سازی المانی فشار تماسی

رویه نیم فضای به ابعاد $(D_x \times D_y)$ به تعداد $N = n_x n_y$ المان چهار ضلعی $(dy = D_y/n_y \times dx = D_x/n_x)$ گسسته سازی می‌شود. المان‌های چهار ضلعی با مراکز (x_i, y_i) در برگیرنده فشار یکنواختی تمرکز یافته در مرکز سطح خود در نظر گرفته می‌شوند، که در شکل ۳ نیز گسسته‌سازی رویه پیکره نشان داده شده است. به دلیل رفتار وابسته به زمان نیم فضای ویسکوالاستیک و در نتیجه پیکربندی تماسی، یک گسسته سازی زمانی به n_τ گام زمانی یکسان صورت می‌گیرد که در نتیجه داریم:

$$\tau = n_\tau d\tau \quad (13)$$

اکنون معادله فروروی تماسی (۱۲) را به فرم گسسته سازی شده زیر می‌توان بازنمایی نمود:

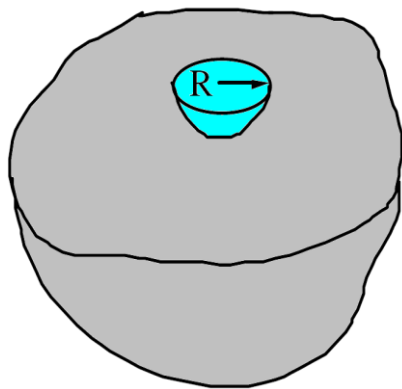
$$\sum_{j=1}^l J([l-j]d\tau) \sum_{k=1}^n B_{ik} \left(\frac{p_k^j - p_k^{j-1}}{d\tau} \right) d\tau = \delta^l - z_i \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (14)$$

نتایج و بحث

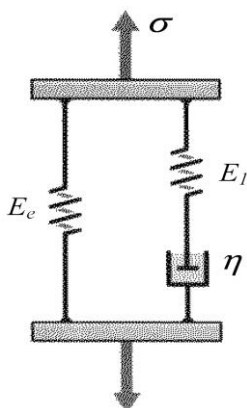
رهیافت حل محاسباتی ارایه شده با نتایج حل تحلیلی و آزمایشگاهی منابع [۱]، [۹]، [۱۸]، [۲۰] و [۲۷] نانو فروروی تماسی یک فرورونده کروی صلب به شعاع R عملگر بر رویه یک نیم فضای ویسکوالاستیک مقایسه می گردد شکل ۴. تاریخچه تنش ویسکوالاستیک این مدل سازی عددی در قالب یک مدل ماکسول تعمیم یافته [۲-۳] به صورت زیر بیان می گردد:

$$\sigma(t) = \varepsilon_0 [E_\infty + (E_1 - E_\infty) e^{-t/\tau}] \quad (19)$$

که در آن کرنش آنی اولیه، E_∞ مدول یانگ در حالت ایستایی، E_0 مدول یانگ آنی و τ زمان مشخصه می باشند. از این رو برای بیان رفتار متشکله ویسکوالاستیک نیم فضا از یک مدل جامد خطی استاندارد (SLS) استفاده شده است شکل ۵، که با توجه به این مدل مدول وارهیدگی و تابع پذیرش خزشی را می توان به ترتیب زیر نشان داد:



شکل ۴. مدل نانو فروروی یک فرورونده صلب کروی در نیم فضا



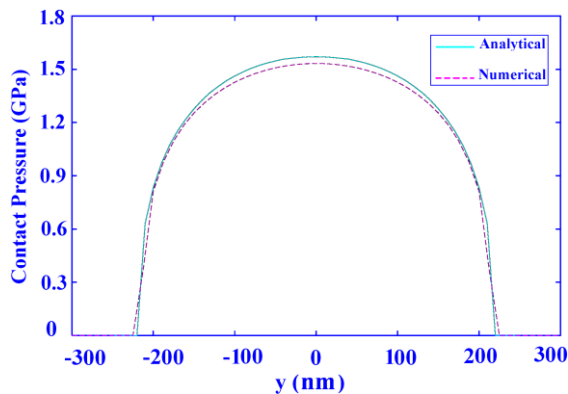
شکل ۵. طرح شماتیک مدل SLS

در این مدل محاسباتی بایستی به تفاوت عملکردی بین پارامترهای فشار تماسی p_k^j و p_k^{j-1} به دلیل متفاوت بودن تعداد المانهای تماسی برای j و $j-1$ دقت شود. در این نوع حل محاسباتی، ماتریس تأثیر \mathbf{B} ($n_m \times n_m$) و بردار ماتریس فشاری \mathbf{p} با بعد n_m با توجه به بیشینه تعداد المانهای رویه میانجی تماسی Ψ_m معرفی شده اند.

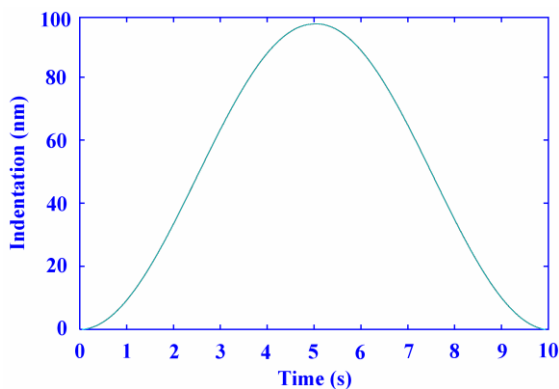
اکنون با استفاده از الگوریتم محاسباتی می توان فشار p_k^l را برای یک تاریخچه بارگذاری داده شده محاسبه نمود. بر طبق الگوریتم وارون سازی ماتریسی پس از حل معادلات ماتریسی (۱۶) و (۱۷)، برخی مقادیر بدست آمده p_k^l ممکن است منفی باشند که بایستی در تکرار بعدی این نقاط گسسته فشار تماسی از رویه میانجی تماسی فعلی حذف شوند و در نتیجه فشار در آن نقاط المانها برابر صفر در نظر گرفته می شود. هنگامی که در فرآیند حل محاسباتی فقط فشارهای مثبت تشخیص داده شوند بایستی تکرار فرآیند قطع گردد. در هر گام زمانی، تکرارها بایستی ادامه یابد تا به همگرایی رسید و سپس فرآیند در گام زمانی بعد تکرار می شود. در هر گام زمانی با کمتر از ۱۰ تکرار به مطلوب رسیده می شود که به معنی همگرایی سریع الگوریتم به فشارهای غیر منفی می باشد. لازم به تذکر است که اگر نفوذ δ^l مشخص باشد به معادله (۱۶) اعمال شود و با حل مستقیم معادله (۱۶) به وسیله معکوس سازی ماتریسی می توان n مجهول p_k^l را تعیین نمود. با این وجود در صورت لزوم می توان با افزودن معادله زیر به معادلات ماتریسی ذکر شده هم p_k^l و هم δ^l را برای یک تاریخچه نیروی تماس نرمال داده شده کل (F^l) بر روی فرورونده تعیین نمود که این معادله اضافی عبارت است از:

$$F^l = \sum_{k=1}^n p_k^j dx dy \quad (18)$$

با برنامه نویسی معادلات (۱۶) تا (۱۸) در قالب یک الگوریتم محاسباتی در نرم افزار مطلب (MATLAB)، یک مثال عددی برای فرورونده های کروی حل شده است.



شکل ۷. چگونگی توزیع فشار در ناحیه میانجی تماسی



شکل ۸. چگونگی فروروی یا نفوذ نسبت به زمان در سطح نیم فضا

در پایان شایان ذکر است که در مدل‌های تحلیل تماسی مسایل نانو فروروی، قوانین مکانیک محیط‌های پیوسته حاکم است و ابعاد مشخصه که در مکانیک محیط‌های شبه پیوسته در نظر گرفته می‌شوند در این نوع تحلیل‌های فروروی مورد استفاده قرار نمی‌گیرند [۲۷-۳۰].

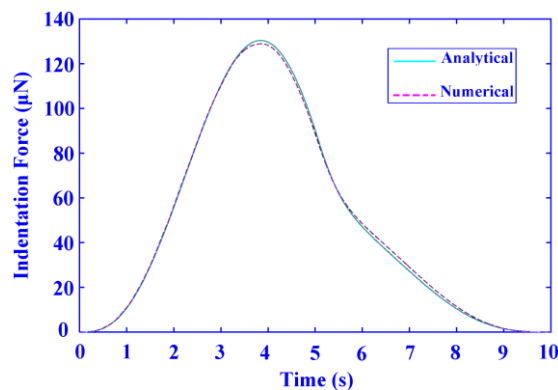
نتیجه‌گیری

نیروی تماسی وابسته به زمان، توزیع فشار و ناحیه تماس برای فروروی تماسی و به طور ویژه نانو فرورونده‌های کروی بر لایه نیم فضاها ویسکوالاستیک به دست آورده شد. استخراج روابط بین توزیع فشار تماسی، نیروی عامل بر فرورونده و میزان نفوذ در لایه نیم فضا هدف اصلی این مطالعه بوده است. رهیافت جدید قابلیت تخمین اثر ویسکوالاستیسیته سامانه‌های مکانیکی را در برهمکنش تماسی با یکدیگر به خوبی دارا می‌باشد. در سال‌های اخیر در پی گسترش نانو فناوری، تحلیل‌های نوین نانو فروروی جایگزین تحلیل مسایل کلاسیک فروروی تماسی شده

$$G(t) = E_{\infty} + (E_1 - E_{\infty})e^{-t/\tau} \quad (20)$$

$$J(t) = \frac{1}{E_{\infty}} - \left(\frac{E_1 - E_{\infty}}{E_1 E_{\infty}} \right) e^{(E_{\infty}/E_1)(-t/\tau)} \quad (21)$$

در این پژوهش، معادلات متشکله ویسکوالاستیک از جامد پلیمری پلی‌کربنات در نظر گرفته شده اند که در نتیجه آن، E_{∞} برابر $1/453$ گیگاپاسکال و $E_1 - E_{\infty}$ برابر $0/068$ گیگاپاسکال و زمان مشخصه τ برابر با 100 ثانیه می‌باشند [۱۷-۱۸]. همچنین شعاع تماس در نانو فرورونده‌های کروی مطابق منابع ذکر شده برابر $2.2 \sin(\pi t/T)$ در نظر گرفته شد که در آن T بیانگر کل زمان بارگذاری و برابر 10 ثانیه در نظر گرفته شده است. ارتباط میزان نفوذ نیز با شعاع تماس در حل تحلیلی [۲۰] می‌باشد. در فرآیند حل محاسباتی تعداد المان‌های هندسی n_x و n_y برابر 101 و تعداد المان‌های زمانی n_t برابر 201 در نظر گرفته شدند و D_x و D_y هم برابر 10 میکرومتر در نظر گرفته شده اند. شعاع فرورونده کروی هم برابر 5 میکرومتر در نظر گرفته شده است [۱]. مقایسه نتایج نیروهای تماسی بدست آمده از حل عددی با نتایج تحلیلی در شکل ۶ آورده شده است. اختلاف کم بین نتایج حل عددی و تحلیلی نشان دهنده دقت بسیار خوب فرآیند حل محاسباتی می‌باشد. همچنین می‌توان به تقارن نسبی منحنی ویسکوالاستیک در افزایش و کاهش بارگذاری توجه کرد. برای نمونه توزیع فشار $p(0, y, t)$ در لحظه زمانی $t = 5$ ثانیه در شکل ۷ نشان داده شده است. اختلاف پایین بین حل‌های عددی و تحلیلی در این نمودار هم بیانگر صحت رهیافت ارائه شده است. منحنی میزان نفوذ یا فروروی محاسبه شده با رهیافت عددی جدید نسبت به زمان هم در شکل ۸ نشان داده شده است.



شکل ۶. مجموع نیروهای فروروی وارد بر فرورونده نسبت به زمان

منابع

1. A. C. Fischer-Cripps, *Nanoindentation*, Springer-Verlag, Berlin, (2002).
2. R. M. Christensen, *Theory of Viscoelasticity*, Academic Press, New York, (1982).
3. W. N. Findley, J. S. Lai and K. Onaran, *Creep and relaxation of nonlinear viscoelastic materials*, North-Holland Publishing Company New York, (1976).
4. R. S. Lakes, *Viscoelastic solids*, CRC Press, Boca Raton, (1999).
5. K. L. Johnson, *Contact Mechanics*, Cambridge University Press, Cambridge, (1985).
6. I. N. Sneddon, *The relation between load and penetration in the axisymmetric boussinesq problem for a punch of arbitrary profile*, International Journal of Engineering Science, 3(1965)47-57.
7. E. H. Lee and J. R. M. Radok, *The contact problem for viscoelastic bodies*, ASME Journal of Applied Physics, 85(1999)1460-1474.
8. T. C. T. Ting, *The contact stresses between a rigid indenter and a viscoelastic half-space*, Journal of Applied Mechanics, 33(1966)845-854.
9. T. C. T. Ting, *Contact problem in the linear theory of viscoelasticity*, ASME Journal of Applied Mechanics, 35(1968)284-254.
10. W. H. Yang, *The contact problem for viscoelastic bodies*, ASME Journal of Applied Mechanics, 33(1966)395-401.
11. G. R. Naghieh, Z. M. Jin and H. Rahnejat, *Contact characteristics of viscoelastic bonded layers*, Applied Mathematical Modelling, 22(1998)569-581.
12. G. Haiat, M. C. Phan Huy and E. Barthel, *The adhesive contact of viscoelastic spheres*, Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 51(2003)69-99.
13. G. Fu, *A Theoretical study of complete contact indentation of viscoelastic materials*, Journal of Materials Science, 39(2004)2877-78.
14. P.-L. Larsson, A. E. Giannakopoulos, E. Soderlund, D. J. Rowcliffe and R. Vestergaard, *Analysis of berkovich indentation*, International Journal of Solids and Structures, 33(1996)221-248.
15. M. Vandame and F. J. Ulm, *Viscoelastic solutions for conical indentation*, International Journal of Solids and Structures, 43(2006)3142-3165.
16. A. Gauthier, P. A. Knight and S. McKee, *The hertz contact problem. coupled volterra integral equations and a linear complementarity problem*, Journal of Computational and Applied Mathematics, 206(2007)322-340.
17. H. Lu, B. Wang, J. Ma, G. Huang and H. Viswanathan, *measurement of creep compliance of solid polymers by nanoindentation*, Mechanics of Time-Dependent Materials, 7(2003)189-207.
18. G. Huang and H. Lu, *Measurements of young's relaxation modulus using nanoindentation*, Mechanics of Time-Dependent Materials, 10(2006)229-243.
19. A. E. Giannakopoulos, *Elastic and viscoelastic indentation of flat surfaces by pyramid indentors*, Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 54(2006)1305-1332.
20. L. Cheng, X. Xia, L. E. Scriven and W. W. Gerberich, *Spherical-tip indentation of viscoelastic material*, Mechanics of Materials, 37(2005)213-226.
21. L. E. Malvern, *Introduction to the mechanics of continuous medium*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, (1969).
22. G. T. Mase and G. E. Mase, *Continuum Mechanics for Engineers*, CRC Press, New York, (1999).

است. روش نوین نانو فروروی تماسی خود را به عنوان یک روش قدرتمند برای اندازه‌گیری خصوصیات مکانیکی جامدات ویسکوالاستیک پلیمری و به ویژه فیلم‌ها و پوشش‌های نازک پلیمری ثابت نموده است و استفاده از رهیافت‌های حل عددی برای کمک به استخراج این خواص بسیار سودمند واقع شده است [۳۰]. معرفی اصطکاک به عنوان یک پارامتر برگشت ناپذیر در میانجی رویه‌های سیستم‌های برهمکنشی که این نوع مسایل تماسی را پیچیده‌تر نیز می‌سازد، می‌تواند در پژوهش‌های آینده مورد نظر قرار گیرد.

23. E. H. Lee and T. G. Rogers, *Solution of viscoelastic stress analysis problems using the measured creep or relaxation functions*, ASME Journal of Applied Mechanics, 30(1963)127–133.
24. B. Paul and J. Hashemi, *Contact pressure on closely conforming elastic bodies*, ASME Journal of Applied Mechanics, 48 (1981)543–556.
25. J. J. Kalker, *Two algorithms for the contact problems in the elastostatics*, Report 82-86, Department of Mathematics and Informatics, Delft University of Technology; 1982.
26. P. G. Ciarlet, *Mathematical elasticity: three-dimensional elasticity*, Elsevier Publications, London, (2005).
27. Y. T. Cheng and C. M. Cheng, *General relationship between contact stiffness, contact depth, and mechanical properties for indentation in linear viscoelastic solids using axisymmetric indenters of arbitrary profiles*, Applied Physics Letters, 87(2005)111914.
28. W. K. Liu, E. G. Karpov and H. S. Park, *Nano mechanics and materials*, John Wiley and Sons, London, (2006).
29. Z.-Q. Feng, M. Zei and P. Joli, *An elasto-plastic contact model applied to nanoindentation*, Computational Materials Science, 38(2007)807–813.
30. J. A. Knapp D. M. Follstaedt S. M. Myers and T. A. Friedmann, *Finite element modeling of nanoindentation*, Journal of Applied Physics, 85(1999)1460-1474.