مجله علوم آماری، پاییز و زمستان ۱۳۸۶
جلد ۱، شماره ۲، ص ۱۷۱–۱۸۹

مدلسازی مکان زلزله‌های زاگرس با مدل کاکس فضایی

محمد قاسم وحیدی‌اصل، عبداله حسنی جلیلیان
گروه آمار، دانشگاه شهید بهشتی

تاریخ دریافت: ۱۳۸۶/۸/۱۹ تاریخ آخرین بازنگری: ۱۳۸۶/۱۲/۲۵

چکیده : در این مقاله، ابتدا فرایندهای نقطه‌ای فضایی و برخی مشخصه‌های آن‌ها به اختصار معرفی می‌شود. سپس با تعریف فرایندهای کاکس فضایی در حالت کلی، یک زیر رده‌ی خاص آن‌ها؛ یعنی فرایندهای کاکس نوفه‌ی شلیک، مورد بررسی قرار می‌گیرد. سرانجام یک مدل توماس به داده‌های مکان زلزله‌های زاگرس برازش داده می‌شود.

واژه‌های کلیدی : فرایند نقطه‌ای فضایی، فرایند پواسون، فرایند کاکس، فرایند توماس، تابع شدت، تابع همبستگی زوجی، تابع Kی ریپلی، زلزله‌های زاگرس.

۱ مقدمه

زلزله عبارت است از لرزش زمین در اثر آزاد شدن سریع انرژی که اغلب در اثر لغزش در امتداد یک گسل در پوسته‌ی زمین اتفاق می‌افتد. انرژی آزاد شده از محل آزاد شدن آن، که کانون زلزله نامیده می‌شود، به‌صورت موج‌هایی در همه‌ی جهت‌ها منتشر می‌شود. با وجود تلاش گسترده‌ی دانشمندان علم زلزله‌شناسی و مهندسی

آدرس الکترونیک مسئول مقاله: محمد قاسم وحیدی‌اصل، m-vahidi@sbu.ac.ir °

زلزله، که با هدف ارائه‌ی راهکارهای علمی به منظور کاهش خسارت‌های ناشی از زلزله و نیز شناخت این پدیده انجام گرفته و می‌پذیرد، ولی هنوز ناشناخته‌های بسیاری در مورد زلزله برای بشر باقی مانده است (IIEES[۱]).

دو رویکرد در مدلسازی فرایند رخداد زلزله‌ها در یک ناحیه‌ی جغرافیایی مشخص وجود دارد: رویکرد تعیینی که سعی در بیان چگونگی رخداد فیزیکی زلزله دارد و رویکرد احتمالاتی که هدف آن تعیین احتمال (مخاطره[۲]) رخداد زلزله‌های آینده است. در رویکرد احتمالاتی، زلزله یک پدیده‌ی تصادفی تلقی می‌شود که از یک قانون (توزیع) احتمال نامعلوم تبعیت می‌کند. با مشخص کردن این قانون می‌توان مخاطره‌ی رخداد زلزله‌های آینده را برای هر نقطه از ناحیه‌ی مورد بررسی تعیین کرد. در این‌جا نیز برای تهیه‌ی یک نقشه‌ی مخاطره‌ی زلزله دو رویکرد اساساً متفاوت وجود دارد: رویکرد اول مبنا را گسل‌های شناخته شده در ناحیه قرار می‌دهد در صورتی‌که در رویکرد دوم از اطلاعات موجود زلزله‌های پیشین ناحیه‌ی مورد بررسی استفاده می‌کند.

مطالعات آماری زیادی برای مدلسازی احتمالاتی بزرگای زلزله‌ها (قانون گوتنبرگ-ریشتر[۳])، زمان زلزله‌ها (قانون آموری[۴]) و مکان زلزله‌ها (قانون توانی[۵]) انجام شده است و که در آن‌ها از فرایندهای نقطه‌ای (نشاندار) زمانی، فضایی و زمانی-فضایی، به ویژه مدل شناخته شده‌ی ETAS[۶]، استفاده می‌شود (اوگاتا، ۱۹۸۸ و ژوانگ، ۲۰۰۶). این مدل‌ها به رفتار خوشه‌ای زلزله‌ها توجه دارند و بر مبنای رویکرد اول تبیین شده‌اند؛ یعنی، تنها از اطلاعات زلزله‌های گذشته استفاده می‌کنند و اطلاعات مربوط به گسل‌های شناخته شده‌ی ناحیه‌ی مورد بررسی در آن‌ها به کار گرفته نمی‌شود.

---

۱ International Institute of Earthquake Engineering and Seismology
۲ Risk
۳ Gutenberg-Ricsher Law
۴ Omori Law
۵ Power Law
۶ Epidemic Type Aftershock Sequence

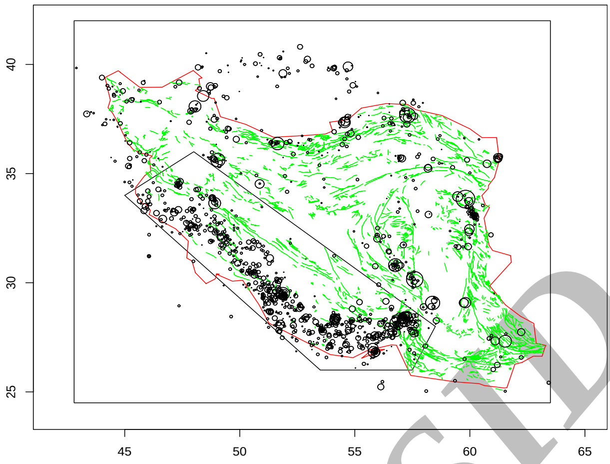
در این مقاله، با صرف نظر کردن از مؤلفه‌های مهم زمان و بزرگا، تنها مکان زلزله‌ها را در نظر گرفته و به کمک یک مدل توماس ناهمگن، سعی می‌شود الگوی نقطه‌ای مکان زلزله‌های بزرگ و سطحی ناحیه‌ی زاگرس (با بزرگای بیشتر از ۴ و عمق کمتر از ۱۰۰ کیلومتر) با استفاده از فرایندهای نقطه‌ای فضایی مدلسازی شود. در مدل ارائه شده، هم از اطلاعات زلزله‌های پیشین و هم از اطلاعات گسل‌های شناخته شده‌ی ناحیه‌ی زاگرس استفاده می‌شود. مسئله در بخش ۲ مطرح و فرایندهای نقطه‌ای فضایی در بخش ۳ به اختصار معرفی می‌شوند. سپس دو مدل مهم فرایندهای نقطه‌ای؛ یعنی مدل پواسون و کاکس، در بخش‌های ۴ و ۵ معرفی می‌شوند. در بخش ۶، یک مدل توماس ناهمگن به داده‌های زلزله‌های ایران برازش داده می‌شود. در این مقاله از ذکر برخی جزئیات صرفه نظر شده و تکیه بر ایده‌های اصلی است.

۲ زلزله‌های زاگرس

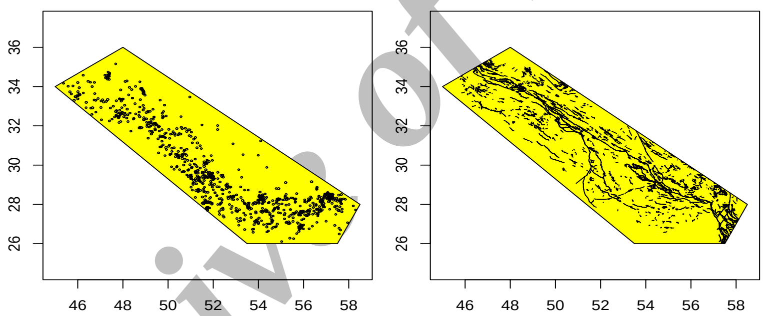
با توجه به قرار گرفتن ایران در کمربند زلزله‌خیز آلپ-هیمالیا، زلزله‌ها به عنوان مخرب‌ترین حادثه‌ی طبیعی، عامل تلفات بشری و خسارت‌های اقتصادی-اجتماعی قابل توجه در کشور محسوب می‌شوند. به ویژه‌ی نوار زاگرس به دلیل فشار صفحه‌ی عربستان به صفحه‌ی ایران مرکزی، از لحاظ فعالیت‌های لرزه‌ای یکی از ناحیه‌های فعال و مورد توجه است (IIEES).

شکل ۱ مکان ۱۴۲۳ زلزله (بر حسب درجه) با بزرگای بیشتر از ۴ و عمق کمتر از ۱۰۰ کیلومتر را که در دوره‌ی زمانی ۱۹۸۰/۱/۱ تا ۲۰۰۷/۱۰/۱۰ در کشور ایران رخ داده‌اند نشان می‌دهد. ناحیه‌ی پنج‌ضلعی W با مختصات رأس‌های (۴۵,۳۴)، (۵۳/۵,۲۶)، (۵۷/۵,۲۶)، (۵۸/۵,۲۸) و (۴۷,۳۶) که نوار زاگرس در آن محاط است برای بررسی بیشتر انتخاب شده است.

علاوه بر الگوی نقطه‌ای مکان زلزله‌ها، x_W، که شامل مکان **۸۷۹** زلزله است، اطلاعات مربوط به گسل‌های شناخته شده‌ی منطقه نیز در دست است (شکل ۲). فرض کنید برای هر $u \in W$، $d(u)$ فاصله‌ی نقطه‌ی u تا نزدیک‌ترین گسل به آن



شکل ۱: مکان زلزله‌های با بزرگای بیشتر از ۴.



شکل ۲: موقعیت گسل‌ها و مکان زلزله‌های زاگرس.

باشد. با توجه به این داده‌ها، به نظر می‌رسد که

- احتمال وقوع زلزله‌ها در نزدیکی گسل‌ها بیشتر است؛ به عبارت دیگر، بین x_W، و $d = (d(u) : u \in W)$ رابطه‌ای وجود دارد،

- الگوی نقطه‌ای x_W یک الگوی خوشه‌ای است؛ یعنی زلزله‌ها میل به انبوهش بر گرد نقاط خاصی دارند. این امر به این دلیل است که زلزله‌های بزرگ (نقاط والد) پس‌لرزه‌هایی (نقاط فرزند) دارند.

بنابراین، مدل آماری‌یی که برای مشاهده‌ی x_W در نظر گرفته می‌شود باید رفتار

خوشه‌ای نقاط را توصیف کند و وابستگی به متغیر (میدان) کمکی d نیز در آن لحاظ شود. علاوه بر این‌ها، این مدل حتی‌المقدور باید ساده، ممسک و به خوبی قابل تفسیر باشد.

۳ فرایندهای نقطه‌ای فضایی

در زمینه‌های علمی مانند جنگلداری، ستاره‌شناسی، همه‌گیر شناسی و ... مواردی پیش می‌آید که داده‌های گردآوری شده از یک آزمایش یا پدیده‌ی تصادفی به شکل یک پیکربندی[۷] از نقاط در یک مجموعه‌ی معین می‌باشند. چنین داده هایی الگوی نقطه‌ای نامیده می‌شوند. اغلب نقاط الگوهای نقطه‌ای بیانگر مکان یا مرکز اشیاء در یک ناحیه‌ی دو (یا چند) بعدی هستند. برای مدلسازی احتمالاتی الگوهای نقطه‌ای و استنباط آماری در مورد پدیده‌ی مورد بررسی، لازم است الگوهای نقطه‌ای تحققی از یک عنصر تصادفی تلقی شود و برای این عنصر تصادفی خانواده‌ای معقول از توزیع‌های ممکن در نظر گرفته شود. سپس بر اساس داده‌ها (الگوی نقطه‌ای مشاهده شده) و مدل آماری مفروض، استنباط آماری راجع به پدیده‌ی مورد بررسی را پیش برد. با این تفاسیر می‌توان گفت: «از فرایندهای نقطه‌ای (فضایی) برای مدلسازی الگوهای نقطه‌ای (فضایی) استفاده می‌شود».

برای تعریف دقیق، لازم است مسئله را قدری صوری کنیم. فرض کنید $S \subset \mathbb{R}^2$ ناحیه‌ی مورد بررسی، $\mathcal{B}$ سیگمامیدان بورل S، $\mathcal{B}_0$ حلقه‌ی زیرمجموعه‌های بورل و کراندار S و λ اندازه‌ی لبگ بر $\mathbb{R}^2$ باشد. $x \subset S$ یک الگوی نقطه‌ای در S است هرگاه x یک زیرمجموعه‌ی متناهی موضعی S باشد؛ یعنی، برای هر $B \in \mathcal{B}_0$، مجموعه‌ی $x \cap B$ متناهی باشد. مجموعه‌ی همه‌ی الگوهای نقطه‌ای در S (فضای مشاهدات) با نماد N_{lf} نشان داده می‌شود و سیگمامیدان مناسب $\mathcal{N}_{\mathrm{lf}}$ را می‌توان روی آن تعریف کرد (مولر و واگه‌پی‌ترسِن، ۲۰۰۴). در این مقاله الگوهای نقطه‌ای را با نماد x، y،... و نقاط S را با نماد u، v،... نشان می‌دهیم.

---

[۷] Configuration

با در نظر گرفتن فضای احتمال زمینه‌ای $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$، عنصر تصادفی $X : (\Omega, \mathcal{F}) \to (N_{\mathrm{lf}}, \mathcal{N}_{\mathrm{lf}})$ یک فرایند نقطه‌ای بر S، اندازه‌ی احتمال القا شده‌ی $P_X = \mathbb{P} \circ X^{-1}$ را توزیع آن و اندازه‌ی $N(B) = |X \cap B|$ بر $\mathcal{B}$، که تعداد نقاط X را در هر مجموعه‌ی بورل B معین می‌کند، تابع شمارش فرایند نقطه‌ای X می‌گویند. برای مشخص‌سازی P_X، مشخصه‌هایی مانند تابع احتمال پوچی، تابعک مولد احتمال، تابعک لاپلاس، اندازه‌های کمبل و کمبل فروکاسته، توزیع‌های پالم و پالم فروکاسته تعریف شده است (دیلی و وِرجونْز، ۲۰۰۳).

برای فرایند نقطه‌ای X بر S و $k \in \mathbb{N}$، اندازه‌ی گشتاور فاکتوریلی مرتبه‌ی k-ام X برای هر $D \in \mathcal{B}^k$ ($\mathcal{B}^k$ سیگمامیدان بورل بر S^k است) به‌صورت

$$\alpha^{(k)}(D) = \mathbb{E}\left[\sum_{u_1,\ldots,u_k \in X}^{\neq} 1[(u_1,\ldots,u_k) \in D]\right]$$

تعریف می‌شود، که در آن $1[\cdot]$ تابع نشانگر یک گزاره است و نماد $\sum^{\neq}$ به این معنی است که عامل‌های مجموع دو به دو متمایزند. می‌توان نشان داد که $\alpha^{(k)}$ یک اندازه بر $(S^k, \mathcal{B}^k)$ است (دیلی و وِرجونْز، ۲۰۰۳). در این‌جا فرض می‌کنیم $\alpha^{(k)} \ll \lambda^k$ (λ^k اندازه‌ی لبگ بر $\mathbb{R}^{2k}$ است)، و $\rho^{(k)} = \frac{d\alpha^{(k)}}{d\lambda^k}$ را تابع چگالی حاصلضربی مرتبه‌ی k-ام X می‌گوییم. به‌طور شهودی، اگر $u_1, \ldots, u_k$ نقاط متمایزی در S و $du_1, \ldots, du_k$ همسایگی‌های بسیار کوچکی از آن‌ها باشند آن‌گاه $\rho(u_1,\ldots,u_k)$ با احتمال آن که X در هر کدام از همسایگی‌های $du_1, \ldots, du_k$ دست کم یک نقطه داشته باشد تقریباً متناسب است؛ یعنی،

$$\rho^{(k)}(u_1,\ldots,u_k)\lambda(du_1)\cdots\lambda(du_k) \approx \mathbb{P}\Big\{N(du_1) > 0, \ldots, N(du_k) > 0\Big\}.$$

به ویژه تابع چگالی حاصلضربی مرتبه‌ی اول $\rho = \rho^{(1)}$ را تابع شدت X و تابع چگالی حاصلضربی مرتبه‌ی دوم نرمالیده‌ی

$$g(u,v) = \frac{\rho^{(2)}(u,v)}{\rho(u)\rho(v)} \; ; \; u,v \in S \qquad (1)$$

را تابع همبستگی زوجی X می‌نامند (مولر، ۲۰۰۶). تابع‌های چگالی حاصلضربی مرتبه‌های بالاتر به دلیل پیچیدگی کمتر مورد توجه‌اند.

با توجه به تعبیر شهودی تابع های چگالی حاصلضربی، تابع شدت بیانگر روند فرایند بر S و تابع همبستگی زوجی g بیانگر ساختار همبستگی و اثر متقابل بین نقطه‌ای فرایند است. به عنوان مثال $g(u,v) \approx ۱$ را می‌توان چنین تعبیر کرد که بین نقطه‌ای از X که در همسایگی کوچکی از u قرار دارد با نقطه‌ای از X که در همسایگی کوچکی از v قرار دارد اثر متقابلی وجود ندارد. به طریق مشابه می‌توان گفت اگر $g(u,v) > ۱$، اثر متقابل نقطه‌ای از X که در نزدیکی u است با نقطه‌ای از X که در نزدیکی v است از نوع جذبی[۸] است و اگر $g(u,v) < ۱$، این اثر متقابل از نوع دفعی[۹] است (مولر، ۲۰۰۶). به عنوان دو حالت کرانگین، اگر برای تقریباً همه‌ی (u,v)ها در $S^۲$، $g(u,v) > ۱$، نقاط تحقق‌های فرایندهای نقطه‌ای مربوط انبوهیده و یک الگوی نقطه‌ای خوشه‌ای را تشکیل می‌دهند و اگر برای تقریباً همه‌ی (u,v)ها در $S^۲$، $g(u,v) < ۱$، نقاط تحقق‌های فرایندهای نقطه‌ای یکدیگر را دفع می‌کنند و یک الگوی نقطه‌ای منظم را تشکیل می‌دهند.

دو فرض مانایی و همسانگردی در تحلیل آماری فرایندهای نقطه‌ای و ساده‌سازی مسائل فرایندهای نقطه‌ای از جنبه‌ی احتمالاتی نقش بسیار مهمی دارند. فرایند نقطه‌ای X بر $S = \mathbb{R}^۲$ را مانا گویند هرگاه برای هر $u \in S$، $X + u \stackrel{d}{=} X$؛ یعنی توزیع X نسبت به انتقال ناوردا باشد، و همسانگرد گویند هرگاه برای هر دوران $\mathcal{O}$ حول مبداء، $\mathcal{O}X \stackrel{d}{=} X$؛ یعنی توزیع X نسبت به دوران حول مبداء ناوردا باشد. اگر X یک فرایند نقطه‌ای مانا باشد، برای هر u و v در S، $\rho(u) = \rho_۰$ و $g(u,v) = g_۰(u-v)$. به علاوه اگر X همسانگرد نیز باشد آن‌گاه $g(u,v) = g_۰(\|u-v\|)$ (مولر و واگه‌پی‌ترسن، ۲۰۰۴).

فرایند نقطه‌ای X با تابع شدت ρ مانای شدت بازْموزون مرتبه‌ی دوم است اگر اندازه‌ی

$$\mathcal{K}(B) = \frac{۱}{\lambda(A)}\mathbb{E}\left[\sum_{u,v\in X}^{\neq} \frac{1[u \in A, v-u \in B]}{\rho(u)\rho(v)}\right] \; ; \; B \in \mathcal{B} \qquad (۲)$$

---

[۸] Attractive

[۹] Repulsive

به انتخاب $A \in \mathcal{B}$، که $\infty > \lambda(A) > 0$، بستگی نداشته باشد. $\mathcal{K}$ را اندازه‌ی گشتاوری فروکاسته‌ی مرتبه‌ی دوم می‌نامند. یک فرایند مانا، مانای شدت بازْموزون است اما عکس مطلب برقرار نیست. می‌توان نشان داد که اگر g نسبت به انتقال ناوردا باشد؛ یعنی $g(u,v) = g_0(u-v)$، آن‌گاه X مانای شدت بازْموزون مرتبه‌ی دوم است، $\mathcal{K} \ll \lambda$ و $g = \frac{d\mathcal{K}}{d\lambda}$؛ یعنی g چگالی $\mathcal{K}$ نسبت به λ است (مولر و واگه‌پی‌ترسِن، ۲۰۰۴).

برای فرایند نقطه‌ای مانای شدت بازْموزون مرتبه‌ی دوم X با اندازه‌ی گشتاوری فروکاسته‌ی $\mathcal{K}$، تابع Kی ریپلی به‌صورت $K(r) = \mathcal{K}(b(0,r))$، $r > 0$، تعریف می‌شود که در آن $b(0,r)$ گوی باز به مرکز مبداء و شعاع r می‌باشد. در حالتی که تابع همبستگی زوجی g نسبت به انتقال ناورداست

$$K(r) = \int_{b(0,r)} g(u)\lambda(du)\ ;\ r > 0, \tag{۳}$$

و لذا g و K یکدیگر را مشخص‌سازی می‌کنند. به ویژه اگر g همسانگرد باشد؛یعنی $g(u) = g(\|u\|)$، آن‌گاه $K(r) = 2\pi \int_0^r tg(t)dt$ (مولر و واگه‌پی‌ترسِن، ۲۰۰۴).

تابع Kی ریپلی از این جهت در تحلیل آماری فرایندهای نقطه‌ای اهمیت دارد که بنابر (۲)، اگر $\hat{\rho}$ یک برآورد تابع شدت ρ بر اساس الگوی نقطه‌ای مشاهده شده‌ی x_W باشد، آن‌گاه

$$\hat{K}(r) = \sum_{u,v \in x_W}^{\neq} \frac{1[\|u-v\| < r]}{\hat{\rho}(u)\hat{\rho}(v)} e_{u,v} \tag{۴}$$

یک برآورد برای تابع Kی ریپلی است، که در آن $W_u = \{u+v : v \in W\}$ و $e_{u,v} = \frac{1}{\lambda(W \cap W_{u-v})}$ عامل تصحیح[۱۰] است، در صورتی که برای برآورد g، علاوه بر $\hat{\rho}$، $\rho^{(2)}$ نیز باید برآورد شود که چگونگی آن روشن نیست. با این حال اگر $\hat{K}$ یک برآورد از تابع Kی ریپلی و g همسانگرد باشد، چون $K(r) = 2\pi \int_0^r tg(t)dt$، با فرض پیوستگی g، g را می‌توان با $\hat{g}(r) = \frac{1}{2\pi r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\hat{K}(r)$ برآورد کرد. در عوض چون K یک تابع تجمعی است، g تعبیر شهودی روشنی دارد و تفسیر نمودار آن ساده‌تر است (مقایسه کنید با تفسیر تابع چگالی و تابع توزیع متغیرهای تصادفی مطلقاً

[۱۰] Correction Factor

پیوسته). به هر روی، مؤلفین نظرهای متفاوتی در مورد استفاده از دو تابع معادل g و K دارند. لازم به ذکر است که اندازه‌ی $\mathcal{K}$ (و در نتیجه تابع‌های g و K) توزیع X را مشخص‌سازی نمی‌کند؛ یعنی دو فرایند نقطه‌ای ناهم‌توزیع، ممکن است اندازه‌ی گشتاوری فروکاسته‌ی مرتبه‌ی دوم یکسانی داشته باشند (مولر و واگه‌پی‌ترسن، ۲۰۰۴).

۴ فرایند پواسون

فرض کنید X یک فرایند نقطه‌ای بر S و ρ یک تابع انتگرال‌پذیر موضعی باشد، یعنی برای هر $B \in \mathcal{B}_0$، $\mu(B) = \int_B \rho(u)\lambda(du) < \infty$. هرگاه

- برای هر $B \in \mathcal{B}$، $N(B)$ یک متغیر تصادفی پواسون با میانگین $\mu(B)$ باشد،
- برای هر $n \in \mathbb{N}$ و هر $B_1, \ldots, B_n$ مجزا در $\mathcal{B}$، $N(B_1), \ldots, N(B_n)$ متغیرهای تصادفی مستقلی باشند،

X را یک فرایند پواسون با تابع شدت ρ می‌گویند و آن را با نماد $X \sim \mathrm{Poisson}(S, \rho)$ نشان می‌دهند. می‌توان نشان داد که هر کدام از دو شرط بالا به تنهایی فرایند پواسون را مشخص‌سازی می‌کنند (دیلی و ورجونز، ۲۰۰۳). به ویژه به خاطر شرط دوم، فرایند پواسون را مدلی برای تصادفی بودن کامل فضایی می‌گویند؛ یعنی مدل پواسون برای مدلسازی پدیده‌هایی که نقاط آن ها مستقل از یکدیگر در S توزیع شده‌اند و اثر متقابلی بین آن‌ها وجود ندارد مناسب است.

فرایند پواسون از لحاظ احتمالاتی نیز بسیار انعطاف‌پذیر است. اگر $\rho(u) \equiv \rho_0$، X را یک فرایند پواسون همگن با شدت یا نرخ ρ_0 می‌گویند. فرایند پواسون همگن، مانا و همسانگرد است. اگر $X \sim \mathrm{Poisson}(S, \rho)$، آن‌گاه X یک فرایند مانای شدت بازْموزون است و $g(u, v) \equiv 1$ (ویژگی تصادفی‌بودن کامل فضایی) و $K(r) = \pi r^2$ (مولر و واگه‌پی‌ترسن، ۲۰۰۴).

۵ فرایند کاکس

در بسیاری از پدیده‌های طبیعی که با فرایندهای نقطه‌ای مدلسازی می‌شوند، می‌دانیم که نقاط فرایند با یکدیگر اثر متقابل دارند و تحققهای آن‌ها به شکل الگوهای نقطه‌ای خوشه‌ای یا منظم هستند. به عنوان مثال در نظر گرفتن مدل پواسون برای الگوی نقطه‌ای مکان درختان در یک جنگل طبیعی مناسب نیست زیرا به دلیل ساز و کار تکثیر دانه‌ها توسط درختان و توزیع آن‌ها در اطرافشان، اثر متقابل بین نقاط از نوع جذبی است و الگوی نقطه‌ای مکان درختان خوشه‌ای است. لذا فرایند پواسون برای بسیاری از کاربردها مدل بسیار ساده‌ای است اما می‌توان با تعمیم آن، فرایندهای نقطه‌ای دیگری را تعریف کرد که ساز و کارهای مشهود الگوی نقطه‌ای مورد مطالعه (مانند ساز و کار تکثیر دانه در جنگل که منجر به خوشه‌ای شدن الگوی نقطه‌ای مکان درختان شده است) را توصیف کنند.

طبیعی‌ترین تعمیم فرایند پواسون حالتی است که تابع شدت آن تصادفی باشد. فرض کنید $Z = (Z(u) : u \in S)$ یک میدان تصادفی نامنفی بر S باشد که تقریباً به‌طور حتم انتگرال‌پذیر موضعی است؛ یعنی برای هر $B \in \mathcal{B}_\circ$، با احتمال یک $M(B) = \int_B Z(\xi)\lambda(d\xi) < \infty$. فرایند نقطه‌ای X بر S را یک فرایند کاکس با میدان هادی Z گویند هرگاه $X|Z \sim \text{Poisson}(S, Z)$.

در واقع تعریف فرایند کاکس از کاربردها سرچشمه گرفته است و تابع شدت تصادفی Z تفسیر خاصی دارد. فرض کنید می‌دانیم فرایند نقطه‌ای مورد بررسی X با میدان تصادفی نامنفی Z (یا یک تبدیل از آن) «رابطه» دارد. یک مدلسازی از این رابطه می‌تواند به‌صورت $X|Z \sim \text{Poisson}(S, Z)$ باشد (این مدلسازی همان‌قدر طبیعی است که مدلسازی رابطه‌ی بردار تصادفی Y و ماتریس تصادفی X با مدل $Y|Z \sim \text{N}(Z, \sigma^2)$، که $Z = X\beta$). به عبارت دیگر برای داده‌های (X, Z)، مدل $X|Z \sim \text{Poisson}(S, Z)$ را درنظر گرفته‌ایم اما Z یک فرایند پنهان[۱۱] است؛ یعنی تحققهای آن غیر قابل مشاهده‌اند، یا از منظری دیگر، Z مشاهده نشده و با مسئله‌ی داده‌های گمشده[۱۲] رو به رو هستیم. در هر صورت X یک فرایند کاکس با میدان

[۱۱] Latent Process

[۱۲] Missing Data

هادی Z است. بنابراین در فرایند کاکس، تابع شدت تصادفی Z فرایند پنهان یا داده‌ی گمشده‌ای است که بر X تأثیر می‌گذارد.

رده‌ی فرایندهای کاکس توسیعی از رده‌ی فرایندهای پواسون است زیرا اگر Z بر S ثابت باشد، X یک فرایند پواسون است. در واقع رده‌ی فرایندهای کاکس، رده‌ی بسیار بزرگ و متنوعی از فرایندهای نقطه‌ای را فراهم می‌آورد اما دو زیر رده‌ی مهم فرایندهای کاکس لگ-گاوسی و فرایندهای کاکس نوفه‌ی شلیک بیشتر از سایر انواع فرایندهای کاکس مورد توجه‌اند (مولر، ۲۰۰۶). در این مقاله تنها فرایندهای کاکس نوفه‌ی شلیک را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

فرض کنید $\Phi \sim \text{Poisson}(S \times \mathbb{R}^+, \zeta)$ و k چگالی یک اندازه‌ی احتمال بر $(S, \mathcal{B})$ باشد. فرایند کاکس با میدان هادی

$$Z(u) = \sum_{(c,\gamma)\in\Phi} \gamma k(c-u)\ ;\ u \in S \qquad (۵)$$

را یک فرایند کاکس نوفه‌ی شلیک با فرایند مادر Φ و چگالی تغییر وضعیت k می‌نامند. میدان تصادفی (۵) یک هموارسازی تصادفی از نقاط c توسط چگالی k و با وزن‌های γ است که نقاط و وزن‌های (c,γ) توسط فرایند پواسون پنهان Φ تولید می‌شوند. در واقع فرایند کاکس نوفه‌ی شلیک حالت خاصی از فرایند پواسون خوشه‌ای است: می‌توان نشان داد که X حاصل اجتماع (در نوشتگان فرایندهای نقطه‌ای از اصطلاح برهم‌نهی[۱۳] استفاده می‌شود) تعداد تصادفی (به تعداد اعضای Φ) فرایند پواسون مستقل $X_{(c,\gamma)}$ با تابع شدت $\gamma k(c-\cdot)$، $(c,\gamma)\in\Phi$ است که $X_{(c,\gamma)}$ به عنوان یک خوشه، c مرکز خوشه و γ متوسط تعداد نقاط خوشه تعبیر می‌شود (مولر ۲۰۰۳). بنابراین فرایند کاکس نوفه‌ی شلیک مدل مناسبی برای الگوهای نقطه‌ای خوشه‌ای است که در آن‌ها خوشه‌ای شدن الگو به دلیل وجود نقاط والد (Φ) که موجب تولید نقاط فرزند (X) شده‌اند (مانند ساز و کار تکثیر دانه‌ها در یک جنگل) مناسب است.

برای سادگی فرض می‌شود $\zeta(c,\gamma) = \tilde{\zeta}(c)\chi(\gamma)$ که $\tilde{\zeta}$ و χ، به ترتیب دو تابع انتگرال‌پذیر موضعی بر S و $\mathbb{R}^+$ هستند. تصویر فرایند مادر Φ بر S؛ یعنی

[۱۳] Superposition

$\mathcal{C} = \{c : (c,\gamma) \in \Phi\}$، فرایند مرکز نامیده می‌شود و اگر $\int_{\mathbb{R}^+} \chi(\gamma)d\gamma < \infty$، آن‌گاه $\mathcal{C}$ یک فرایند پواسون با تابع شدت $\tilde{\zeta}$ بر S است. به ویژه اگر $\tilde{\zeta}(\xi) \equiv \kappa$، فرایند مرکز $\mathcal{C}$ یک فرایند پواسون همگن با شدت κ است و X یک فرایند ماناست (مولر ۲۰۰۳). در این حالت با انتخاب تابع‌های مختلف χ بر $\mathbb{R}^+$، فرایندهای کاکس نوفه‌ی شلیک و مانای متفاوتی حاصل می‌شود که در این میان نیز، دو فرایند نیمن-اسکات و G نوفه‌ی شلیک بیشتر مورد توجه‌اند.

X را یک فرایند نیمن-اسکات[۱۴] با پارامترهای $\kappa > ۰$ و $\alpha > ۰$ و چگالی تغییر وضعیت k می‌گویند هرگاه $\chi(\alpha) = ۱$ و $\chi(\gamma) = ۰$، $\gamma \neq \alpha$. به ویژه اگر k را تابع چگالی نرمال دو متغیره با میانگین صفر و ماتریس واریانس $\omega^۲ I_۲$ ($I_۲$ ماتریس همانی ۲×۲ است) در نظر بگیریم آن‌گاه X یک فرایند توماس[۱۵] با پارامتر $\theta = (\kappa, \alpha, \omega^۲)$ است. فرایند توماس، مانا و همسانگرد با شدت $\rho_۰ = \kappa\alpha$ است. میدان هادی فرایند توماس به شکل

$$Z(u|\theta, \mathcal{C}) = \alpha \sum_{c \in \mathcal{C}} k_\omega(c-u) \; ; \; u \in S \qquad (۶)$$

است که در آن k_ω چگالی نرمال دومتغیره با میانگین صفر و ماتریس واریانس $\omega^۲ I_۲$ است. همچنین می‌توان نشان داد تابع همبستگی زوجی فرایند توماس به شکل

$$g(u; \kappa, \omega) = ۱ + \frac{۱}{۴\pi\kappa\omega^۲} \exp\left(-\frac{\|u\|^۲}{۴\omega^۲}\right) \; ; \; u \in S, \qquad (۷)$$

(دقت کنید که همواره $g_\theta > ۱$)، و تابع Kی ریپلی آن

$$K(r; \kappa, \omega) = \pi r^۲ + \frac{۱}{\kappa}\left(۱ - \exp\left(-\frac{r^۲}{۴\omega^۲}\right)\right) \; ; \; r > ۰, \qquad (۸)$$

است (مولر، ۲۰۰۳).

---

۱۴ Neyman-Scott

۱۵ Thomas

۶ مدلسازی زلزله‌های زاگرس با مدل توماس

فرض کنید می‌خواهیم برای توصیف ساختار خوشه‌ای داده‌های مکان زلزله‌ها، یک مدل توماس به این داده‌ها برازش دهیم. فرایند توماس رفتار خوشه‌ای زلزله‌ها را توصیف می‌کند اما برای لحاظ کردن وابستگی x_W به d، فرض کنید X_W (عنصر تصادفی که x_W تحققی از آن است) یک فرایند کاکس با میدان هادی

$$Z(u|\theta,\beta_1,\mathcal{C}) = \exp(\beta_1 d(u)) \left(\alpha \sum_{c\in\mathcal{C}} k_\omega(c-u)\right) \; ; \; u \in W \qquad (۹)$$

بر W باشد. این ایده که برای بیان وابستگی به متغیر کمکی در فرایندهای کاکس مطرح شده است به این صورت توجیه می‌شود که فرض کنید عدد مثبت m_0 موجود است به‌طوری که برای هر $u \in W$، $\exp(\beta_1 d(u)) \le m_0$ و Y یک فرایند توماس با پارامتر θ و تابع شدت به شکل (۶) بر W باشد. اگر قرار دهیم $\pi(u) = \frac{1}{m_0}\exp(\beta_1 d(u))$، و X یک π-تُنُک‌سازی مستقل از Y باشد؛ یعنی X با احتمال $\pi(u)$ شامل $u \in Y$ باشد، آن‌گاه X یک فرایند کاکس با میدان هادی به‌صورت (۹) است (واگه‌پی‌ترسِن، ۲۰۰۷).

فرایند X_W مانا نیست و تابع شدت آن به‌صورت

$$\rho(u;\beta_0,\beta_1) = \kappa\alpha \exp(\beta_1 d(u)) = \exp(\beta_0 + \beta_1 d(u)) \; ; \; u \in W \qquad (۱۰)$$

است، $\beta_0 = \log(\kappa\alpha)$، اما همسانگرد و مانای شدت بازْموزون است و چون اندازه‌ی $\mathcal{K}$ نسبت به تنک‌سازی ناورداست (مولر و واگه‌پی‌ترسِن، ۲۰۰۴)، تابع g و تابع Kی ریپلی X_W هم‌چنان به شکل (۷) و (۸) است و لذا به پارامتر رگرسیونی β_1 بستگی ندارند.

مدل آماری معرفی شده در بالا، یک مدل پارامتری با پارامترهای $\beta_1 \in \mathbb{R}$ و $\theta = (\kappa,\alpha,\omega^2) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ (یا با بازپارامتریدن، (β_0,β_1) و $\theta = (\kappa,\alpha,\omega^2)$، با این قید که $\beta_0 = \log(\kappa\alpha)$) است و لازم است این پارامترها برآورد شوند. می‌توان نشان داد که خانواده‌ی توزیع‌های فرایندهای کاکس بر W توسط توزیع فرایند پواسون همگن با شدت واحد بر W مغلوب شده است و لذا برای فرایندهای کاکس بر W می‌توان چگالی تعریف کرد. اما متأسفانه، مانند سایر مدل‌های آماری که در

آن‌ها متغیر پنهان (یا داده‌ی گمشده) وجود دارد، این چگالی به صورت یک امید ریاضی بر حسب توزیع فرایند پنهان Z است (مولر و واگه‌پی‌ترسِن، ۲۰۰۴). به عنوان مثال برای مدل پارامتری در نظر گرفته شده برای X_W، تابع چگالی (تابع درستنمایی مدل) برای هر $x \in N_{\text{lf}}$ که $x \subset W$ به صورت

$$f_{\theta,\beta_1}(x) = \mathbb{E}_{P_{\mathcal{C}}}\left[\exp\left(\lambda(W) - \int_W Z(u|\theta,\beta_1,\mathcal{C})\lambda(du)\right)\prod_{u\in x} Z(u|\theta,\beta_1,\mathcal{C})\right] \quad (11)$$

است. بنابراین برای محاسبه‌ی تابع درستنمایی مدل در هر نقطه‌ی θ و β_1، باید از روش‌های مونت‌کارلو برای تقریب امید ریاضی بالا استفاده کرد. برای برآورد ماکسیمم درستنمایی θ و β_1 نیز می‌توان از الگوریتم MCEM[16]، یا رویکرد نمونه‌گیری نقاط مهم[17] و روش نیوتون-رافسون استفاده کرد (مولر و واگه‌پی‌ترسِن، ۲۰۰۴) اما برای این منظور در هر گام باید $\int_W Z(u|\theta,\beta_1,\mathcal{C})\lambda(du)$ را تقریب زد. این محاسبات بسیار دشوار و زمان‌بر هستند، در عوض استفاده از روش‌هایی که مبتنی بر تابع درستنمایی نیستند، هر چند کارایی کمتری دارند، اما از لحاظ محاسباتی بسیار ساده‌تر و سریعترند. در این مقاله برای برآورد پارامترهای مدل از روش تابع برآوردساز[18] و روش مینیمم تفاوت[19] استفاده می‌کنیم. (ن. ک. مولر و واگه‌پی‌ترسِن، ۲۰۰۷، بخش ۸).

به کمک تابع شدت (مشخصه‌ی مرتبه‌ی اول) X_W، (۱۰)، و با تعریف

$$l(\beta_0,\beta_1) = \sum_{u\in x_W}\log(\rho(u;\beta_0,\beta_1)) - \int_W \rho(u;\beta_0,\beta_1)d(u). \quad (12)$$

می‌توان از تابع برآوردساز نااریب $U(\beta_0,\beta_1) = \nabla l(\beta_0,\beta_1)$ (تابع گرادیان l) با حساسیت $j(\beta_0,\beta_1) = -D^2 l(\beta_0,\beta_1)$ (ژاکوبی تابع l با علامت منفی) برای برآورد (β_0,β_1) استفاده کرد. انتخاب (۱۲) به دو دلیل در نظریه‌ی فرایندهای نقطه‌ای مورد توجه است: ۱) لگاریتم تابع درستنمایی مرکب[20] هر مدل فرایند نقطه‌ای است که

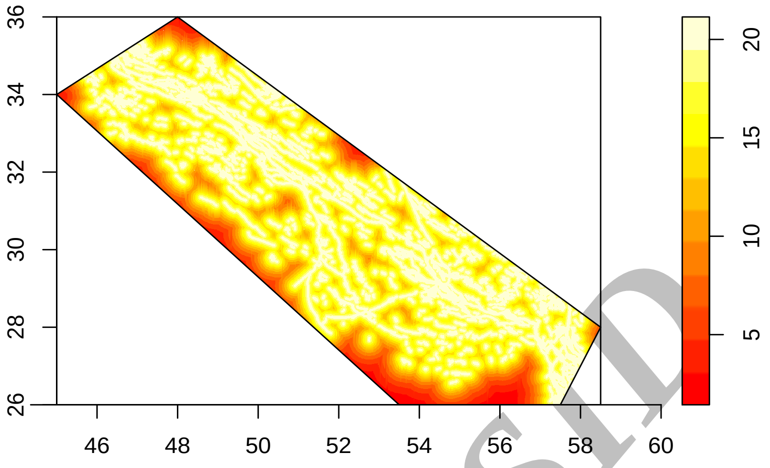
[16] Monte Carlo Expectation Maximization

[17] Importance Sampling

[18] Estimating Function

[19] Minimum Contrast

[20] Composite Likelihood Function



شکل ۳: تابع $\hat{\rho}$ بر W.

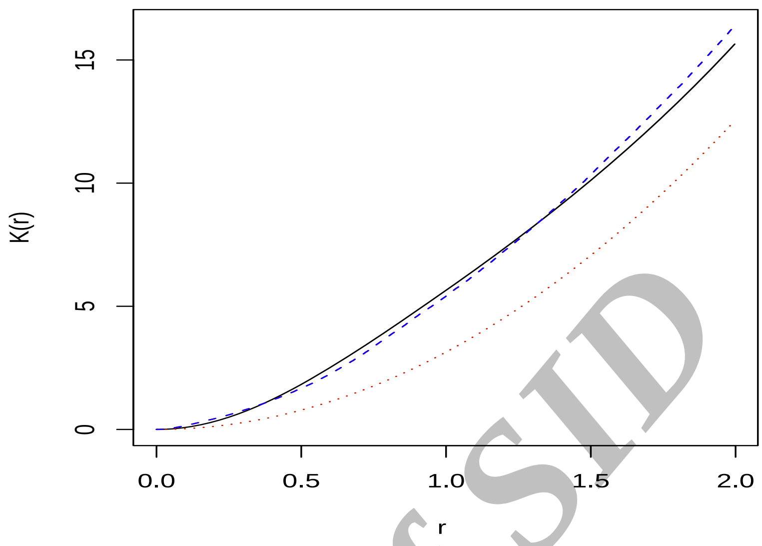
تابع شدت آن به شکل (۱۰) باشد و ۲) لگاریتم تابع درستنمایی مدل پواسون با تابع شدت به شکل (۱۰) است (مولر و واگه‌پی‌ترسِن، ۲۰۰۷).

واگه‌پی‌ترسن (۲۰۰۷) نشان می‌دهد که معادله‌ی برآوردساز $U(\beta_۰, \beta_۱) = ۰$ دارای جواب یکتای $(\hat{\beta}_۰, \hat{\beta}_۱)$ است، که $l(\beta_۰, \beta_۱)$ را ماکسیمم می‌کند، هرگاه j همیشه مثبت باشد یا معادل با آن، ناحیه‌ی $A \subset W$ موجود باشد به‌طوری‌که $\lambda(A) > ۰$ و برای هر $u \in A$، ماتریس $(۱, d(u))^T(۱, d(u))$ همیشه مثبت باشد. به وضوح در این مسئله این شرط برقرار است و با حل معادله، $(\hat{\beta}_۰, \hat{\beta}_۱) = (۳/۰۵۱, -۲/۳۹۹)$ به دست می‌آید.

در این صورت تابع شدت (۱۰) را می‌توان با $\hat{\rho}(\xi) = \exp(\hat{\beta}_۰ + \hat{\beta}_۱ d(\xi))$ برآورد کرد (شکل ۳)، و به کمک آن یک برآورد برای تابع Kی ریپلی X_W، با جایگذاری در (۴)، به‌شکل زیر به دست آورد.

$$\hat{K}(r) = \sum_{u,v \in x_W}^{\neq} \frac{1[\|u-v\| < r]}{\exp(2\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1(d(u) + d(v)))} e_{u,v}. \qquad (۱۳)$$

حال با استفاده از تابع Kی ریپلی (مشخصه‌ی مرتبه‌ی دوم)، تابع مقایسه[۲۱]ی



شکل ۴: برآورد تابع Kی ریپلی بر اساس داده‌ها (خط پر)، تابع Kی ریپلی مدل توماس برازش داده شده (خط چین) و تابع K ریپلی فرایند پواسون(نقطه‌چین).

$$D(\kappa,\omega;x_W)=\int_{0}^{2}\left[\hat{K}(r)^{\frac{1}{4}}-K(r;\kappa,\omega)^{\frac{1}{4}}\right]^{2}dr$$

را برای برآورد κ و ω^2 در نظر می‌گیریم (مولر و واگه‌پی‌ترسِن، ۲۰۰۷). با مینیمم‌سازی تابع $D(\kappa,\omega;x_W)$ نسبت به κ و ω، برآورد مینیمم تفاوت $(\hat{\kappa},\hat{\omega}^{2})=(0/321, 0/15)$ به دست می‌آید. سرانجام α نیز با $\hat{\alpha}=\frac{e^{\hat{\beta}_0}}{\hat{\kappa}}=$ **۶۵/۹۸** برآورد می‌شود.

برای ارزیابی مدل برازش داده شده به داده‌ها، معادله‌ی (۱۳)، تابع Kی ریپلی مدل توماس برازش داده شده و تابع K ریپلی فرایند پواسون در شکل ۴ رسم شده‌اند. تابع Kی ریپلی مدل توماس، نسبت به فرایند پواسون به $\hat{K}$ نزدیک‌تر است و می‌تواند گواهی بر مناسب بودن مدل توماس باشد.

اگر پارامتر κ (شدت فرایند مرکز) معلوم باشد، $\log(\alpha)$ را می‌توان با $\hat{\beta}_0-\log(\kappa)$ برآورد کرد. واگه‌پی‌ترسِن (۲۰۰۷)، نشان می‌دهد که در این حالت، وقتی که $\kappa\to\infty$، توزیع $(\hat{\beta}_0-\log(\kappa),\hat{\beta}_1)$ به توزیع نرمال با میانگین $(\log(\alpha),\beta_1)$ و

[21] Contrast Function

ماتریس واریانس $\Sigma(\theta, \beta_1)$ میل می‌کند، که در آن

$$\Sigma(\theta, \beta_1) = \frac{1}{\kappa\alpha} J^{-1}(\beta_1) + \frac{1}{\kappa} J^{-1}(\beta_1) G(\beta_1, \omega) J^{-1}(\beta_1)$$

و

$$\begin{aligned} J(\beta_1) &= \int_W \begin{bmatrix} 1 & d(\xi) \\ d(\xi) & d^2(\xi) \end{bmatrix} \exp(\beta_1 d(\xi)) \lambda(d\xi), \\ G(\beta_1, \omega) &= \int_{\mathbb{R}^2} H(c; \beta_1, \omega) H(c; \beta_1, \omega)^T \lambda(dc), \\ H(c; \beta_1, \omega) &= \int_W \begin{bmatrix} 1 \\ d(\xi) \end{bmatrix} \exp(\beta_1) \frac{1}{2\pi\omega^2} \exp\left(-\frac{1}{2\omega^2} \|\xi - c\|\right) \lambda(d\xi). \end{aligned}$$

در عمل $\Sigma(\theta, \beta_1)$ به روش جایگذاری[۲۲]، و با $\Sigma(\hat{\theta}, \hat{\beta}_1)$ برآورد می‌شود. پس از تقریب انتگرال‌های بالا با مجموع‌های ریمانی بر یک تور[۲۳] به ابعاد ۰/۰۱ × ۰/۰۱، و محاسبه‌ی ماتریس‌های $J(\hat{\beta}_1)$، $G(\hat{\beta}_1, \hat{\omega})$ و $H(\cdot\,; \hat{\beta}_1, \hat{\omega})$، برآورد

$$\hat{\Sigma} = \begin{bmatrix} ۰/۱۵۷ & ۰/۲۳۴ \\ ۰/۲۳۴ & ۲/۸۸۶ \end{bmatrix}$$

به دست می‌آید.

۷ بحث و نتیجه‌گیری

بنابر برآوردهای به دست آمده برای مدل و تعبیر شهودی پارامترهای مدل توماس، در ناحیه‌ی W و طی دوره‌ی زمانی مورد بررسی، $\hat{\kappa}\lambda(W) = ۱۷/۶۵۵ \approx ۱۸$ زلزله‌ی اصلی رخ داده‌است که هر کدام به‌طور متوسط $\hat{\alpha} \approx ۶۶$ پس‌لرزه دارند که طبق چگالی نرمال دومتغیره با واریانس $۰/۱۵ I_2$ برگرد زلزله‌ی اصلی پخش شده‌اند.

از طرف دیگر تأثیر متغیر کمکی فاصله تا گسل بر مکان زلزله‌ها به صورت (۱۰) مدلسازی شد که با استفاده از توزیع نرمال مجانبی $\hat{\beta}_1$ و برآورد $\hat{\Sigma}$، $(-۵/۷۲۹, ۰/۹۳۱)$ یک بازه‌ی اطمینان ۹۵% مجانبی برای β_1 است. طبق این

۲۲ Plug-in

۲۳ Grid

بازه‌ی اطمینان، فرض $H_0 : \beta_1 = 0$ در سطح ۵% پذیرفته می‌شود و نشان می‌دهد d بر x_W تأثیری ندارد. این امر ناشی از این است که در این مثال از همه‌ی گسل‌های شناسایی شده، بدون در نظر گرفتن فعال یا غیر فعال بودن آن‌ها در دوره‌ی زمانی مورد بررسی استفاده شده است؛ ضمن این‌که تقریب‌های استفاده شده نیز می‌تواند در این مورد مؤثر باشد. با این‌حال شکل ۳ یک نقشه‌ی مخاطره‌ی زلزله در ناحیه‌ی زاگرس است که به کمک مدل توماس ناهمگن و با استفاده از اطلاعات زلزله‌های پیشین و گسل‌های شناخته شده‌ی ناحیه تهیه شده است.

در این مقاله و در قالب این مثال، سعی شد تا برخی از ایده‌ها و روش‌های رایج در انتخاب مدل، مفهوم چگالی، مدلسازی وابستگی به متغیر کمکی، برآورد پارامترها و تفسیر الگوهای نقطه‌ای خوشه‌ای بیان شود. به کمک روش‌هایی مشابه می‌توان الگوهای نقطه‌ای دیگری را که در سایر علوم مورد توجه‌اند با فرایندهای نقطه‌ای مدلسازی کرد و به تحلیل آماری آن‌ها پرداخت.

برای انجام محاسبات تحلیل آماری الگوهای نقطه‌ای فضایی در $\mathbb{R}^2$، بسته‌ی نرم‌افزاری `spatstat` توسط بدلی و ترنر تحت زبان برنامه‌نویسی آماری `R` گسترش یافته است (بدلی و ترنر، ۲۰۰۵). برای محاسبات این مقاله نیز از `spatstat` استفاده شده است.

مراجع

Baddeley, A. J., Turner, R., (2005), Spatstat: an R Package for Analyzing Spatial Point Patterns. *Journal of Statistical Software*, **12**, 1-42.

Daley, D. J., Vere-Jones, D., (2003), *An Introduction to the Theory of Point Processes.* Springer-Verlag, New York.

MØller, J., (2003), Shot Noise Cox Processes. *Advances in Applied Probability*, **35**, 614-640.

MØller, J., (2006), Properties of Spatial Cox Process Models. *Journal of Statistical Research of Iran*, **2**, 1-18.

MØller, J., Waagepetersen, R. P., (2004), *Statistical Models for Earthquake Occurrences and Residual Analysis for Point Processes.* Chapman & Hall/CRC, Boca Raton.

MØller, J., Waagepetersen, R. P., (2007), Modern Statistics for Spatial Point Processes. To appear in *Scandinavian Journal of Statistics.*

Ogata, Y., (1988), Statistical Models for Earthquake Occurrences and Residual Analysis for Point Processes. *Journal of the American Statistical Association*, **83**, 9-27.

Waagepetersen, R. P., (2007), An Estimating Function Approach to Inference for Inhomogeneous Neyman-Scott Processes. *Biometrics*, **63**, 252-258.

Zhuang, J., (2006), Second-order Residual Analysis of Spatiotemporal Point Processes and Applications in Model Evaluation. *Journal of Royal Statistical Society*, B, part 4, **68**, 635-653.

IIEES, Official Website of *International Institute of Earthquake Engineering and Seismology.* www.iiees.ac.ir.