مجله علوم آماری، بهار و تابستان ۱۳۸۷
جلد ۲، شماره ۱، ص ۱۱۵-۱۲۴

مسئله‌ای احتمالاتی در زیر گروه‌های فازی متمایز یک گروه

حسین نراقی، علی ایرانمنش
بخش ریاضی، دانشگاه تربیت مدرس

تاریخ دریافت: ۱۳۸۵/۸/۱۰ تاریخ آخرین بازنگری: ۱۳۸۶/۱۰/۵

چکیده : در این مقاله، ابتدا تعریف جابجا شدن دو زیرگروه فازی یک گروه بیان شده، سپس احتمال جابجا شدن دو زیر گروه فازی متمایز گروه Z_{p^n} که تکیه‌گاهشان دقیقاً Z_{p^m} است به دست آورده شده است.

واژه‌های کلیدی : ز یرمجموعه فازی، زیرگروه فازی، پرچم.

۱ مقدمه

پس از آنکه نظریه مجموعه‌های فازی توسط زاده (۱۹۶۵) مطرح شد، رزنفلد (۱۹۷۱) مقاله خود را در نظریه زیرگروههای فازی نوشت، که سرفصلی جدید در ریاضیات فازی از جمله گروههای فازی گشود. در گروهها یکی از مباحث مورد تحقیق، احتمال جابجاشدن دو عضو از یک گروه است و مقالات متعددی در این زمینه به چاپ رسیده است که از جمله آنها گاستافسون (۱۹۷۳) و شرمن (۱۹۷۵) می باشند، حال، این سوال مطرح است که آیا می توان این مباحث را در گروههای

آدرس الکترونیک مسئول مقاله: علی ایرانمنش، iranmana@modares.ac.ir
کد موضوع‌بندی ریاضی (۲۰۰۰): 60B15، 62F86

فازی نیز مطرح کرد؟ در واقع احتمال جابجاشدن دو زیرگروه فازی متمایز یک گروه متناهی که تکیه‌گاه آنها دقیقاً یکسان است چقدر است؟ این پرسشی است که میتواند بطور طبیعی به ذهن برسد. یکی از گروههای مهم گروه Z_{p^n} است که از دیدگاههای مختلفی روی این گروه بحث شده است و مقالات مختلفی چه در زمینه فازی و چه در سایر زمینه ها به چاپ رسیده است به عنوان نمونه می توان به مقالات مورالی و ماکامبا در سالهای (۲۰۰۱) و (۲۰۰۴) اشاره نمود. مقاله حاضر به محاسبه احتمال جابجا شدن دو زیرگروه فازی از گروههای دوری بصورت Z_{p^n} که تکیه‌گاه آن دقیقاً Z_{p^m} است، اختصاص دارد.

۲ پیش نیازها

هر نگاشت از X به فاصلهٔ $[0,1]$ را زیر مجموعهٔ فازی از X نامند، وقتی μ یک زیر مجموعهٔ فازی از X باشد به $\operatorname{supp}\mu = \{x \in X | \mu(x) > 0\}$ تکیه‌گاه μ و به ازای هر $t \in [0,1]$، $\mu_t = \{x \in X | \mu(x) \geq t\}$ را زیرمجموعهٔ تراز μ نسبت به t می‌نامند و خانوادهٔ $\{\mu_t | t \in \operatorname{Im}\mu\}$ را با F_μ نمایش می‌دهند.

تعریف ۱ : فرض کنید G یک گروه و زیرمجموعهٔ فازی μ از G به قسمی باشد که:

الف) به ازای هر $x, y \in G$، $\mu(xy) \geq \min\{\mu(x), \mu(y)\}$

ب) به ازای هر $\mu(x^{-1}) \geq \mu(x), x \in G$.

ج)اگر e عضو خنثی گروه G باشد، آنگاه $\mu(e) = 1$

دراینصورت μ یک زیر گروه فازی از G نامیده می‌شود. مجموعهٔ تمام زیر گروههای فازی از G نیز با $F(G)$ نمایش داده می‌شود.

تعریف ۲ : (مورالی و ماکامبا، ۲۰۰۴) یک پرچم برای گروه G، یک زنجیر متناهی اکیداً صعودی از زیر گروه های G مانند $G_0 = (e) \subset G_1 \subset \cdots \subset G_n = G$ است، به طوری که به ازای هر $1 \leq i \leq n$، G_{i-1} یک زیر گروه ماکزیمال G_i باشد. هر G_i پرچم یک مولفه و n طول این پرچم نامیده می شود.

تعریف ۳ : دو زیر گروه فازی ν و μ از گروه G هم‌ارز نامیده می شوند، هر گاه تکیه گاه آنها یکسان و $F_\mu = F_\nu$ باشد. هم ارزی دو زیر گروه فازی بصورت $\mu \sim \nu$

و رده هم ارزی μ با $[\mu]$ نمایش می‌شود.

دراین مقاله منظور از مجموعه تمام زیرگروهای فازی متمایز گروه G، یک خانوادهٔ انتخاب شده از زیرگروههای فازی غیر هم‌ارز از G است، که عدد اصلی آن برابر تعداد کلاسهای هم‌ارزی روی $F(G)$ می‌باشد. این خانواده بعد از انتخاب با $F_t(G)$ و عدد اصلی آن با t_G نمایش داده می‌شود. با توجه به اینکه هر گروه متناهی دارای یک سری ترکیبی است و هر سری ترکیبی در گروه آبلی یک پرچم می‌باشد بنابراین هر گروه آبلی متناهی نیز دارای یک پرچم است.

قضیه ۱ : (نیکلسون، ۲۰۰۶) اگر G یک گروه آبلی از مرتبه $p_1^{n_1} \times \cdots \times p_r^{n_r}$ باشد، که در آن p_i ها اعداد اوّل و متمایزند، آنگاه طول هر پرچم G برابر با $n_1 + \cdots + n_r$ است.

قضیه ۲ :(ماشینچی و زاهدی، ۱۳۶۸) اگر $\varphi : G_0 = (e) \subset G_1 \subset \cdots \subset G_n = G$ یک پرچم از G باشد و $\lambda_n \geq \cdots \geq \lambda_1 \geq 1$ و به ازای هر $1 \leq i \leq n$، $\lambda_i \in [0, 1]$ در اینصورت μ یک زیر گروه فازی از G است، که در آن:

$$\mu(x) = \begin{cases} 1 & x \in G_0 \\ \lambda_1 & x \in G_1 - G_0 \\ \vdots & \vdots \\ \lambda_n & x \in G_n - G_{n-1} \end{cases}$$

زیرگروه فازی تعریف شده در قضیهٔ ۲ با $\mu = (1\lambda_1 \cdots \lambda_n)\varphi$ نمایش داده می‌شود.

قضیه ۳ : فرض کنید μ یک زیرگروه فازی از گروه متناهی G و $Im(\mu) = \{1, \alpha_1, \cdots, \alpha_r\}$ باشد، بطوریکه $1 > \alpha_1 > \cdots > \alpha_r$، آنگاه اعدادی طبیعی مانند n_i، $0 \leq i \leq r$ با شرط $\sum_{i=0}^{r} n_i = n$ و پرچمی مانند φ وجود دارد بطوریکه:

$$\mu = (\underbrace{1 \cdots 1}_{n'_0}\underbrace{\alpha_1 \cdots \alpha_1}_{n'_1} \cdots \underbrace{\alpha_r \cdots \alpha_r}_{n'_r})\,\varphi$$

$$\begin{aligned}\varphi : (G_0) &\subset G_1 \subset \cdots \subset G_{n_0}\\ &\subset G_{n_0+1} \subset \cdots \subset G_{n_1}\\ &\vdots\\ &\subset G_{n_{r-1}+1} \subset \cdots \subset G_{n_r}\end{aligned}$$

که در آن $n'_0 = n_0$ و $n'_i = n_i - (n_1 + \cdots + n_{i-1})$

برهان : اگر $\mu_1 \subset \mu_{\alpha_1} \subset \cdots \subset \mu_{\alpha_r} = G$ یک پرچم از G باشد، واضح است که $\mu = (1\alpha_1 \cdots \alpha_r)\varphi$، در غیر اینصورت با درج زیرگروههای مناسب به این زنجیر اکیداً صعودی میتوان آن را به یک پرچم روی G مانند

$$\begin{aligned}\varphi_\mu : (e) &\subset G_1 \subset \cdots \subset G_{n_0} = \mu_1\\ &\subset G_{n_0+1} \subset \cdots \subset G_{n_1} = \mu_{\alpha_1}\\ &\vdots\\ &\subset G_{n_{r-1}+1} \subset \cdots \subset G_{n_r} = G\end{aligned}$$

توسعه داد. برای اثبات قضیه در این حالت کافی است قرار دهیم

$$\mu = (\underbrace{1 \cdots 1}_{n'_0}\underbrace{\alpha_1 \cdots \alpha_1}_{n'_1} \cdots \underbrace{\alpha_r \cdots \alpha_r}_{n'_r})\varphi_\mu$$

۳ احتمالات در زیر گروه‌های فازی متمایز یک گروه

تعریف ۴ : فرض کنید ν و μ دو زیر گروه فازی از G باشند، زیرمجموعهٔ فازی $\mu \circ \nu$ از G را چنین تعریف می‌کنیم.

$$\mu \circ \nu : G \to [0, 1]$$

$$\mu \circ \nu(x) = \sup\{\min\{\mu(y), \mu(z)\} | y, z \in G, yz = x\}$$

گوییم ν و μ با هم جابجا می‌شوند اگر و تنها اگر $\mu \circ \nu = \nu \circ \mu$.

با فرض آنکه G یک گروه متناهی و H زیرگروه G باشد. مجموعهٔ تمام زیرگروه‌های فازی متمایز G که تکیه‌گاهشان دقیقاً H است را با $F_{t_H}(G)$ نمایش داده و قرار می‌دهیم

$$c_{t_H} = \{(\mu,\nu) \in F_{t_H}(G) \times F_{t_H}(G) | \mu \circ \nu = \nu \circ \mu\}$$

در این صورت احتمال جابجا شدن دو عضو از زیرگروه‌های فازی متمایز گروه G، که تکیه‌گاه آنها دقیقاً H است، عبارتست از:

$$P(c_{t_H}) = \frac{|c_{t_H}|}{|F_t(G) \times F_t(G)|} = \frac{|c_{t_H}|}{(t_G)^{۲}}.$$

قضیه ۴ :(مردسن و مالیک، ۱۹۹۵) فرض کنید G یک گروه آبلی و μ,ν دو زیرگروه فازی از G باشند در این صورت $\mu \circ \nu = \nu \circ \mu$

قضیه ۵ :فرض کنید G یک گروه متناهی باشد در اینصورت تعداد زیرگروههای فازی متمایز گروه G که تکیه‌گاهشان دقیقاً G است برابر $\frac{t_G+۱}{۲}$ می‌باشد.

برهان : زیرگروه فازی $\mu^* : G \to [۰,۱]$ را چنین تعریف می کنیم:

$$\forall x \in G, \mu^*(x) = ۱$$

و قرار می‌دهیم:

$$\begin{aligned} U(G) &= \{[\mu] \mid \mu \neq \mu^*, \mu \in F(G), supp\ \mu = G\} \\ V(G) &= \{[\mu] \mid \mu \in F(G), supp\ \mu \subset G\} \end{aligned}$$

بنا به قضیه ۳، چون G متناهی است می‌توان μ را بصورت

$$\mu = (\underbrace{۱\cdots۱}_{n'_۰}\underbrace{\lambda_۱\cdots\lambda_۱}_{n'_۱}\cdots\underbrace{\lambda_r\cdots\lambda_r}_{n'_r})\varphi$$

در نظر گرفت، که در آن $Im\mu = \{۱, \lambda_۱, \cdots, \lambda_r\}$، $۱ > \lambda_۱ > \cdots > \lambda_r > ۰$ و

$$\begin{aligned}\varphi : G_۰ = \{e\} &\subset G_۱ \subset \cdots \subset G_{n_۰} = \mu_۱\\ &\subset G_{n_۰+۱} \subset \cdots \subset G_{n_۱} = \mu_{\lambda_۱}\\ &\vdots\\ &\subset G_{n_{r-۱}+۱} \subset \cdots \subset G_{n_r} = \mu_{\lambda_r}\end{aligned}$$

و به ازای هر $۱ \leq i \leq r$، n_iها اعداد طبیعی هستند بطوریکه $n_۰ + \cdots + n_r = n$، $n'_۰ = n_۰$ و $n'_i = n_i - (n_۱ + \cdots + n_{i-۱})$. اینک تابع $f : U(G) \to V(G)$ را با ضابطه

$$f([\mu]) = [(\underbrace{۱\cdots۱}_{n'_۰}\underbrace{\lambda_۱\cdots\lambda_۱}_{n'_۱}\cdots\underbrace{\lambda_{r-۱}\cdots\lambda_{r-۱}}_{n'_{r-۱}}\underbrace{۰\cdots۰}_{n'_r})\varphi]$$

تعریف می‌کنیم. برای اثبات خوش تعریفی، اگر $[\mu] = [\nu]$ باشد قرار می‌دهیم $f[\mu] = [\lambda_\mu]$ و $f[\nu] = [\lambda_\nu]$. اگر $\eta \in f[\mu]$ آنگاه $F_\eta = F_{\lambda_\mu} = F_\mu - \{G\}$ از طرفی $F_\mu = F_\nu$ پس $F_\eta = F_\nu - \{G\} = F_{\lambda_\nu}$ همچنین با توجه به اینکه اعضای F_μ, F_ν یک زنجیر اکیداً صعودی هستند داریم $\text{supp}\ \eta = \text{supp}\ \lambda_\nu$ پس $\eta \sim \lambda_\nu$ لذا $\eta \in f[\nu]$ پس $f[\mu] \subseteq f[\nu]$ و بطریق مشابه $f[\nu] \subseteq f[\mu]$ در نتیجه $f[\mu] = f[\nu]$. یک به یک بودن f نیز بطریق مشابه ثابت می شود، پوشا بودن نیز با توجه به ضابطهٔ f واضح است. لذا $|U(G)| = |V(G)|$، امّا

$$t_G = |U(G)| + |V(G)| + ۱$$

پس داریم

$$t_G = ۲|U(G)| + ۱ \Rightarrow |U(G)| = \frac{t_G - ۱}{۲} \Rightarrow |U(G)| + ۱ = \frac{t(G) + ۱}{۲}$$

بنابراین تعداد زیرگروههای فازی متمایز G که تکیه‌گاه آنها دقیقاً برابر با G است برابر با $\frac{t_G+۱}{۲}$ می‌باشد.

قضیه ۶ :به ازای هر $n \in N$، تعداد زیرگروههای فازی متمایز گروه Z_{p^n} که تکیه‌گاه آن دقیقاً Z_{p^n} است برابر با ۲^n می‌باشد.

برهان : قرار می‌دهیم $G = Z_{p^n}$. مجموعه‌های $U(G) = \{[\mu] \mid \mu \neq \mu^*, \mu \in F(G), supp\ \mu = G\}$، $S(G) = \{H \mid H \leq G, H \neq G\}$ و $FS(G) = \{A \mid A \subseteq S(G)\}$ را تعریف می‌کنیم. همچنین تابع $f : U(G) \to FS(G)$ را با ضابطه

$$f([\mu]) = \{\mu_۱, \mu_{\lambda_۱}, \cdots, \mu_{\lambda_{r-۱}}\}$$

تعریف می‌کنیم، که در آن $Im(\mu) = \{۱, \lambda_۱, \cdots, \lambda_r\}$ با شرط $۱ > \lambda_۱ > \cdots > \lambda_{r-۱}$. ابتدا نشان می‌دهیم f یک به یک است. فرض کنیم $\mu, v \in F(G)$ و $f([\mu]) = f([v])$. بنابراین اگر $Im(\mu) = \{۱, \alpha_۱, \cdots, \alpha_r\}$، $Im(v) = \{۱, \beta_۱, \cdots, \beta_r\}$، $۱ > \alpha_۱ > \cdots > \alpha_r$ و $۱ > \beta_۱ > \cdots > \beta_s$ آنگاه $\{\mu_۱, \mu_{\beta_۱}, \cdots, \mu_{\beta_{s-۱}}\} = \{\mu_۱, \mu_{\alpha_۱}, \cdots, \mu_{\alpha_{r-۱}}\}$ از طرفی چون $\mu_۱ \subset \mu_{\alpha_۱} \subset \cdots \subset \mu_{\alpha_r} = G$ و $\mu_۱ \subset \mu_{\beta_۱} \subset \cdots \subset \mu_{\beta_s} = G$ لذا $r = s$ و به ازای هر $۱ \leq i \leq r$ $\mu_{\alpha_i} = v_{\beta_i}$. بنابراین $F_\mu = F_v$ و از طرفی $supp\ \mu = supp\ v$، بنابراین $[\mu] = [v]$.

پوششی بودن f نیز واضح است. چون $|S(G)| = n$ بنابراین $|FS(G)| = ۲^n - ۱$، ولذا تعداد زیرگروههای فازی متمایز گروه Z_{p^n} که تکیه‌گاه آنها دقیقاً Z_{p^n} است برابر با $۲^n - ۱ + ۱ = ۲^n$ می‌باشد.

قضیه ۷ : به ازای هر $n \in N$ تعداد زیرگروههای فازی متمایز گروه Z_{p^n} برابر با $۲^{n+۱} - ۱$ می‌باشد.

برهان : قرار می دهیم $G = Z_{p^n}$، بنابر قضیه قبل تعداد زیرگروههای فازی متمایز Z_{p^n} که تکیه‌گاه آن دقیقاً Z_{p^n} است برابر ۲^n می‌باشد. از طرفی بنابر قضیه ۵ این عدد برابر $\frac{t_G+۱}{۲}$ می‌باشد، بنابراین $t_G = ۲^{n+۱} - ۱$.

قضیه ۸ : اگر n و m $(m < n)$ دو عدد طبیعی باشند، آنگاه تعداد زیر گروههای فازی متمایز گروه Z_{p^n} که تکیه‌گاه آنها دقیقاً Z_{p^m} است، برابر با ۲^m می‌باشد.

برهان : قرار می‌دهیم

$$U_t(Z_{p^n}) \quad = \quad \{[\mu] \mid \mu \in F(Z_{p^n}), supp\ \mu = Z_{p^m}\}$$

$$V_t(Z_{p^m}) \quad = \quad \{[\mu] \mid \mu \in F(Z_{p^m}), supp\ \mu = Z_{p^m}\}$$

همانند قضایای قبل Z_{p^n} و Z_{p^m} هر کدام دارای پرچم‌های φ و $\overline{\varphi}$ هستند، که به صورت $\varphi : (0) \subset Z_p \subset Z_{p^2} \subset \cdots \subset Z_{p^n}$ و $\overline{\varphi} : (0) \subset Z_p \subset Z_{p^2} \subset \cdots \subset Z_{p^m}$ می‌باشند.

فرض کنید $[\mu] \in U_t(Z_{p^n})$ عضوی دلخواه باشد. بنابراین می‌توان آنرا بصورت

$$\mu = (\underbrace{1 \cdots 1}_{t_0} \underbrace{\alpha_1 \cdots \alpha_1}_{t_1} \cdots \underbrace{\alpha_{r-1} \cdots \alpha_{r-1}}_{t_{r-1}} \underbrace{0 \cdots 0}_{t_r})\varphi$$

در نظر گرفت، که در آن $Im(\mu) = \{1, \alpha_1, \cdots, \alpha_{r-1}, 0\}$ و t_iها به ازای هر $1 \leq i \leq r$ اعداد طبیعی هستند.

تابع $f : U_t(Z_{P^n}) \to V_t(Z_{P^m})$ را با ضابطه

$$f([\mu]) = [(\underbrace{11 \cdots 1}_{t_0} \underbrace{\alpha_1 \cdots \alpha_1}_{t_1} \cdots \underbrace{\alpha_{r-1} \cdots \alpha_{r-1}}_{t_{r-1}})\overline{\varphi}]$$

تعریف می‌کنیم، که تابعی یک‌به‌یک و پوشا است. بنابراین $| U_t(Z_{p^n}) |=| V_t(Z_{p^m}) |$. درنتیجه تعداد زیر گروههای فازی متمایز Z_{p^n} که تکیه‌گاهشان برابر با Z_{p^n} است برابر با تعداد زیر گروههای فازی متمایز Z_{p^m} با تکیه‌گاه Z_{p^m} می‌باشد، که بنابر قضیه ۶ برابر با 2^m است.

قضیه ۹ : اگر n و m $(m < n)$ دو عدد طبیعی باشند، احتمال جابجا شدن دو عضو از زیر گروههای فازی متمایز Z_{p^n} که تکیه‌گاه آنها دقیقاً Z_{p^m} است برابر با $(\frac{2^m}{2^{n+1}-1})^2$ می‌باشد.

برهان : چون Z_{p^n} آبلی است، به‌ازای هر دو زیرگروه فازی μ, ν از Z_{p^n} داریم $\mu \circ \nu = \nu \circ \mu$. قرار می‌دهیم $G = Z_{p^n}, H = Z_{p^m}$، بنابراین $|c_{t_H}| = |F_{t_H}(G)|^2$. اما تعداد زیرگروههای فازی متمایز Z_{p^n} که تکیه‌گاه آنها دقیقاً Z_{p^m} است، برابر با 2^m می‌باشد. لذا $|c_{t_H}| = (2^m)^2$، از طرفی اگر $G = Z_{p^n}$، بنا به قضیه ۸، t_G برابر با $2^{n+1} - 1$ می باشد. پس $P(c_{t_H}) = \frac{|c_{t_H}|}{(t_G)^2} = \frac{(2^m)^2}{(2^{n+1}-1)^2} = (\frac{2^m}{2^{n+1}-1})^2$.

۴ بحث و نتیجه گیری

در سالهای اخیر، شمارش و دسته بندی زیرگروههای فازی بررسی شده است، اما احتمال جابجا شدن زیرگروههای فازی یک گروه مورد توجه قرار نگرفته است. دراین مقاله احتمال جابجا شدن زیرگروههای فازی متمایز در گروه Z_{p^n} تعیین شده است. گروههای دوری از جمله Z_{p^n} دارای ویژگیهای منحصربفردی هستند که باعث شده تحقیقات مختلفی روی این گروهها صورت بگیرد. از همین جهت تلفیق دو دیدگاه فازی و احتمالی روی این گروه، باعث پدید آمدن نتایج جالب و زیبایی شد که در متن مقاله به آن اشاره‌گردید. می‌توان مباحث مورد اشاره در این مقاله را روی گروههای آبلی متناهی بصورت کلی توسعه داد و قضایا و نتایج بدست آمده برای گروه Z_{p^n} را برای گروه $Z_{p^nq^m}$ نیز تعمیم داد.

تقدیر و تشکر

نویسندگان مقاله، از داوران محترم که نقطه نظرات آنها در بهبود این مقاله بسیار نقش داشت و از مرکز پژوهشی ابرساختارهای جبری و ریاضیات فازی بابت حمایت مالی تشکر و قدرانی می‌نمایند.

مراجع

ماشینچی، م. زاهدی، م .(۱۳۶۸)، گزارش بیستمین کنفرانس ریاضی کشور دانشگاه تهران، ۲۵۵–۲۰۵.

Gustafson, W. H. (1973), What is the Probabilily that two Groups Elements Commute, *American Mathematistics Monthly*, **80**, 1031-1037.

Mordeson , J. N. and Malik, D. S. (1995), *Fuzzy Commutative Algebra*, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd.

Murali, V. and Makamba, B. B. (2001), On an Equivalence of Fuzzy Subgroups I, *Fuzzy Sets and Systems*, **123**, 256-264.

Murali, V. and Makamba, B. B. (2004), Counting the Number of Fuzzy Subgroups of an Abelian Group of Order $p^n q^m$, *Fuzzy Sets and Systems*, **144**, 459-470.

Murali, V. and Makamba, B. B. (2004), Fuzzy Subgroups of Finite Abelian Groups, Far East. *Journal of Mathematical Sciences*, **14**, 113-125.

Nicholson, W.K. (2006), Introduction to Abstract Algebra, *Wiley-InterScience*.

Rosenfeld,R. (1971), Fuzzy Groups,*Journal of Mathematics Anal. Apllication*, **35**, 512-517.

Sherman, G. J. (1975), What is the Probability? an Automorphism Fixes a Group Element, *American Mathematics Montly*, **82**, 261-264.

Zadeh, L. A. (1965), Fuzzy Sets, *Information and Control*, **8**, 338-353.