مجله علوم آماری، پاییز و زمستان ۱۳۸۷
جلد ۲، شماره ۲، ص ۲۱۳–۲۲۷

مقایسه برآوردگرهای مختلف آنتروپی و توان آزمون‌های نمایی بودن مبتنی بر برآوردگرهای آنتروپی

هادی علیزاده نوقابی، ناصررضا ارقامی، رضا علیزاده نوقابی
گروه آمار، دانشگاه فردوسی مشهد

تاریخ دریافت: ۱۳۸۷/۷/۱۷ تاریخ آخرین بازنگری: ۱۳۸۷/۱۲/۲۰

چکیده : در این مقاله سه برآوردگر مختلف آنتروپی ارائه و از نظر اریبی و جذر میانگین توان دوم خطا با یکدیگر مقایسه می‌شوند. سپس براساس این برآوردگرها سه آزمون نمایی بودن جدید معرفی و در یک مطالعه شبیه‌سازی، توان آن‌ها مورد ارزیابی و مقایسه قرار می‌گیرند.

واژه‌های کلیدی : برآوردگر آنتروپی، برآوردگر کرنل تابع چگالی، اریبی، جذر میانگین توان دوم خطا، آزمون نمایی بودن، توان آزمون.

۱ مقدمه

آنتروپی توزیع F با تابع چگالی f بصورت زیر تعریف می‌شود.

$$H(f) = -\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\log f(x)\,dx.$$

آدرس الکترونیک مسئول مقاله: هادی علیزاده نوقابی، *alizadehhadi@ymail.com*
کد موضوع‌بندی ریاضی (۲۰۰۰): ۶۲G۱۰ و ۶۲G۳۰

برآورد ناپارامتری آنتروپی $H(f)$، مورد توجه بسیاری از محققان، از جمله واسیچک (۱۹۷۶)، ابراهیمی و همکاران (۱۹۹۴)، بومن (۱۹۹۲) و علیزاده نوقابی (۲۰۱۰) بوده است. در میان برآوردگرهای مختلف آنتروپی، غالبا از برآوردگر آنتروپی واسیچک[۱] برای آزمون‌های نیکویی برازش بر مبنای آنتروپی استفاده شده است (آریزونا و اوهاتا، ۱۹۸۹؛ دادویویچ و وندرمولن، ۱۹۸۱؛ ابراهیمی و همکاران، ۱۹۹۲؛ سونگ، ۲۰۰۲ و پارک، ۲۰۰۵). اخیرا حبیبی و ارقامی (۲۰۰۷) آزمون متقارن بودن توزیع براساس آنتروپی را ارایه نمودند و در یک مطالعه شبیه‌سازی نشان دادند که آزمون آنها نسبت به آزمون‌های موجود از توان بیشتری برخوردار است. علیزاده نوقابی و علیزاده نوقابی (۲۰۰۸) توان آزمون‌های نیکویی برازش بر مبنای آنتروپی برای سه توزیع نرمال، نمایی و یکنواخت با آزمون‌های دیگر مقایسه کردند و نشان دادند که آزمون‌های بر مبنای آنتروپی دارای توان کمتری هستند.

در مطالعات علوم مهندسی و قابلیت اعتماد مهم است که بدانیم آیا داده‌ها از توزیع نمایی آمده‌اند یا نه. در نتیجه محققان بسیاری از جمله ون سوست (۱۹۶۹)، گخال (۱۹۸۳)، اسچر (۱۹۹۰)، احمد و الواسل (۱۹۹۹)، گرزگورزوسکی و ویسزرکوسکی (۱۹۹۹)، تایفر (۲۰۰۲)، پارک (۲۰۰۳ و ۲۰۰۵)، سنوگلو و سوروسو (۲۰۰۴)، هنز و مینتانیس (۲۰۰۵) و علیزاده نوقابی و ارقامی (۲۰۱۰) علاقمند به آزمون نمایی بوده‌اند و آزمون‌های زیادی را معرفی و درباره ویژگی و توان آن‌ها بحث‌های فراوانی کرده‌اند.

در این مقاله آزمون نمایی بودن بر مبنای آنتروپی نمونه را که توسط ابراهیمی و همکاران (۱۹۹۲)، معرفی شد، مورد بحث قرار می‌دهیم. در بخش ۲ سه برآوردگر مختلف آنتروپی را بیان و آنها را از نظر اریبی و جذر میانگین توان دوم خطا با یکدیگر مقایسه می‌کنیم. در بخش ۳ توان‌های سه آزمون نمایی بر مبنای سه برآوردگر آنتروپی بیان شده در بخش ۲ را با یکدیگر مقایسه می‌کنیم. در انتها نیز بحث و نتیجه گیری ارائه می‌شود.

---
۱ Vasicek

۲ برآوردگرهای آنتروپی

فرض کنید $x_1, \ldots, x_n$ یک نمونه تصادفی از توزیع نامعلوم F باشد. برآوردگر آنتروپی واسیچک، ۱۹۷۶، بصورت

$$H_v(n,m) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\log\left\{\frac{n}{2m}(x_{(i+m)} - x_{(i-m)})\right\},$$

است، که در آن m عدد صحیح مثبت کمتر از $\frac{n}{2}$ می‌باشد و $x_{(i)} = x_{(1)}$ اگر $i < 1$ و $x_{(i)} = x_{(n)}$ اگر $i > n$ باشد. ابراهیمی و همکاران (۱۹۹۴)، برآوردگر آنتروپی واسیچک را اصلاح و برآوردگر

$$H_c(n,m) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\log\left\{\frac{n}{c_i m}(x_{(i+m)} - x_{(i-m)})\right\},$$

را معرفی کردند، که در آن

$$c_i = \begin{cases} 1 + \frac{i-1}{m} & 1 \le i \le m \\ 2 & m+1 \le i \le n-m \\ 1 + \frac{n-i}{n} & n-m+1 \le i \le n \end{cases}$$

سیلورمن (۱۹۸۶) برآوردگر کرنل[۲] تابع چگالی احتمال را بصورت

$$\hat{f}(x) = \frac{1}{nh}\sum_{i=1}^{n}K\left(\frac{x - x_i}{h}\right)$$

معرفی کردند، که در آن h پارامتر هموارسازی نامیده می‌شود و K تابع کرنل است که در شرط

$$\int_{-\infty}^{\infty}K(x)dx = 1$$

صدق می‌کند و معمولا یک تابع چگالی احتمال متقارن مانند چگالی نرمال استاندارد اختیار می‌شود. با توجه به اینکه $H(f) = -E\{\log(f(x))\}$، بومن (۱۹۹۲) برآوردگر آنتروپی را بصورت

$$H_k(n,h) = -\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\log\{\hat{f}(x_i)\}$$

[۲] Kernel Estimator

بیان کرد. در اینجا مقدار بهینه h، که $MISE$ را می‌نیمم می‌کند، به صورت $h = ۱/۰٦sn^{-\frac{۱}{۵}}$ در نظر گرفته می‌شود، که در آن s انحراف معیار نمونه است.

۱.۲ مقایسه برآوردگرهای آنتروپی

در این بخش دقت برآوردگرهای معرفی شده برای آنتروپی توزیع‌های پیوسته نرمال استاندارد، نمایی با میانگین یک و یکنواخت $(۰,۱)$ را از لحاظ اریبی و جذر میانگین توان دوم خطا با یکدیگر مقایسه می‌کنیم. ابراهیمی و همکاران (۱۹۹۴) برای مقایسه برآوردگر خود با برآوردگرهای دیگر از این توزیع‌ها استفاده کردند. علاوه بر این توزیع‌های بتا$(۱,۱۵)$، لاپلاس و مقادیر غایی را نیز برای مقایسه برآوردگرها در نظر می‌گیریم تا رفتار برآوردگرها را در مقابل توزیع‌های مختلف مشاهده کنیم. برای این منظور از این توزیع‌ها نمونه‌ای به حجم n تولید می‌کنیم. آنتروپی را با استفاده از برآوردگرهای مختلف محاسبه و مقادیر اریبی و جذر میانگین توان دوم خطای برآوردگرها را بصورت

$$Bias(H_v) = \frac{۱}{N}\sum_{i=۱}^{N} H_v(i) - H(f) \quad , \quad Bias(H_c) = \frac{۱}{N}\sum_{i=۱}^{N} H_c(i) - H(f)$$

$$Bias(H_k) = \frac{۱}{N}\sum_{i=۱}^{N} H_k(i) - H(f) \quad , \quad RMSE(H_v) = \sqrt{\frac{۱}{N}\sum_{i=۱}^{N} \{H_v(i) - H(f)\}^{۲}}$$

$$RMSE(H_c) = \sqrt{\frac{۱}{N}\sum_{i=۱}^{N} \{H_c(i) - H(f)\}^{۲}}$$

$$RMSE(H_k) = \sqrt{\frac{۱}{N}\sum_{i=۱}^{N} \{H_k(i) - H(f)\}^{۲}}$$

محاسبه می‌کنیم، که در آنها N تعداد دفعات شبیه سازی، $H_v(i)$، $H_c(i)$، $H_k(i)$ به ترتیب مقدار برآوردگر آنتروپی واسیچک، ابراهیمی و همکاران، بومن در بار iام و $H(f)$ مقدار آنتروپی جامعه می‌باشد. مثلا برای توزیع‌های نرمال استاندارد، نمایی با میانگین یک و یکنواخت $(۰,۱)$ مقدار $H(f)$ به ترتیب برابر

$\log(\sqrt{(2\pi e)}) \simeq 1/419$، ۱ و ۰ می‌باشد. اندازه اریبی و جذر میانگین توان دوم خطای برآوردگرها برای mهای مختلف (از ۱ تا $n/2$) محاسبه شده و در جدول‌های ۱ تا ۶ آورده شده است. تعداد دفعات شبیه‌سازی ۱۰۰۰۰ بار است.

با توجه به تعریف برآوردگر H_k واضح است که این برآوردگر به m وابسته نیست. همانطور که در جدول‌ها مشاهده می‌کنیم برآوردگرهای H_c و H_k از برآوردگر H_v اریبی و جذر میانگین توان دوم خطای کمتری دارند. برآوردگر H_k در برآورد آنتروپی توزیع‌های نرمال استاندارد و مقادیر غایی دارای اریبی و جذر میانگین توان دوم خطای کمتری از سایر برآوردگرهاست. همچنین برای حجم نمونه پایین این برآوردگر اریبی و جذر میانگین توان دوم خطای کمتری نسبت به سایر برآوردگرها دارد و اینکه این برآوردگر به m وابسته نیست مزیتی دیگر برای این برآوردگر است.

۳ آزمون نمایی بودن برمبنای آنتروپی

فرض کنید $X_1, \ldots, X_n$ یک نمونه تصادفی از توزیع F با تابع چگالی احتمال f باشد. فرضیه‌های آزمون را بصورت

$$H_0 : f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \quad \text{در مقابل} \quad H_1 : f(x) \neq \lambda e^{-\lambda x}$$

در نظر می‌گیریم، که ابراهیمی و همکاران (۱۹۹۲) بر مبنای آنتروپی نمونه آزمون را انجام دادند. آماره آزمون پیشنهاد شده بصورت

$$T_v = -H_v(n, m) + \log(\bar{X}) + 1$$

است. با توجه به برآوردگرهای آنتروپی معرفی شده، دو آماره آزمون جدید را نیز می‌توان به صورت

$$T_c = -H_c(n, m) + \log(\bar{X}) + 1, \quad T_k = -H_k(n, h) + \log(\bar{X}) + 1$$

معرفی کرد، که مقادیر بزرگ آن‌ها منجر به رد فرضیه نمایی بودن می‌شود. چون توزیع این آماره‌ها به روش تحلیلی قابل محاسبه نمی‌باشد، نقاط بحرانی آزمون‌ها را

جدول ۱: اریبی و جذر میانگین توان دوم خطای برآوردگرهای آنتروپی توزیع نرمال استاندارد.

n	m	اریبی H_v	اریبی H_c	اریبی H_k	RMSE H_v	RMSE H_c	RMSE H_k
۵	۱	−۰/۹۱۷	−۰/۶۲۷	−۰/۲۳۰	۱/۰۴۶	۰/۸۰۰	۰/۴۶۱
	۲	−۰/۸۹۹	−۰/۵۱۲		۰/۹۹۱	۰/۶۶۴	
۱۰	۱	−۰/۵۹۲	−۰/۴۵۸	−۰/۱۲۷	۰/۶۷۲	۰/۵۵۹	۰/۲۸۳
	۲	−۰/۵۲۸	−۰/۳۲۸		۰/۵۹۸	۰/۴۲۸	
	۳	−۰/۵۵۵	−۰/۳۰۳		۰/۶۱۴	۰/۴۰۵	
	۴	−۰/۶۱۶	−۰/۲۹۶		۰/۶۶۹	۰/۳۹۳	
	۵	−۰/۶۶۷	−۰/۲۹۰		۰/۷۱۴	۰/۳۸۶	
۲۰	۱	−۰/۴۳۳	−۰/۳۵۹	−۰/۰۷۶	۰/۴۸۱	۰/۴۱۵	۰/۱۸۵
	۲	−۰/۳۲۷	−۰/۲۲۷		۰/۳۷۶	۰/۲۹۳	
	۳	−۰/۳۱۶	−۰/۱۸۹		۰/۳۶۳	۰/۲۶۲	
	۴	−۰/۳۲۸	−۰/۱۷۱		۰/۳۷۴	۰/۲۴۸	
	۵	−۰/۳۵۱	−۰/۱۶۲		۰/۳۹۵	۰/۲۴۳	
	۶	−۰/۳۷۶	−۰/۱۵۶		۰/۴۱۶	۰/۲۳۷	
	۷	−۰/۴۰۳	−۰/۱۵۹		۰/۴۴۱	۰/۲۴۰	
	۸	−۰/۴۳۷	−۰/۱۵۴		۰/۴۷۴	۰/۲۳۶	
	۹	−۰/۴۷۱	−۰/۱۵۸		۰/۵۰۴	۰/۲۴۰	
	۱۰	−۰/۵۰۱	−۰/۱۶۰		۰/۵۳۲	۰/۲۳۹	

جدول ۲: اریبی و جذر میانگین توان دوم خطای برآوردگرها در برآورد آنتروپی توزیع نمایی با میانگین یک.

n	m	اریبی H_v	اریبی H_c	اریبی H_k	RMSE H_v	RMSE H_c	RMSE H_k
۵	۱	−۰/۸۲۶	−۰/۵۵۶	−۰/۰۱۰	۱/۰۲۳	۰/۸۲۴	۰/۵۷۲
	۲	−۰/۷۴۰	−۰/۳۴۴		۰/۹۲۳	۰/۶۵۵	
۱۰	۱	−۰/۵۵۳	−۰/۴۱۱	+۰/۰۹۹	۰/۶۷۵	۰/۵۶۸	۰/۳۸۹
	۲	−۰/۴۳۷	−۰/۲۵۰		۰/۵۶۵	۰/۴۴۲	
	۳	−۰/۴۲۹	−۰/۱۷۷		۰/۵۵۹	۰/۳۹۸	
	۴	−۰/۴۵۱	−۰/۱۳۰		۰/۵۷۸	۰/۳۸۴	
	۵	−۰/۴۶۶	−۰/۰۹۳		۰/۵۹۶	۰/۳۷۸	
۲۰	۱	−۰/۴۱۸	−۰/۳۴۲	+۰/۱۴۳	۰/۴۹۵	۰/۴۳۳	۰/۲۹۲
	۲	−۰/۲۸۶	−۰/۱۹۳		۰/۳۷۷	۰/۳۱۳	
	۳	−۰/۲۶۳	−۰/۱۳۵		۰/۳۵۹	۰/۲۷۸	
	۴	−۰/۲۵۷	−۰/۱۰۰		۰/۳۵۳	۰/۲۶۰	
	۵	−۰/۲۶۲	−۰/۰۶۷		۰/۳۵۸	۰/۲۵۴	
	۶	−۰/۲۶۳	−۰/۰۴۳		۰/۳۵۹	۰/۲۴۸	
	۷	−۰/۲۶۸	−۰/۰۱۷		۰/۳۶۷	۰/۲۵۰	
	۸	−۰/۲۷۴	+۰/۰۰۷		۰/۳۷۴	۰/۲۵۳	
	۹	−۰/۲۸۲	+۰/۰۳۳		۰/۳۸۴	۰/۲۶۰	
	۱۰	−۰/۲۸۸	+۰/۰۵۲		۰/۳۹۲	۰/۲۶۹	

جدول ۳: اریبی و جذر میانگین توان دوم خطای برآوردگرها در برآورد آنتروپی توزیع یکنواخت $U(۰,۱)$.

n	m	اریبی H_v	اریبی H_c	اریبی H_k	RMSE H_v	RMSE H_c	RMSE H_k
۵	۱	−۰/۷۶۵	−۰/۴۹۵	−۰/۰۱۲	۰/۸۷۴	۰/۶۵۰	۰/۳۳۲
	۲	−۰/۶۸۶	−۰/۳۰۶		۰/۷۶۵	۰/۴۵۹	
۱۰	۱	−۰/۵۲۲	−۰/۳۸۰	+۰/۰۷۱	۰/۵۷۴	۰/۴۴۷	۰/۱۸۷
	۲	−۰/۴۱۳	−۰/۲۱۷		۰/۴۵۰	۰/۲۸۲	
	۳	−۰/۴۱۸	−۰/۱۶۶		۰/۴۴۹	۰/۲۳۴	
	۴	−۰/۴۵۵	−۰/۱۴۰		۰/۴۸۳	۰/۲۱۴	
	۵	−۰/۵۰۳	−۰/۱۲۷		۰/۵۲۹	۰/۲۰۸	
۲۰	۱	−۰/۳۹۳	−۰/۳۲۵	+۰/۰۹۶	۰/۴۱۷	۰/۳۵۳	۰/۱۳۸
	۲	−۰/۲۷۲	−۰/۱۷۳		۰/۲۹۱	۰/۲۰۱	
	۳	−۰/۲۵۵	−۰/۱۲۵		۰/۲۷۱	۰/۱۵۵	
	۴	−۰/۲۶۲	−۰/۱۰۰		۰/۲۷۶	۰/۱۳۲	
	۵	−۰/۲۷۸	−۰/۰۸۸		۰/۲۹۱	۰/۱۲۲	
	۶	−۰/۳۰۰	−۰/۰۸۱		۰/۳۱۱	۰/۱۱۶	
	۷	−۰/۳۲۲	−۰/۰۷۳		۰/۳۳۲	۰/۱۱۰	
	۸	−۰/۳۵۱	−۰/۰۶۸		۰/۳۶۱	۰/۱۰۸	
	۹	−۰/۳۷۶	−۰/۰۶۴		۰/۳۸۶	۰/۱۰۷	
	۱۰	−۰/۴۰۳	−۰/۰۶۰		۰/۴۱۲	۰/۱۰۵	

جدول ۴: اریبی و جذر میانگین توان دوم خطای برآوردگرها در برآورد آنتروپی توزیع بتا(۱,۱۵).

n	m	اریبی H_v	اریبی H_c	اریبی H_k	RMSE H_v	RMSE H_c	RMSE H_k
۵	۱	−۰/۸۲۷	−۰/۵۵۰	−۰/۰۳۳	۱/۰۱۱	۰/۸۰۰	۰/۵۴۲
	۲	−۰/۷۴۶	−۰/۳۵۳		۰/۹۱۵	۰/۶۳۸	
۱۰	۱	−۰/۵۵۵	−۰/۴۱۶	+۰/۰۷۹	۰/۶۷۳	۰/۵۶۴	۰/۳۶۰
	۲	−۰/۴۵۰	−۰/۲۵۴		۰/۵۶۸	۰/۴۳۰	
	۳	−۰/۴۵۱	−۰/۱۹۵		۰/۵۶۶	۰/۳۹۳	
	۴	−۰/۴۶۳	−۰/۱۴۶		۰/۵۷۲	۰/۳۶۶	
	۵	−۰/۴۸۱	−۰/۱۰۳		۰/۵۹۲	۰/۳۶۱	
۲۰	۱	−۰/۴۱۸	−۰/۳۴۹	+۰/۱۱۵	۰/۴۸۹	۰/۴۳۱	۰/۲۶۵
	۲	−۰/۲۹۵	−۰/۱۹۷		۰/۳۷۶	۰/۳۰۵	
	۳	−۰/۲۷۴	−۰/۱۴۶		۰/۳۵۸	۰/۲۷۳	
	۴	−۰/۲۶۴	−۰/۱۰۶		۰/۳۴۸	۰/۲۵۰	
	۵	−۰/۲۷۳	−۰/۰۸۴		۰/۳۵۴	۰/۲۴۱	
	۶	−۰/۲۷۹	−۰/۰۵۹		۰/۳۵۹	۰/۲۳۳	
	۷	−۰/۲۸۹	−۰/۰۳۹		۰/۳۶۹	۰/۲۳۲	
	۸	−۰/۳۰۱	−۰/۰۲۰		۰/۳۸۲	۰/۲۳۶	
	۹	−۰/۳۰۹	−۰/۰۰۲		۰/۳۹۰	۰/۲۳۷	
	۱۰	−۰/۳۱۳	−۰/۰۲۹		۰/۳۹۵	۰/۲۴۲	

جدول ۵: اریبی و جذر میانگین توان دوم خطای برآوردگرها در برآورد آنتروپی توزیع لاپلاس.

		اریبی			RMSE		
n	m	H_v	H_c	H_k	H_v	H_c	H_k
۵	۱	−۰/۹۳۹	−۰/۶۶۲	−۰/۲۶۵	۱/۱۱۳	۰/۸۹۱	۰/۵۷۷
	۲	−۰/۹۳۶	−۰/۵۴۳		۱/۰۶۹	۰/۷۵۱	
۱۰	۱	−۰/۶۰۰	−۰/۴۶۱	−۰/۱۴۶	۰/۷۱۷	۰/۶۰۶	۰/۳۷۴
	۲	−۰/۵۱۵	−۰/۳۱۹		۰/۶۳۱	۰/۴۸۵	
	۳	−۰/۵۴۱	−۰/۲۸۵		۰/۶۵۱	۰/۴۶۰	
	۴	−۰/۵۹۱	−۰/۲۷۵		۰/۶۹۱	۰/۴۵۱	
	۵	−۰/۶۵۲	−۰/۲۷۴		۰/۷۴۲	۰/۴۴۸	
۲۰	۱	−۰/۴۲۶	−۰/۳۵۶	−۰/۰۸۳	۰/۴۹۸	۰/۴۴۰	۰/۲۴۹
	۲	−۰/۳۱۲	−۰/۲۱۴		۰/۳۹۷	۰/۳۲۶	
	۳	−۰/۲۸۵	−۰/۱۵۷		۰/۳۷۵	۰/۲۹۰	
	۴	−۰/۲۸۸	−۰/۱۳۰		۰/۳۸۰	۰/۲۷۹	
	۵	−۰/۲۹۴	−۰/۱۰۵		۰/۳۸۸	۰/۲۷۴	
	۶	−۰/۳۱۱	−۰/۰۹۲		۰/۴۰۴	۰/۲۷۳	
	۷	−۰/۳۲۸	−۰/۰۷۸		۰/۴۱۹	۰/۲۷۱	
	۸	−۰/۳۵۴	−۰/۰۷۳		۰/۴۴۳	۰/۲۷۷	
	۹	−۰/۳۸۷	−۰/۰۷۶		۰/۴۷۲	۰/۲۸۰	
	۱۰	−۰/۴۲۱	−۰/۰۷۹		۰/۵۰۰	۰/۲۸۱	

جدول ۶: اریبی و جذر میانگین توان دوم خطای برآوردگرها در برآورد آنتروپی توزیع مقادیر غایی.

		اریبی			RMSE		
n	m	H_v	H_c	H_k	H_v	H_c	H_k
۵	۱	−۰/۹۰۱	−۰/۶۲۴	−۰/۲۰۲	۱/۰۴۶	۰/۸۲۰	۰/۴۹۹
	۲	−۰/۸۸۴	−۰/۴۹۲		۰/۹۹۷	۰/۶۷۴	
۱۰	۱	−۰/۵۸۷	−۰/۴۴۸	−۰/۰۹۵	۰/۶۷۹	۰/۵۶۳	۰/۳۱۱
	۲	−۰/۵۰۸	−۰/۳۱۲		۰/۵۹۲	۰/۴۳۵	
	۳	−۰/۵۴۴	−۰/۲۸۸		۰/۶۲۲	۰/۴۱۷	
	۴	−۰/۵۸۸	−۰/۲۷۱		۰/۶۵۷	۰/۴۰۰	
	۵	−۰/۶۳۳	−۰/۲۵۵		۰/۷۰۲	۰/۳۹۶	
۲۰	۱	−۰/۴۱۹	−۰/۳۵۰	−۰/۰۴۴	۰/۴۷۶	۰/۴۱۶	۰/۲۰۳
	۲	−۰/۳۱۲	−۰/۲۱۳		۰/۳۷۳	۰/۲۹۶	
	۳	−۰/۳۰۲	−۰/۱۷۴		۰/۳۶۴	۰/۲۶۸	
	۴	−۰/۳۱۶	−۰/۱۵۸		۰/۳۷۴	۰/۲۵۵	
	۵	−۰/۳۳۱	−۰/۱۴۲		۰/۳۸۷	۰/۲۴۶	
	۶	−۰/۳۴۹	−۰/۱۲۹		۰/۴۰۴	۰/۲۴۲	
	۷	−۰/۳۷۱	−۰/۱۲۱		۰/۴۲۵	۰/۲۴۰	
	۸	−۰/۳۹۸	−۰/۱۱۸		۰/۴۵۱	۰/۲۴۱	
	۹	−۰/۴۲۹	−۰/۱۱۷		۰/۴۸۰	۰/۲۴۶	
	۱۰	−۰/۴۵۲	−۰/۱۱۰		۰/۵۰۲	۰/۲۴۵	

با استفاده از شبیه‌سازی مونت کارلو به دست می‌آوریم. بدین صورت که ابتدا از توزیع نمایی با میانگین یک، نمونه‌ای به حجم n تولید و مقدار آماره آزمون را محاسبه می‌کنیم. اینکار را به دفعات زیاد انجام می‌دهیم. برای ۱۰۰۰۰ بار تکرار، چون $\alpha = ۰/۰۵ = \frac{۵۰۰}{۱۰۰۰۰}$، بنابراین ۹۵۰۰–امین آماره مرتب یعنی $T_v(۹۵۰۰)$ نقطه بحرانی آزمون در سطح ۰/۰۵ خواهد بود. جدول‌های ۷ تا ۹ مقادیر بحرانی سه آزمون معرفی شده را برای اندازه‌های مختلف نمونه نشان می‌دهند.

جدول ۷: مقادیر بحرانی T_v در سطح ۰/۰۵.

	n					
m	۵	۱۰	۱۵	۲۰	۲۵	۳۰
۱	۱/۴۶۹	۰/۹۰۵	۰/۷۲۵	۰/۶۳۸	۰/۵۶۷	۰/۵۳۰
۲	۱/۲۱۳	۰/۶۸۷	۰/۵۲۵	۰/۴۴۱	۰/۳۸۷	۰/۳۴۸
۳		۰/۶۶۹	۰/۴۹۴	۰/۳۹۸	۰/۳۴۲	۰/۳۰۷
۴		۰/۶۹۲	۰/۴۹۵	۰/۳۹۲	۰/۳۳۰	۰/۲۹۲
۵		۰/۷۴۶	۰/۵۱۱	۰/۳۹۴	۰/۳۲۸	۰/۲۹۰
۶			۰/۵۳۶	۰/۴۱۲	۰/۳۴۱	۰/۲۹۱
۷			۰/۵۶۵	۰/۴۳۲	۰/۳۴۶	۰/۲۹۶
۸				۰/۴۴۸	۰/۳۶۳	۰/۳۰۶
۹				۰/۴۸۲	۰/۳۸۰	۰/۳۱۹
۱۰				۰/۴۹۶	۰/۳۹۷	۰/۳۳۳

جدول ۸: مقادیر بحرانی T_c در سطح ۰/۰۵.

	n					
m	۵	۱۰	۱۵	۲۰	۲۵	۳۰
۱	۱/۱۹۲	۰/۷۶۷	۰/۶۳۳	۰/۵۶۸	۰/۵۱۲	۰/۴۸۴
۲	۰/۸۲۰	۰/۴۹۱	۰/۳۹۵	۰/۳۴۳	۰/۳۰۹	۰/۲۸۳
۳		۰/۴۱۳	۰/۳۲۳	۰/۲۷۰	۰/۲۴۰	۰/۲۲۲
۴		۰/۳۷۵	۰/۲۸۴	۰/۲۳۳	۰/۲۰۴	۰/۱۸۷
۵		۰/۳۶۸	۰/۲۵۹	۰/۲۰۵	۰/۱۷۷	۰/۱۶۴
۶			۰/۲۴۴	۰/۱۹۳	۰/۱۶۶	۰/۱۴۵
۷			۰/۲۳۲	۰/۱۸۲	۰/۱۴۶	۰/۱۲۹
۸				۰/۱۶۸	۰/۱۳۸	۰/۱۱۹
۹				۰/۱۷۱	۰/۱۳۱	۰/۱۱۲
۱۰				۰/۱۵۴	۰/۱۲۴	۰/۱۰۵

جدول ۹: مقادیر بحرانی T_k در سطح ۰/۰۵.

		n			
۵	۱۰	۱۵	۲۰	۲۵	۳۰
۰/۵۰۰۶	۰/۱۹۷۳	۰/۰۹۳۲	۰/۰۴۷۱	۰/۰۱۷۱	۰/۰۰۸۳

برای محاسبه توان هریک از این سه آزمون، تحت فرضیه جانشین نمونه‌ای به حجم n تولید و مقدار آماره آزمون را محاسبه می‌کنیم. اینکار را به تعداد ۱۰۰۰۰ بار انجام می‌دهیم. نسبت دفعاتی که آزمون رد می‌شود برآوردی از توان آزمون می‌باشد. برای مقایسه توان آزمون‌ها از فرضیه‌های مقابل زیر استفاده می‌کنیم.

الف) توزیع وایبل با تابع چگالی احتمال

$$f(x;\lambda,\beta)=\beta\lambda^{\beta}x^{\beta-1}\exp\{-(\lambda x)^{\beta}\} \qquad x\geq 0$$

ب) توزیع گاما با تابع چگالی احتمال

$$f(x;\lambda,\beta)=\frac{\lambda^{\beta}x^{\beta-1}\exp\{-\lambda x\}}{\Gamma(\beta)} \qquad x\geq 0$$

پ) توزیع لگ-نرمال با تابع چگالی احتمال

$$f(x;\mu,\sigma^2)=\frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\{-\frac{1}{2\sigma^2}(\ln x-\mu)^2\} \qquad x>0$$

از آنجا که برای بدست آوردن نقاط بحرانی آزمون‌ها از توزیع نمایی با میانگین یک داده تولید کردیم، در تمامی توزیع‌های بالا پارامترهای توزیع طوری انتخاب می‌شوند که امید ریاضی متغیر تصادفی برابر یک شود. بنابراین برای توزیع وایبل $\lambda=\Gamma(1+\frac{1}{\beta})$، برای توزیع گاما $\beta=\lambda$ و برای توزیع لگ-نرمال $\mu=-\frac{\sigma^2}{2}$ در نظر گرفته می‌شود. البته همانطور که می‌دانیم آزمون‌های معرفی شده آزمون‌هایی دقیق هستند و نقاط بحرانی این آزمون‌ها به مقدار λ، پارامتر توزیع نمایی بستگی ندارند، یعنی اگر از توزیع نمایی با میانگینی به غیر از یک، داده تولید کنیم مقادیر بحرانی آزمون‌ها تغییری نمی‌کنند. ما در اینجا از فرضیه‌های جانشینی استفاده کردیم که ابراهیمی و همکاران (۱۹۹۲) نیز برای مقایسه توان آزمون خود با آزمون‌های دیگر استفاده کرده‌اند. البته می‌توان فرضیه‌های جانشینی را در نظر گرفت که میانگین توزیع جانشین یک نباشد. ذکر این نکته ضروری است که در توزیع‌هایی مانند گاما و وایبل تنها پارامتر شکل در توان آزمون موثر است و به اینکه امید ریاضی برابر یک باشد

بستگی ندارد. بطور مثال اگر توزیع گاما با پارامتر شکل β و پارامتر مقیاس دلخواه λ را به عنوان فرضیه جانشین قرار دهیم خواهیم دید که توان آزمون با حالتی که فرضیه جانشین توزیع گاما با پارامتر شکل β و پارامتر مقیاس $\beta = \lambda$ باشد (میانگین یک است) برابر است. با این وجود ما نیز مانند ابراهیمی و همکاران عمل می‌کنیم و پارامترهای توزیع‌های جانشین را طوری انتخاب می‌کنیم که امید ریاضی متغیر تصادفی برابر یک شود.

جدول ۱۰: توان آزمون‌های T_v، T_c و T_k در مقابل توزیع گاما و در سطح ۰/۰۵.

n	β	T_v	T_c	T_k
۵	۲	۰/۱۶۷	۰/۱۶۰	۰/۱۸۳
	۳	۰/۳۰۳	۰/۲۹۱	۰/۳۳۴
	۴	۰/۴۳۵	۰/۴۳۸	۰/۴۷۰
۱۰	۲	۰/۳۱۵	۰/۳۰۸	۰/۳۴۰
	۳	۰/۶۲۷	۰/۶۰۳	۰/۶۷۹
	۴	۰/۸۲۲	۰/۸۰۹	۰/۸۷۰
۱۵	۲	۰/۴۳۱	۰/۴۲۹	۰/۴۹۸
	۳	۰/۸۰۲	۰/۸۰۵	۰/۸۶۷
	۴	۰/۹۴۸	۰/۹۴۵	۰/۹۷۷
۲۰	۲	۰/۵۰۲	۰/۴۹۹	۰/۶۳۴
	۳	۰/۸۸۹	۰/۸۸۳	۰/۹۵۵
	۴	۰/۹۸۲	۰/۹۸۳	۰/۹۹۶

جدول‌های ۱۰ تا ۱۲ توان آزمون‌ها را برای فرضیه‌های مقابل بیان شده برای ۱۰۰۰۰ بار شبیه‌سازی و سطح آزمون ۰/۰۵ نشان می‌دهند.

مقادیر m در T_v و T_c همان مقادیر پیشنهاد شده در ابراهیمی و همکاران (۱۹۹۲) است که برای حجم نمونه‌های ۵، ۱۰، ۱۵ و ۲۰ به ترتیب برابر ۲، ۳، ۴ و ۴ می‌باشند. همانطور که در جدول‌ها ملاحظه می‌شود توان آزمون T_k از توان دو آزمون دیگر بیشتر می‌باشد.

جدول ۱۱: توان آزمون‌های T_v، T_c و T_k در مقابل توزیع وایبل و در سطح ۰/۰۵.

n	β	T_v	T_c	T_k
۵	۲	۰/۳۴۹	۰/۳۴۸	۰/۳۷۶
	۳	۰/۷۰۸	۰/۶۸۹	۰/۷۵۳
	۴	۰/۹۰۵	۰/۸۹۷	۰/۹۳۰
۱۰	۲	۰/۶۸۱	۰/۶۷۴	۰/۷۴۸
	۳	۰/۹۸۲	۰/۹۸۰	۰/۹۹۱
	۴	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰
۱۵	۲	۰/۸۶۵	۰/۸۵۵	۰/۹۱۸
	۳	۰/۹۹۹	۰/۹۹۹	۱/۰۰۰
	۴	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰
۲۰	۲	۰/۹۳۳	۰/۹۲۷	۰/۹۷۹
	۳	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰
	۴	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰

جدول ۱۲: توان آزمون‌های T_v، T_c و T_k در مقابل توزیع لگ‌نرمال و در سطح ۰/۰۵.

n	μ	T_v	T_c	T_k
۵	−۰/۳	۰/۱۵۱	۰/۱۵۳	۰/۱۶۴
	−۰/۲	۰/۲۶۷	۰/۲۶۲	۰/۲۸۵
	−۰/۱	۰/۵۷۰	۰/۵۶۳	۰/۶۰۸
۱۰	−۰/۳	۰/۲۸۵	۰/۲۷۱	۰/۲۷۵
	−۰/۲	۰/۵۶۰	۰/۵۳۱	۰/۵۵۷
	−۰/۱	۰/۹۳۸	۰/۹۳۲	۰/۹۵۳
۱۵	−۰/۳	۰/۳۸۷	۰/۳۸۹	۰/۳۷۴
	−۰/۲	۰/۷۳۶	۰/۷۲۹	۰/۷۴۳
	−۰/۱	۰/۹۹۰	۰/۹۹۲	۰/۹۹۶
۲۰	−۰/۳	۰/۴۷۵	۰/۴۶۸	۰/۴۸۱
	−۰/۲	۰/۸۳۵	۰/۸۳۴	۰/۸۶۷
	−۰/۱	۱/۰۰۰	۰/۹۹۹	۱/۰۰۰

بحث و نتیجه‌گیری

در این مقاله ابتدا برآوردگرهای مختلف آنتروپی از نظر اریبی و جذر میانگین توان دوم خطا با یکدیگر مقایسه و نشان داده شد برآوردگرهای بومن و ابراهیمی و همکاران دارای اریبی و جذر میانگین توان دوم خطای کمتری نسبت به برآوردگر واسیچک می‌باشد و برآوردگر بومن (H_k) برای حجم نمونه‌های کوچک رفتار بهتری نسبت به برآوردگرهای دیگر دارد. در ادامه سه آزمون نمایی بودن بر مبنای آنتروپی ارائه و توان آنها با یکدیگر مقایسه شد و دیدیم که آزمون مبتنی بر برآوردگر H_k (برآوردگر آنتروپی بوسیله برآورد تابع چگالی) دارای توان بیشتری از توان آزمون‌های دیگر است. بنابراین برای انجام آزمون نمایی بودن یک متغیر تصادفی بر مبنای آنتروپی استفاده از آزمون T_k پیشنهاد می‌شود. ابراهیمی و همکاران (۱۹۹۲) نشان دادند که آزمون نمایی بر مبنای آنتروپی نمونه‌ای واسیچک از آزمون‌هایی مانند ون سوست (۱۹۶۹) و فینکلستین و اسچفر (۱۹۷۱) دارای توان بهتری است و با توجه به نتایج شبیه‌سازی توان آزمون‌های نمایی بودن بر مبنای آنتروپی و با استفاده از برآوردگرهای مختلف که در این مقاله انجام شده است، آزمون نمایی بودن براساس برآوردگر آنتروپی H_k نه تنها از دو آزمون نمایی دیگر بر مبنای آنتروپی دارای توان بالاتری است بلکه از آزمون‌هایی همچون ون سوست و فینکلستین و اسچفر نیز بهتر می‌باشد. بنابراین برای انجام آزمون نمایی بودن یک متغیر تصادفی، آزمون بر مبنای آنتروپی و با استفاده برآوردگر آنتروپی بومن H_k پیشنهاد می‌شود.

تقدیر و تشکر

نویسندگان از پیشنهادات ارزندهٔ داوران و هیئت تحریریهٔ محترم مجله که باعث ارائه بهتر این مقاله شد کمال تشکر را دارند. از حمایت مالی قطب علمی داده‌های ترتیبی و فضایی دانشگاه فردوسی مشهد نیز تقدیر و تشکر می‌شود.

مراجع

حبیبی راد، آ.، ارقامی، ن.ر. (۱۳۸۶)، آزمون متقارن بودن توزیع براساس آنتروپی ، مجله علوم آماری، جلد **۱**، شماره ۲، ۱۲۰–۱۰۹.

علیزاده نوقابی، ه.، علیزاده نوقابی، ر. (۱۳۸۷)، مقایسه توان آزمون‌های نیکویی برازش بر مبنای آنتروپی با سایر روشها، مجله علوم آماری، جلد **۲**، شماره ۱، ۱۱۳–۹۷.

Ahmad, I. A. and Alwasel, I. A. (1999), A Goodness of fit Test for Exponentiality Based on the Memoryless Property, *Journal of the Royal Statistical Society*, Ser. B, **61**, 681-689.

Alizadeh Noughabi, H. (2010), A New Estimator of Entropy and its Application in Testing Normality, to appear in *Journal of Statistical Computation and Simulation*.

Alizadeh Noughabi, H. and Arghami, N. R. (2010), Testing Exponentiality Using Transformed Data, to appear in *Journal of Statistical Computation and Simulation*.

Arizono, I. and Ohta, H. (1989), A test for normality based on Kullback-Leibler information, *American Statistician*, **43**, 20-22.

Ascher, S. (1990), A Survey of Tests for Exponentiality, *Communications in Statistics-Theory and Methods*, **19**, 1811-1825.

Bowman, A. W. (1992), Density Based Tests for Goodness-of-fit, *Journal of Statistical Computation and Simulation*, **40**, 1-13.

Dudewicz, E. and Van der Meulen E. (1981), Entropy Based Tests of Uniformity, *Journal of the American Statistical Association*, **76**, 967-974.

Ebrahimi, N., Habibullah, M. and Soofi, E. S. (1992), Testing Exponentiality Based on Kullback-Leiber Information, *Journal of the Royal Statistical Society*, Ser. B, **54**, 739-748.

Ebrahimi, N., Pflughoeft, K. and Soofi, E. S. (1994), Two Measures of Sample Entropy, *Statistics and Probability Letters*, **20**, 225-234.

Finkelstein, J. and Schafer, R. E. (1971), Imported Goodness of Fit Tests, *Biometrika*, **58**, 641-645.

Gokhale D. V. (1983), On Entropy-based Goodness-of-fit Tests, *Computatinal Statistics and Data Analysis*, **1**, 157-165.

Grzegorzewski, P. and Wieczorkowski, R. (1999), Entropy Based Goodness-of-fit Test for Exponentiality, *Communications in Statistics-Theory and Methods*, **28**, 1183-1202.

Henze, N. and Meintanis, S. G. (2005), Recent and Classical Tests for Exponentiality: A Partial Review with Comparison, *Metrika*, **62**, 29-45.

Park, S. (2005), Testing Exponentiality Based on the Kullback-Leibler Information With the Type II Censored Data, *IEEE Transactions on Reliability*, **54**, 22-26.

Park, S. and Park, D. (2003), Correcting Moments for Goodness-of-fit Tests Based on Two Entropy Estimates, *Journal of Statistical Computation and Simulation*, **73**, 685-694.

Senoglu, B. and Surucu, B. (2004), Goodness-of-fit Tests Based on Kullback-Leibler Information, *IEEE Transactions on Reliability*, **53**, 357-361.

Silverman, B. W. (1986), *Density Estimation for Statistics and Data Analysis*, Chapman and Hall, London.

Song, K. S. (2002), Goodness-of-Fit Tests Based on Kullback-Leibler Discrimination Information, *IEEE Transactions on Information Theory*, **48**, 1103-1117.

Taufer, E. (2002), On Entropy based Tests for Exponentiality, *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, **32**, 189-200.

Van Soest, J. (1969), Some Goodness of Fit Tests for the Exponential Distribution, *Statistica Neerlandica*, **23**, 41-51.

Vasicek, O. (1976), A Test for Normality Based on Sample Entropy, *Journal of the Royal Statistical Society*, Ser. B, **38**, 54-59.