

مجله علوم آماری، بهار و تابستان ۱۳۸۸

جلد ۳، شماره ۱، ص ۴۷-۵۸

ویژگی‌های توزیع چوله t -نرمال و مدل‌بندی داده‌های آلودگی تالاب شادگان

آمنه خردمندی^۱، ناهید سنجرى فارسى پور^۲

^۱گروه آمار، دانشگاه تربیت مدرس

^۲گروه ریاضی، دانشگاه الزهرا

تاریخ دریافت: ۱۳۸۸/۳/۱ تاریخ آخرین بازنگری: ۱۳۸۸/۷/۲

چکیده: توزیع چوله t -نرمال که توسط گامز و همکاران (۲۰۰۷) معرفی شده است، دارای کم‌ترین کلفت‌تر و ضرایب چولگی و کشیدگی با برد وسیع‌تر نسبت به توزیع چوله-نرمال آزالینی (۱۹۸۵) است. برخی از ویژگی‌های این توزیع توسط گامز و همکاران (۲۰۰۷) و لاین و همکاران (۲۰۰۹) مطرح گردیده است. در این مقاله ویژگی‌های دیگری از توزیع چوله t -نرمال مورد بررسی قرار گرفته و چهار روش برای شبیه‌سازی از این توزیع ارائه شده است. سپس داده‌های میزان آلودگی تالاب شادگان به فلز وانادیوم با استفاده از توزیع چوله t -نرمال مدل‌بندی شده‌اند.

واژه‌های کلیدی: توزیع چوله-نرمال، توزیع چوله t -نرمال، پارامتر چولگی، آلودگی به وانادیوم.

آدرس الکترونیک مسئول مقاله: آمنه خردمندی، kheradmandi@modares.ac.ir
کد موضوع‌بندی ریاضی (۲۰۰۰): ۶۲E۱۵، ۶۰E۰۵

۱ مقدمه

برای مدل‌بندی داده‌های نامتقارن آزالینی (۱۹۸۵) توزیع چوله-نرمال را با تابع چگالی $f(t; \lambda) = 2\phi(t)\Phi(\lambda t)$, $t \in R$ معرفی نمود، که در آن $\lambda \in R$ پارامتر چولگی است. این توزیع به صورت $SN(\lambda)$ نمایش داده می‌شود. ویژگی‌های توزیع چوله-نرمال توسط آزالینی (۱۹۸۶)، هنز (۱۹۸۶)، آزالینی و دالاوله (۱۹۹۶)، آزالینی و کاپیتانو (۱۹۹۹)، برانکو و دی (۲۰۰۱)، آرنولد و بیور (۲۰۰۲) و آزالینی و چیوگنا (۲۰۰۴) مورد بررسی قرار گرفته شده است. با توجه به محدودیت ضرایب چولگی و کشیدگی توزیع SN و همچنین باریکی دم‌های این توزیع، گامز و همکاران (۲۰۰۷) توزیع چوله t-نرمال را معرفی کردند، که دارای دم‌های کلفت‌تر و ضرایب چولگی و کشیدگی با برد وسیع‌تر می‌باشد. تابع چگالی توزیع چوله t-نرمال به صورت

$$f(x; \nu, \lambda) = 2\psi(x; \nu)\Phi(\lambda x), \quad x \in R, \lambda \in R$$

است. که در آن $\psi(x; \nu)$ تابع چگالی توزیع t-استیودنت با ν درجه آزادی، Φ تابع توزیع نرمال استاندارد و λ پارامتر چولگی است. برخی از ویژگی‌های این توزیع که به صورت $StN(\nu, \lambda)$ نمایش داده می‌شود، توسط گامز و همکاران (۲۰۰۷) و لاین و همکاران (۲۰۰۹) مطرح گردیده است. در بخش دوم این مقاله نیز برخی دیگر از ویژگی‌های توزیع چوله t-نرمال بررسی شده و چهار روش برای شبیه‌سازی از توزیع چوله t-نرمال در بخش سوم ارائه گردیده است. سپس در بخش چهارم با استفاده از این توزیع داده‌های آلودگی به فلز وانادیوم در تالاب شادگان مدل‌بندی شده‌اند.

۲ ویژگی‌های توزیع چوله t-نرمال

گشتاورها و برد ضرایب چولگی و کشیدگی به ازاء مقادیر مختلف ν توسط گامز و همکاران (۲۰۰۷) تعیین شده‌اند. همچنین وانگ و همکاران (۲۰۰۴) نشان دادند اگر $X \sim StN(\nu, \lambda)$, $T \sim t(\nu)$ و $\tau(\cdot)$ تابع زوج دلخواهی باشد آنگاه $\tau(X)$ و $\tau(T)$

آ. خردمندی، ن. سنجرى فارسى پور: ویژگی‌های توزیع چوله t -نرمال ۴۹

هم توزیع هستند. با ایده از ویژگی‌های توزیع چوله نرمال ویژگی‌های دیگر توزیع چوله t -نرمال نیز در لم‌های زیر ارائه شده‌اند.

لم ۱: فرض کنید متغیر تصادفی X دارای توزیع $StN(\nu, \lambda)$ باشد، در این صورت:

الف: اگر $\nu = 1$ ، آنگاه X دارای توزیع چوله کوشی - نرمال است.

ب: $-X \sim StN(\nu, -\lambda)$.

ج: $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \Psi\psi(x; \nu)\Phi(\lambda x) = \Psi\psi(x; \nu)I_{(0, +\infty)}(x)$ یعنی توزیع X به توزیع نیم- t راست میل می‌کند.

د: $\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} \Psi\psi(x; \nu)\Phi(\lambda x) = \Psi\psi(x; \nu)I_{(-\infty, 0)}(x)$ یعنی توزیع X به توزیع نیم- t چپ میل می‌کند.

برهان: اثبات بند الف با جایگذاری $\nu = 1$ در تابع چگالی چوله t -نرمال بدیهی است. برای اثبات بند ب داریم:

$$\begin{aligned} f_{-X}(x) &= f_X(-x) \\ &= \Psi\psi(-x; \nu)\Phi(\lambda(-x)) \\ &= \Psi\psi(x; \nu)\Phi((-\lambda)x). \end{aligned}$$

همچنین برای اثبات بند ج داریم:

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \Psi\psi(x; \nu)\Phi(\lambda x) &= \Psi\psi(x; \nu) \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\lambda x} \phi(t) dt \\ &= \Psi\psi(x; \nu)I_{(0, \infty)}(x). \end{aligned}$$

اثبات بند د نیز به صورت مشابه انجام می‌شود.

تعریف ۱: تابع توزیع $F(x)$ قویاً تک مدی نامیده می‌شود هرگاه حاصل پیچش آن با هر تابع توزیع تک مدی دیگر تابعی تک مدی باشد.

کارلین (۱۹۶۸) نشان داد تابع توزیع ناتباهیده F قویاً تک مدی می‌باشد اگر و تنها اگر لگاریتم تابع چگالی متناظر آن در هر فاصله (a, b) ، به طوری که $\int_a^b f(x) dx = 1$ ، تابعی مقعر^۱ باشد یا به عبارت دیگر مشتق دوم لگاریتم تابع

^۱ Concave Function

۵۰ مجله علوم آماری، بهار و تابستان ۱۳۸۸، جلد ۳، شماره ۱، ص ۴۷-۵۸

چگالی آن به ازای تمام مقادیر دامنه‌اش منفی باشد.

لم ۲ : تابع توزیع چوله t -نرمال به ازای هر مقدار ثابت λ قویاً تک مدی نیست.
برهان : برای اثبات کافی است نشان داده شود $\frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln f(x; \nu, \lambda)$ به ازای برخی مقادیر x نامنفی است.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln f(x; \nu, \lambda) &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln \psi(x; \nu) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln \Phi(\lambda x) \\ &= \frac{-(\nu + 1)}{(\nu + x^2)^2} [\nu - x^2] + \frac{-\lambda^2 \phi(\lambda x)}{\Phi(\lambda x)} \left[\frac{\phi(\lambda x)}{\Phi(\lambda x)} + \lambda x \right] \quad (1) \end{aligned}$$

آزایینی (۱۹۸۵) در فرآیند اثبات قویاً تک مدی بودن توزیع چوله-نرمال نشان داد عبارت دوم سمت راست تساوی (۱) به ازای هر $x \in R$ منفی است، اما عبارت اول به ازای $x^2 > \nu$ منفی و به ازای $x^2 \leq \nu$ مثبت می‌باشد. حال اگر مقدار $|\lambda x|$ به اندازه کافی بزرگ شود به طوری که $\phi(\lambda x)$ صفر شود، آن‌گاه عبارت دوم رابطه (۱) نیز به صفر میل می‌کند و به ازای مقادیر $x^2 \leq \nu$ تساوی (۱) غیرمنفی می‌شود. همانطور که در شکل ۱ نیز ملاحظه می‌شود، به ازای مقادیر مختلف ν ، مقدار $\frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln f(x; \nu, \lambda)$ به ازای برخی مقادیر x نامنفی است.

لم زیر ارتباط بین تابع توزیع چوله t -نرمال و تابع توزیع t -استیودنت را بیان می‌کند.

لم ۳ : اگر $\Psi(t; \nu)$ تابع توزیع t -استیودنت با ν درجه آزادی و $F(x; \nu, \lambda)$ تابع توزیع چوله t -نرمال با پارامترهای (ν, λ) باشد، آنگاه

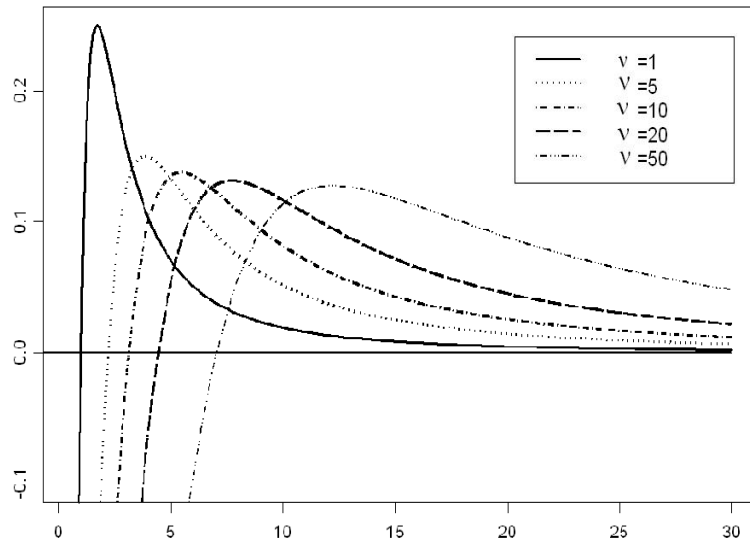
$$F(x; \nu, \lambda) = \Psi(x; \nu) - 2W(x; \nu, \lambda)$$

که در آن $W(x; \nu, \lambda) = \int_x^\infty \int_0^{\lambda t} \psi(t; \nu) \phi(u) du dt$ است.

برهان : با توجه به اینکه تابع توزیع چوله t -نرمال به صورت

$$\begin{aligned} F(x; \nu, \lambda) &= \int_{-\infty}^x 2\psi(t; \nu) \Phi(\lambda t) dt \\ &= 2 \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^{\lambda t} \psi(t; \nu) \phi(u) du dt \end{aligned}$$

آ. خردمندی، ن. سنجری فارسی پور: ویژگی های توزیع چوله t -نرمال ۵۱



شکل ۱: نمودار $\frac{\partial \ln f(x; \nu, \lambda)}{\partial \nu}$ به ازای مقادیر مختلف ν

است، داریم:

$$\begin{aligned} \Psi(x; \nu) &= \int_{-\infty}^x \psi(t; \nu) dt \\ &= \int_{-\infty}^x \psi(t; \nu) \left\{ \int_{-\infty}^{\lambda t} \phi(u) du + \int_{\lambda t}^{\infty} \phi(u) du \right\} dt \\ &= \frac{1}{\nu} F(x; \nu, \lambda) + \int_{-\infty}^x \int_{\lambda t}^{\infty} \psi(t; \nu) \phi(u) du dt \\ &\quad + \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^{\lambda t} \psi(t; \nu) \phi(u) du dt \\ &= \frac{1}{\nu} F(x; \nu, \lambda) + \int_{-\infty}^x \int_{\lambda t}^{\infty} \psi(t; \nu) \phi(u) du dt + \frac{1}{\nu} \Psi(x; \nu) \end{aligned}$$

بنابراین

$$F(x; \nu, \lambda) = \Psi(x; \nu) - \nu \int_{-\infty}^x \int_{\lambda t}^{\infty} \psi(t; \nu) \phi(u) du dt$$

۵۲ مجله علوم آماری، بهار و تابستان ۱۳۸۸، جلد ۳، شماره ۱، ص ۴۷-۵۸

$$\begin{aligned}
 &= \Psi(t; \nu) + \Psi \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\lambda t} \psi(t; \nu) \phi(u) du dt \right. \\
 &- \left. \int_x^{\infty} \int_0^{\lambda t} \psi(t; \nu) \phi(u) du dt \right\} \\
 &= \Psi(t; \nu) + \Psi \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t; \nu) \left\{ \Phi(\lambda t) - \frac{1}{\lambda} \right\} dt \right\} - \Psi W(x, \nu, \lambda) \\
 &= \Psi(t; \nu) - \Psi W(x, \nu, \lambda).
 \end{aligned}$$

لم ۴ : اگر $F(x; \nu, \lambda)$ تابع توزیع چوله-نرمال با پارامترهای (ν, λ) باشد آنگاه
 $F(x; \nu, -\lambda) = 1 - F(-x; \nu, \lambda)$

برهان : با توجه به آن که

$$\begin{aligned}
 \Psi W(x, \nu, \lambda) &= \Psi(x; \nu) - F(x; \nu, \lambda) \\
 &= \int_{-\infty}^x \psi(t; \nu) dt - \int_{-\infty}^x \Psi \psi(t; \nu) [1 - \Phi(-\lambda t)] dt \\
 &= - \left\{ \int_{-\infty}^x \psi(t; \nu) dt - \int_{-\infty}^x \Psi \psi(t; \nu) \Phi(-\lambda t) dt \right\} \\
 &= - \{ \Psi(x; \nu) - F(x; \nu, -\lambda) \} \\
 &= - \Psi W(x, \nu, -\lambda)
 \end{aligned}$$

داریم

$$\begin{aligned}
 1 - F(-x; \nu, \lambda) &= 1 - [\Psi(-x; \nu) - \Psi W(x, \nu, \lambda)] \\
 &= \Psi(x; \nu) + \Psi W(x, \nu, \lambda) \\
 &= \Psi(x; \nu) - \Psi W(x, \nu, -\lambda) \\
 &= F(x; \nu, -\lambda).
 \end{aligned}$$

آ. خردمندی، ن. سنجرى فارسى پور: ویژگی‌های توزیع چوله t -نرمال ۵۳

۳ روش‌های ساخت توزیع چوله t -نرمال

در این بخش چهار روش ساخت متغیرهای تصادفی دارای توزیع چوله t -نرمال ارائه می‌شود. لم ۵ حالت خاصی از روش رد و پذیرش آزالینى (۱۹۸۵) و لم ۶ تعمیمی از روش مذکور در لم ۵ برای ساخت متغیرهای تصادفی از توزیع چوله می‌باشند. همچنین با ایده از روش وانگ و همکاران (۲۰۰۴) در حالت یک متغیره، دو روش دیگر برای ساخت متغیر تصادفی از توزیع چوله t -نرمال در لم‌های ۷ و ۸ ارائه شده‌اند، که به دلیل سراسر بودن، از ارائه اثبات آن‌ها اجتناب گردیده است.

لم ۵: فرض کنید $Z \sim N(0, 1)$ و $T \sim t_\nu$ مستقل باشند در این صورت

$$X \equiv T | \lambda T > Z \sim StN(\nu, \lambda).$$

با اجرای الگوریتم زیر می‌توان مقادیر تصادفی از توزیع StN تولید نمود.

- (۱) مقدار تصادفی z از توزیع نرمال استاندارد تولید شود.
- (۲) مقدار تصادفی t از توزیع t_ν تولید شود.
- (۳) اگر $z > \lambda t$ آنگاه $x = t$ ، در غیر این صورت به مرحله یک برگشت شود.

لم ۶: فرض کنید $Z \sim N(0, 1)$ و $T \sim t_\nu$ مستقل باشند. آنگاه متغیر تصادفی

$$X = \begin{cases} T & Z \leq \lambda T \\ -T & Z > \lambda T \end{cases}$$

دارای توزیع $StN(\nu, \lambda)$ است.

با اجرای الگوریتم زیر می‌توان مقادیر تصادفی از توزیع StN تولید نمود.

- (۱) مقدار تصادفی z از توزیع نرمال استاندارد تولید شود.
- (۲) مقدار تصادفی t از توزیع t_ν تولید شود.
- (۳) اگر $z \leq \lambda t$ آنگاه $x = t$ ، در غیر این صورت $x = -t$.

۵۴ مجله علوم آماری، بهار و تابستان ۱۳۸۸، جلد ۳، شماره ۱، ص ۴۷-۵۸

لم ۷: فرض کنید متغیرهای تصادفی $T \sim t_\nu$ و $U \sim U(0, 1)$ مستقل باشند. در این صورت

$$X \equiv T|U \leq \Phi(\lambda T) \sim StN(\nu, \lambda).$$

لم ۸: فرض کنید متغیرهای تصادفی $T \sim t_\nu$ و $U \sim U(0, 1)$ مستقل باشند. آن‌گاه متغیر تصادفی

$$X = \begin{cases} T & U \leq \Phi(\lambda T) \\ -T & U > \Phi(\lambda T) \end{cases}$$

دارای توزیع $StN(\nu; \lambda)$ است.

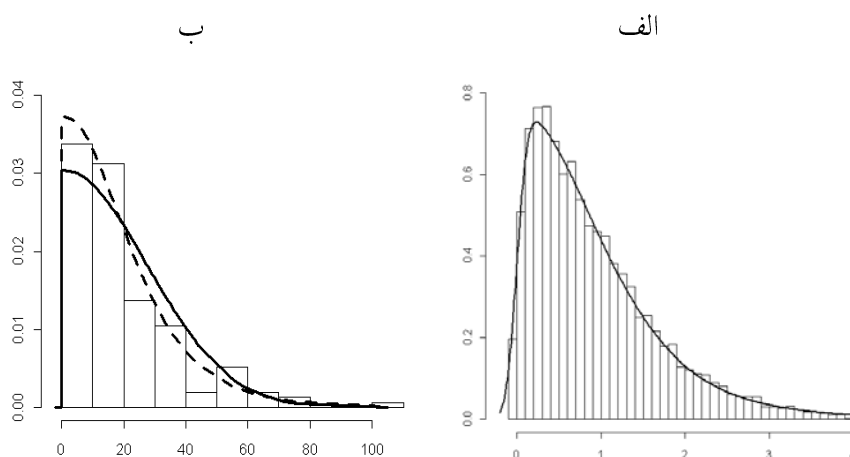
اکنون می‌توان با استفاده از لم‌های ۵ تا ۸ مقادیر تصادفی از توزیع چوله t -نرمال تولید نمود. شکل ۱ (الف) نمودار توزیع $StN(5, 10)$ و هیستوگرام مقادیر تولید شده از آن با استفاده از لم ۶ را نشان می‌دهد. همان‌طور که ملاحظه می‌شود توزیع داده‌های تولید شده بر نمودار توزیع مذکور منطبق می‌باشد.

۴ مدل‌بندی میزان آلودگی در تالاب شادگان

حمل و نقل و بسیاری از فعالیت‌های صنعتی مرتبط با نفت خام منابعی از آلودگی عمومی در بسیاری از بخش‌های جهان از جمله خلیج فارس می‌باشند. نابودی پایانه‌ها و آسیب دیدن تانکرهای نفتی در ادامه اشغال کویت توسط عراق در سال ۱۹۹۱ موجب آزاد شدن مقدار زیادی نفت خام در ناحیه خلیج فارس گردید. تالاب شادگان با مساحتی بالغ بر ۲۹۶۰۰۰ هکتار در جنوب غربی ایران و در رأس خلیج فارس قرار دارد. بارش باران سیاه و ته‌نشینی گرده‌های حاصل از سوختن نفت سیاه کویت باعث آلودگی بسیاری از بخش‌های ایران از جمله تالاب شادگان گردید. از جمله مهمترین فلزات سنگین موجود در نفت خام فلز وانادیوم می‌باشد. در این بخش به مدل‌بندی داده‌های حاصل از مطالعه میزان آلودگی تالاب شادگان به فلز وانادیوم پرداخته می‌شود. شاخص‌های توصیفی این داده‌ها در جدول ۱ ارائه

آ. خردمندی، ن. سنجرى فارسى پور: ویژگی‌های توزیع چوله t -نرمال ۵۵

شده‌اند. همان طور که ملاحظه می‌شود ضرایب چولگی و کشیدگی بیانگر نامتقارن بودن توزیع داده‌ها هستند. لذا اقدام به برازش دو توزیع چوله-نرمال و چوله t -نرمال به داده‌ها نموده و نیکویی برازش آن‌ها با یکدیگر مقایسه می‌شود.



شکل ۲: (الف): نمودار تابع چگالی $StN(5, 10)$ و هیستوگرام مقادیر تولید شده از آن (ب): هیستوگرام داده‌های میزان فلز وانادیوم و توزیع‌های SN (خط ممتد) و StN (خط چین) برازش داده شده به داده‌ها

برآورد ماکسیمم درست‌نمایی پارامترها و مقادیر آماره کلموگروف-اسمیرنوف و تابع لگاریتم درست‌نمایی داده‌های فلز وانادیوم برای توزیع‌های چوله-نرمال، چوله t -نرمال در جدول ۲ ارائه شده‌اند. شکل ۲ (ب) نیز هیستوگرام داده‌های آلودگی فلز وانادیوم را به همراه نمودار توزیع‌های چوله-نرمال و چوله t -نرمال نمایش می‌دهد. همان طور که ملاحظه می‌شود، آزمون نیکویی-برازش کلموگروف-اسمیرنوف برای هر دو توزیع چوله-نرمال و چوله t -نرمال برای داده‌ها در سطح $\alpha = 0.01$ معنی دار هستند. اما تابع لگاریتم درست‌نمایی مقدار بزرگتری را برای توزیع چوله t -نرمال نسبت به توزیع چوله-نرمال اختیار نموده است. این نتایج بیانگر این هستند که هر دو توزیع به داده‌ها قابل برازش هستند، اما توزیع چوله t -نرمال برازش محتمل‌تری نسبت به توزیع چوله-نرمال به داده‌های میزان فلز وانادیوم دارد.

۵۶ مجله علوم آماری، بهار و تابستان ۱۳۸۸، جلد ۳، شماره ۱، ص ۴۷-۵۸

جدول ۱: مقادیر آماره‌های توصیفی داده‌های آلودگی فلز وانادیوم

ضریب کشیدگی	ضریب چولگی	انحراف استاندارد	میانگین	تعداد
۳/۴۵۰۳۴	۱/۶۸۶۳۲۳	۱۷/۶۴۲۸۵	۲۰/۵۶۶	۱۵۴

جدول ۲: مقادیر برآورد پارامترها، آماره آزمون کلموگروف-اسمیرنوف (K.S.S) و لگاریتم درستنمایی داده‌های وانادیوم

پارامترها	SN	StN
$\hat{\nu}$	-	۴/۶۴۰۳۶۰
$\hat{\lambda}$	۱/۲۷۰۷۳۰e+۰۶	۱/۸۵۳۱۹۶e+۰۶
$\hat{\xi}$	۹/۹۹۹۱۲۰e-۰۱	۹/۹۹۹۴۹۰e-۰۱
$\hat{\omega}$	۲/۶۳۰۲۶۹e+۰۱	۲/۰۳۳۹۶۳e+۰۱
K.S.S	۰/۱۱۹۴	۰/۰۴۵۶
loglikelihood	-۶۱۵/۳۲۹	-۶۱۰/۴۴۲۲

۵ بحث و نتیجه‌گیری

برخی ویژگی‌های توزیع چوله-نرمال بطور مشابه برای توزیع چوله t-نرمال نیز برقرار می‌باشند. اما ویژگی‌هایی مانند قویاً تک مدی بودن برای توزیع چوله t-نرمال برقرار نمی‌باشد. همچنین همان‌طور که در مثال کاربردی نشان داده شده است چون توزیع چوله t-نرمال دارای دمی کلفت‌تر و برد وسیع‌تری از ضرایب چولگی و کشیدگی نسبت به توزیع چوله-نرمال است، برای برخی از داده‌های نامتقارن، می‌تواند برازش بهتری نسبت به توزیع چوله-نرمال داشته باشد.

تقدیر و تشکر

مولفین از داوران و هیئت تحریریه محترم مجله علوم آماری قدردانی و تشکر می‌کنند.

آ. خردمندی، ن. سنجری فارسی پور: ویژگی‌های توزیع چوله t -نرمال ۵۷.....

مراجع

- Arnold B. C., and Beaver, R. J. (2002). Skewed Multivariate Models Related to Hidden Truncation and/or Selective Reporting. *Test*, **11**, 7-54.
- Azzalini, A., (1985). A Class of Distribution which Includes the Normal Ones. *Scandinavian Journal of Statistics*, **12**, 171-178.
- Azzalini, A., (1986). Further Results on a Class of Distributions which Includes the Normal Ones. *Statistica*, **46**, 199-208.
- Azzalini, A., Chiogna, M., (2004). Some Results on the Stress-strength Model for Skew Normal Variate. *Metron LXII*, 315-326.
- Azzalini, A., Capitanio, A., (2003). Distributions Generated by Perturbation of Symmetry with Emphasis on a Multivariate Skew t Distribution. *Journal of the Royal Statistical Society: Series B*, **65**, 367-389.
- Azzalini, A., Dalla Valla, A., (1996). The multivariate Skew-Normal Distribution. *Biometrika*, **83**, 715-726.
- Branco, M., Dey, D. K., (2001). A General Class of Multivariate Elliptical Distribution. *Journal of Multivariate Analysis.*, **79**, 99-113.
- Gomez, H. W., Venegas, O., Bolfarine, H., (2007). Skew-symmetric Distributions Generated by the Distribution Function of the Normal Distribution. *Environmetrics*. **18**, 395-407.
- Henze, N. A., (1986). A Probabilistic Representation of the Skew-normal Distribution. *Scandinavian Journal of Statistics*, **13**, 271-275.

۵۸ مجله علوم آماری، بهار و تابستان ۱۳۸۸، جلد ۳، شماره ۱، ص ۴۷-۵۸

Karlin, S., (1968). Total positivity, *Stanford. Stanford University Press*.

Lin, J. G., Xie, F. C., Wei, B. C., (2009). Statistical Diagnostics for Skew-t-normal Nonlinear Models. *Communication in Statistics-Simulation and Computation*, **38**, 2096-2110.

Wang , J., Boyer, J., Genton, M. G., (2004). A Skew-symmetric Representation of Multivariate Distributions. *Statistica Sinica*, **14**, 1259-1270.