مجله علوم آماری، بهار و تابستان ۱۳۸۹
جلد ۴، شماره ۱، ص ۱-۲۰

مقایسه ملاک اطلاع آکائیک و آزمون کاکس در مدل‌های غیرآشیانی

عبدالرضا سیاره[۱]، رئوف عبیدی[۲]
[۱] گروه آمار، دانشگاه رازی-کرمانشاه- [۲] دانشگاه آزاد اسلامی اهواز

تاریخ دریافت: ۱۳۸۸/۱۱/۱۵ تاریخ آخرین بازنگری: ۱۳۸۹/۶/۱۲

چکیده : ملاک اطلاع آکائیک به طور گسترده‌ای برای انتخاب مدل به کار گرفته می‌شود، اما مقدار عددی آن تفسیر دقیقی ندارد. آزمون کاکس که تعمیمی از آزمون نسبت درستنمایی برای انتخاب مدل از بین مدل‌های غیرآشیانی است یکی از معدود آزمون‌ها برای آزمون فرضیه‌های غیرآشیانی است. هنگامی که مدل درست داده‌ها مجهول است، براساس ملاک اطلاع آکائیک یکی از مدل‌های رقیب انتخاب می‌شود. اما با قاطعیت نمی‌توان گفت که مدل انتخاب شده به وسیله این ملاک تا چه اندازه برآورد مناسبی برای مدل درست است. زیرا مشخص نیست که مدل خوب-توصیف شده و یا بد-توصیف شده است. در این مقاله ملاک اطلاع آکائیک و آزمون فرضیه کاکس و توانایی آن‌ها در ممیزی بین مدل‌ها مورد بررسی قرار گرفته است و به کمک شبیه‌سازی به بررسی این موضوع پرداخته می‌شود که اگر براساس ملاک آکائیک، مدلی را به عنوان برآورد مدل درست بپذیریم آیا آزمون کاکس قدرت تشخیص مدل بهتر را دارد؟ همچنین به موضوع تعیین یک مجموعه از مدل‌های رقیب پرداخته و روشی برای انتخاب این مجموعه پیشنهاد می‌شود.

آدرس الکترونیک مسئول مقاله: عبدالرضا سیاره، asayyareh@razi.ac.ir
کد موضوع‌بندی ریاضی (۲۰۱۰): ۶۲F۹۹

واژه‌های کلیدی : آزمون کاکس، مدل‌های غیرآشیانی، ملاک اطلاع آکائیک، ملاک کولبک-لیبلر

۱ مقدمه

یکی از مسائل مورد توجه آمارشناسان، مدل‌بندی آماری داده‌ها با استفاده از ملاک اطلاع آکائیک[۱] (AIC)، (آکائیک ۱۹۷۳) است. آکائیک در معرفی ملاک خود فرض کرد که مجموعه مدل‌های رقیب، شامل مدل درست داده‌ها است. این موضوع مورد انتقاد آمارشناسان قرار گرفت. سپس آکائیک (۱۹۷۴) به این نتیجه رسید که اگر مدل درست داده‌ها در مجموعه مدل‌های رقیب وجود نداشته باشد ولی به آن نزدیک باشد، باز هم AIC کارائی لازم را برای انتخاب مدل مناسب دارد. زیرا می‌توان میزان اریبی لگاریتم درستنمایی مدل تحت بررسی را با تعداد پارامترهای مجهول آن مدل تقریب زد. بر این اساس تاکوچی (۱۹۷۶) این ملاک را به حالتی که مجموعه مدل‌های رقیب شامل مدل درست داده‌ها نباشد نیز تعمیم داد و آن را TIC نامید. با این وجود برنهام و آندرسن (۲۰۰۲) استفاده از AIC را پیشنهاد کردند. ملاک TIC تنها در حالتی به کار می‌رود که حجم نمونه خیلی بزرگ باشد تا بتوان اریبی لگاریتم درستنمایی را به خوبی محاسبه کرد.

اگر مجموعه مدل‌های رقیب شامل مدل درست داده‌ها باشد، مدل انتخاب شده با ملاک AIC، همان مدل درست داده‌ها است. شوارتس (۱۹۷۸) ملاک اطلاع بیزی[۲] (BIC) را معرفی کرد. شیمودایرا (۱۹۹۸) با استفاده از آزمون فرضیه نسبی[۳] و ارتباط آن با AIC، مجموعه‌ای از مدل‌های رقیب را ساخت که در سطح معنی‌داری آزمون، به طور معادل بیشترین نزدیکی را به مدل درست داده‌ها دارند. کاکس (۱۹۶۲) آزمونی را معرفی کرد که توسیع آزمون نسبت درستنمایی برای دو مدل غیرآشیانی است. وونگ (۱۹۸۹) آزمون انتخاب مدل غیرآشیانی برای داده‌های کامل را معرفی کرد. فرضیه صفر این آزمون، معادل بودن دو مدل رقیب غیرآشیانی از نظر

---

۱ Akaike Information Criterion

۲ Bayesian Information Criterion

۳ Relative Hypothesis Testing

نزدیکی به مدل درست داده‌ها است. هافیدی و همکاران (۲۰۰۷) ملاک آکائیک را برای انتخاب مدل با داده‌های گمشده تعمیم دادند. بزدگان (۲۰۰۰ و ۱۹۹۰) به مطالعه جمله تاوان در ملاک آکائیک پرداخت و با استفاده از مفهوم اطلاع آماری ملاک انتخاب مدل دیگری پیشنهاد کرد. یکی از مشکلات AIC، انتخاب مدل با بیش‌برآورد است. از طرفی این ملاک نسبت به انحنای مدل‌ها حساس نیست. بر این اساس بزدگان (۱۹۹۰) با به کارگیری ماتریس کوواریانس به عنوان جمله تاوان، ملاک انتخاب مدل جدیدی را برای مدل‌های غیرخطی معرفی کرد. جنیوس و استرازرا (۲۰۰۰) دو آماره وونگ و کاکس را بررسی نموده و نتایج این دو آزمون را مقایسه کردند. برآورد تفاضل مخاطره‌های کولبک-لیبلر برای داده‌های سانسوریده از راست نوع II تحت مدل‌های غیرآشیانی توسط سیاره و ترکمان (۱۳۸۸) مورد بررسی قرار گرفت. کومانژ و همکاران (۲۰۰۸) تفاضل موزون ملاک‌های آکائیک را برای برآورد تفاضل‌های مقدار مورد انتظار توابع مخاطره کولبک-لیبلر در دو مدل بررسی کردند و فاصله ردیابی با احتمال از پیش مشخص شده‌ای را برای مشاهدات کامل به دست آوردند. سیاره و همکاران (۲۰۱۱) نشان دادند پس از انتخاب مدل‌های معادل توسط یکی از معیارها یا آزمون‌ها لازم است برای دستیابی به مدل بهینه بررسی بیشتری روی مدل‌ها به عمل آید. سیاره (۲۰۱۱) به بررسی انتخاب مدل از بین مدل‌های خطی غیرآشیانی پرداخت. در دنباله این بررسی‌ها، لازم به نظر می‌رسد که باید مقایسه‌ای بر روی آزمون‌ها و ملاک‌های انتخاب مدل از لحاظ توانایی آن‌ها در انتخاب مدلی که ساختاری شبیه به مدل درست داده‌ها داشته باشد به عمل آید. در محاسبه AIC، جمله فقدان برازش شامل برآوردهای پارامترهایی است که براساس مشاهدات حاصل از چگالی مولد داده‌ها به‌دست آمده‌اند. اگر چه این نوع اریبی تا حدی تصحیح می‌شود اما عدم توجه ملاک AIC به ساختار مدل‌ها همچنان به قوت خود باقی است. در محاسبه آماره کاکس برآورد پارامترهای یک مدل رقیب با توجه به پارامترهای مدل رقیب دیگر به‌دست می‌آیند و در تعیین توزیع آماره کاکس تحت فرضیه صفر تأثیر توزیع مفروض داده‌ها دیده می‌شود. لذا پس از انتخاب یک مدل توسط AIC لازم است میزانی از خوب توصیف شدگی مدل توسط آزمون کاکس بررسی شود. از طرفی ایده انتخاب مدل با

یک مجموعه از مدل‌های رقیب شروع می‌شود. لذا یک سوال اساسی این است که کدام یک از مدل‌های رقیب در این مجموعه قرار می‌گیرند؟ سوال مورد توجه این است که: مدل منتخب با ملاک AIC، تا چه حد به ساختار مدل واقعی داده‌ها نزدیک است؟ به عبارتی، آیا مدلی که تحت مقدار مشاهده شده AIC به عنوان برآورد مدل مولد داده‌ها انتخاب شده است به دلیل ساختارهای مشابه در توزیع‌ها بوده است یا تنها مقدار مطلق مشاهده شده AIC در تصمیم‌گیری مورد توجه قرار گرفته است؟ همچنین سوال دیگری که از لحاظ نظری و کاربردی می‌تواند مورد توجه باشد این است که آیا خوب-توصیف شده بودن مدل بر انتخاب مدل توسط AIC تاثیر می‌گذارد؟

در این مقاله، با استفاده از شبیه‌سازی و به کمک آزمون فرضیه مطلق کاکس و ملاک انتخاب مدل آکائیک سعی می‌شود به این سوال‌ها پاسخ داده شود. همچنین روشی پیشنهاد می‌شود که به کمک آن می‌توان مجموعه‌ای شامل مدل‌های مناسب، به عنوان برآوردی از مدل درست را تشکیل داد. جنیوس و استرازرا (۲۰۰۰) با مقایسهٔ دو آزمون وونگ و کاکس و ملاک آکائیک برای مدل‌های خطی غیرآشیانی تحت مدل‌های متفاوت برای جمله خطا نشان دادند که استنباط با انجام آزمون وونگ توسط آزمون کاکس کامل می‌شود. سپس با یک نگرش کلی به مقایسه آزمون‌ها و ملاک آکائیک پرداخته اما تحلیلی در مورد رابطه بین مدل‌های رقیب و حساسیت روش‌های انتخاب مدل به این رابطه انجام ندادند. از طرفی ملاک معرفی شده توسط بزدگان (۱۹۹۰) براساس ملاک اطلاع طراحی شده است و به دلیل پیچیدگی محاسبات، برای انتخاب مدل‌های غیرخطی به کار می‌رود. در مقاله حاضر مقایسهٔ آماره کاکس و ملاک آکائیک از نقطه نظر حساسیت به ساختار مدل‌های رقیب و نحوه انتخاب مدل توسط آزمون کاکس و ملاک آکائیک هنگامی که مدل‌ها متداخل هستند، مورد توجه قرار گرفته است.

در بخش ۲، مدل‌های آماری معرفی شده‌اند. بخش ۳ مروری بر برآورد پارامترهای مدل و نقش ملاک کولبک-لیبلر در این برآورد دارد. در بخش ۴ ملاک اطلاع آکائیک و آماره آزمون کاکس به عنوان دو روش انتخاب مدل از بین مدل‌های غیرآشیانی معرفی شده‌اند. در بخش ۵ به مطالعه شبیه‌سازی برای بررسی نقش

آزمون کاکس و AIC در استنباط دقیق‌تر در انتخاب مدل غیرآشیانی پرداخته شده است.

۲ مدل‌های آماری

نمونهٔ تصادفی $Y_1, \ldots, Y_n$ با توزیع نامعلوم $h(\cdot)$ را در نظر بگیرید. به منظور استنباط در مورد جامعه، عضوی از مدل پارامتری

$$\mathcal{G} = \{g(.;\beta) : \beta \in \Xi \subseteq \Re^q\} = (g^\beta(\cdot))_{\beta \in B}$$

را به کمک برآورد پارامتر انتخاب کرده و به عنوان تخمینی از توزیع درست داده‌ها به کار می‌گیریم. این مدل در واقع باید به طور ذاتی قادر به توصیف مجموعهٔ داده‌ها باشد. این توانایی با استفاده از ملاکی مناسب قابل بررسی خواهد بود.

برای دو مدل $\mathcal{G}$ و $\mathcal{F} = \{f(.;\alpha) : \alpha \in \Lambda \subseteq \Re^p\} = (f^\alpha(\cdot))_{\alpha \in \Lambda}$ چنانچه $(g^\beta(\cdot))_{\beta \in B} \subset (f^\alpha(\cdot))_{\alpha \in \Lambda}$، آنگاه دو مدل آشیانی نامیده می‌شوند.

بنابراین دو مدل غیرآشیانی هستند اگر $(g^\beta(\cdot))_{\beta \in B}$ نه با ایجاد تحدید روی فضای پارامتر و نه با هیچ فرآیند حدی از روی $(f^\alpha(\cdot))_{\alpha \in \Lambda}$ و بر عکس به دست نیاید. دو مدل $(g^\beta(\cdot))_{\beta \in B}$ و $(f^\gamma(\cdot))_{\gamma \in \Gamma}$ غیر متداخل هستند اگر زیر مجموعه یکدیگر نباشند و $(g^\beta(\cdot))_{\beta \in B} \cap (f^\alpha(\cdot))_{\alpha \in \Lambda} = \emptyset$.

مدل $(g^\beta(\cdot))_{\beta \in B}$ خوب-توصیف شده نامیده می‌شود اگر یک $\beta_\star \in B$ وجود داشته باشد به طوری که $g^{\beta_\star}(\cdot) = h(\cdot)$ در غیر این صورت مدل بد-توصیف شده است. اگر مدلی خوب-توصیف شده باشد ساختاری شبیه به ساختار مدل درست خواهد داشت. یکی از جنبه‌هایی که باید در انتخاب مدل رقیب مورد توجه قرار گیرد کنترل تعداد پارامترها برای مدل رقیب است. وقتی که یک مدل آماری خوب-توصیف شده است، می‌توان با لم نیمن-پیرسن مدل درست را پیدا کرد. در این حالت ملاک‌های انتخاب مدل مانند ملاک (C_p) مالوز (۱۹۷۳) و ملاک PRESS آلن (۱۹۷۴) برای مدل‌های خطی مورد استفاده قرار می‌گیرند. اگر چه این ملاک‌ها به خوبی پاسخ سؤالات درمورد انتخاب مدل را می‌دهند اما محدودیت‌هایی نیز دارند. این ملاک‌ها قادر به حل مسائل پیچیده‌تر در انتخاب مدل نیستند. اما AIC به

طور گسترده‌ای مورد استفاده قرار گرفته است. یکی از دلایل استقبال از AIC رابطهٔ این ملاک با تابع ماکسیمم درستنمایی و ملاک کولبک–لیب‌لر است.

۳ برآورد پارامترهای مدل و ملاک کولبک–لیب‌لر

از لحاظ عملی نیاز به مدلی است که بتوان آن را به کار برد. این مدل حاصل برآورد پارامتر در خانوادهٔ $(g^{\beta}(\cdot))_{\beta\in B}$ است به طوری که چگالی یا تابع احتمال برآورد شده بهترین تقریب برای $h(\cdot)$ باشد. بهترین تقریب در واقع کمترین فاصله بین مدل درست و مدل رقیب را به ذهن متبادر می کند. برآوردگر پایای ماکسیمم درستنمایی نتیجهٔ مینیمم کردن فاصلهٔ بین مدل درست و مدل رقیب در یک مسئلهٔ انتخاب مدل براساس ملاک کولبک–لیب‌لر، KL، است. این ملاک نامنفی است و آنچه که استفاده از آن را عمومیت بخشیده است انعطاف آن در مقابل مدل‌های خوب–توصیف شده و بد–توصیف شده در برآورد پارامتر مدل و قابل تفسیر بودن آن برای مدل‌های متداخل، غیر متداخل، آشیانی و غیر آشیانی است. برای آشنایی با نقش معیار کولبک–لیب‌لر در انتخاب مدل فرض کنید که $g^{\beta}(\cdot)$ مدل رقابتی برای تقریب $h(\cdot)$ باشد. در این‌صورت

$$\begin{aligned} KL\{h(Y), g^{\beta}(Y)\} &= E_h\Big\{\log\{\frac{h(Y)}{g^{\beta}(Y)}\}\Big\} \\ &= E_h\Big\{\log\{h(Y)\}\Big\} - E_h\Big\{\log\{g^{\beta}(Y)\}\Big\}. \qquad (۱) \end{aligned}$$

اندیس h برای امید ریاضی بیانگر محاسبه امید ریاضی تحت توزیع درست داده‌ها است. جملهٔ اول در سمت راست رابطهٔ (۱) مجهول است، اما تأثیر و نقشی در مینیمم کردن $KL\{h(\cdot), g^{\beta}(\cdot)\}$ ندارد. جملهٔ دوم هم از لحاظ نظری و هم از لحاظ کاربردی حائز اهمیت است و آن را قسمت مرتبط ملاک کولبک–لیب‌لر می‌نامند. از طرفی بدیهی است که یکی از اعضای $\mathcal{G}$ مثل $g^{\beta_\circ}(\cdot)$ کمترین فاصله تا $h(\cdot)$ را دارد، لذا $\beta_\circ$ عضوی از B است که ملاک کولبک–لیب‌لر را مینیمم می‌کند. اگر $h(\cdot) \in \mathcal{G}$، آنگاه یک $\beta_* \in B$ وجود خواهد داشت که $h(\cdot) = g^{\beta_*}(\cdot)$ است. ثابت می‌شود برآورد ماکسیمم درستنمایی β وجود دارد و چنانچه مدل خوب–توصیف شده باشد، $\hat{\beta}_n \xrightarrow{\mathcal{P}} \beta_*(=\beta_\circ)$. در حالتی که مدل بد–توصیف شده است رابطه حدی به صورت

$\hat{\beta}_n \xrightarrow{\mathcal{P}} \beta_{\circ}$ برقرار و برآوردگر از نوع برآورد شبه ماکسیمم درستنمایی [۴] است. اثبات همگرایی‌های اخیر مبتنی بر استفاده از معیار کولبک-لیب‌لر و رابطهٔ همگرایی

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\log g^{\beta}(Y_i) \xrightarrow{\mathcal{P}} E_h\Big\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\log\{g^{\beta}(Y_i)\}\Big\}$$

است. برای استفاده از معیار کولبک-لیب‌لر در انتخاب مدل باید قسمت مرتبط آن برآورد شود. یک برآورد مناسب برای آن به صورت $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\log g^{\hat{\beta}_n}(Y_i)$ است. البته این برآوردگر یک بیش‌برآورد به‌منظور برآورد کردن فاصلهٔ بین توزیع درست و مدل رقیب ارائه می‌کند. همین موضوع سبب می‌شود که $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\log g^{\hat{\beta}_n}(Y_i)$ به امید ریاضی خود همگرا نباشد و اریبی به‌صورت

$$\text{bias} = E_h\Big\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\log g^{\hat{\beta}_n}(Y_i)\Big\} - \int_{\mathcal{R}}\log g^{\hat{\beta}_n}(y_i)h(y)dy = \frac{1}{n}tr(I_g^{-1}J_g) + \mathcal{O}(n^{-2})$$

تولید کند، که در آن I و J به ترتیب ماتریس اطلاع فیشر در صورت حاصل‌ضرب درونی و بیرونی به‌صورت

$$I = -E_h\Big\{\frac{\partial^2 \log g^{\beta}(Y)}{\partial\beta\partial\beta'}\Big\}$$

و

$$J = E_h\Big\{\frac{\partial \log g^{\beta}(Y)}{\partial\beta}\frac{\partial \log g^{\beta}(Y)}{\partial\beta'}\Big\}.$$

است. اگر $h \in \mathcal{G}$ آنگاه $tr(I_g^{-1}J_g) = \dim(B)$ در این‌صورت

$$\text{bias} = \frac{\dim(B)}{n} + \mathcal{O}(n^{-2}).$$

بنابراین برآورد اریبی به صورت $\hat{bias} = \frac{\dim(B)}{n}$ خواهد شد. با استفاده از این جملهٔ اریبی و تابع درستنمایی وزنی، آکائیک (۱۹۷۳) ملاک خود را به‌صورت

$$AIC \;=\; -2n\Big\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\log g^{\hat{\beta}_n}(Y_i) - \frac{\dim(B)}{n}\Big\}$$

[۴] Quasi Maximum Likelihood

$$= \quad -۲\sum_{i=۱}^{n}\log g^{\hat{\beta}_n}(Y_i) + ۲\dim(B) \qquad (۲)$$

معرفی کرد. هنگامی که چند مدل رقیب برای چگالی مجهول h در نظر گرفته می‌شوند، مدل با کمترین AIC به عنوان بهترین مدل برای برازش به داده‌ها انتخاب می‌شود. از لحاظ نظری AIC برآوردی برای قسمت مرتبط ملاک کولبک-لیبلر است که در منهای یک ضرب شده است. بنابراین کمترین AIC با استفاده از ملاک کولبک-لیبلر مربوط به مدلی خواهد بود که کمترین فاصله تا مدل درست داده‌ها را دارد.

۴ روش‌های انتخاب مدل

فرض کنید $Y_۱, \ldots, Y_n$ نمونه‌ای تصادفی با چگالی نامعلوم $h(\cdot)$ باشد. در انتخاب مدل، علاقه‌مند به برآورد $h(\cdot)$ هستیم. نظریه انتخاب مدل شامل دو روش برای برآورد مدل مولد داده‌ها است. این دو روش عبارتند از آزمون‌های انتخاب مدل و ملاک‌های انتخاب مدل. آزمون کاکس (۱۹۶۲ و ۱۹۶۱) و آزمون ساویر (۱۹۸۳) از نوع آزمون‌های انتخاب مدل غیرآشیانی و AIC از ملاک‌های انتخاب مدل است.

در آزمون کاکس مدل درست داده‌ها در فرضیه صفر قرار دارد. در این آزمون رد (پذیرش) فرضیه صفر دلیلی بر پذیرش (رد) فرضیه مقابل نیست، بنابراین باید دوباره آزمونی ساخته شود که در آن نقش فرضیه صفر و فرضیه مقابل عوض شده باشد. به عبارت دیگر، اگر $\mathcal{F}$ و $\mathcal{G}$ دو مدل رقیب باشند، ابتدا آزمون فرضیه‌های

$$\begin{cases} H_f : \underline{Y} \sim f^{\alpha}(y) \\ H_g : \underline{Y} \sim g^{\beta}(y) \end{cases}$$

مورد بررسی قرار می‌گیرد. کاکس (۱۹۶۲) آماره آزمونی به‌صورت

$$T_{fg} = \frac{\sqrt{n}C_{fg}}{\sqrt{V_f}} \overset{asy}{\sim} N(\circ, ۱) \qquad (۳)$$

ارائه کرد، که در آن

$$C_{fg} = \frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n}\log\frac{f^{\hat{\alpha}_n}(y_i)}{g^{\hat{\beta}_n}(y_i)} - E_f\left\{\log\frac{f^{\alpha}(Y)}{g^{\beta_\alpha}(Y)}\right\}_{\alpha=\hat{\alpha}_n} \overset{asy}{\sim} N(\circ, V_f)$$

$V_f = asyVar_f(\sqrt{n}C_{fg})$، برآوردگرهای $\hat{\alpha}_n$ و $\hat{\beta}_n$ به ترتیب برآوردگرهای ماکسیمم درستنمایی α و β تحت مدل‌های $\mathcal{F}$ و $\mathcal{G}$ و β_α مقدار شبه‌درست[5] $\hat{\beta}_n$ تحت فرضیه صفر H_f، است. به عبارتی دیگر، اگر $f^\alpha(\cdot)$ چگالی درست داده‌ها باشد، آنگاه $\hat{\beta}_n \stackrel{a.s.}{\longrightarrow} \beta_\alpha$. با تغییر نقش دو مدل رقیب، باید فرضیه‌های

$$\begin{cases} H_g : \underline{Y} \sim g^\beta(y) \\ H_f : \underline{Y} \sim f^\alpha(y) \end{cases}$$

آزمون شوند. لذا

$$T_{gf} = \frac{\sqrt{n}C_{gf}}{\sqrt{V_g}} \stackrel{asy}{\sim} \mathcal{N}(۰, ۱)$$

که در آن

$$C_{gf} = \frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n} \log \frac{g^{\hat{\beta}_n}(y_i)}{f^{\hat{\alpha}_n}(y_i)} - E_g\left\{\log \frac{g^\beta(Y)}{f^{\alpha_\beta}(Y)}\right\}_{\beta=\hat{\beta}_n} \stackrel{asy}{\sim} N(۰, V_g)$$

$V_g = asyVar_g(\sqrt{n}C_{gf})$، $\hat{\alpha}_n$ و $\hat{\beta}_n$ به ترتیب برآوردهای ماکسیمم درستنمایی α و β تحت مدل های $\mathcal{F}$ و $\mathcal{G}$ و α_β مقدار شبه‌درست $\hat{\alpha}_n$ تحت فرضیه صفر H_g است.

بر اساس نتایج دو آماره، چهار برآمد ممکن است روی دهد:

الف. رد H_f و پذیرش H_g، اگر $|T_{fg}| \geq z_{\alpha/۲}$ و $|T_{gf}| < z_{\alpha/۲}$،

ب. رد H_g و پذیرش H_f، اگر $|T_{fg}| < z_{\alpha/۲}$ و $|T_{gf}| \geq z_{\alpha/۲}$،

ج. رد هر دو فرضیه H_f و H_g، اگر $|T_{fg}| \geq z_{\alpha/۲}$ و $|T_{gf}| \geq z_{\alpha/۲}$،

د. پذیرش هر دو فرضیه f_α و g_β، اگر $|T_{fg}| < z_{\alpha/۲}$ و $|T_{gf}| < z_{\alpha/۲}$.

ملاک انتخاب مدل AIC برخلاف آزمون فرضیه عاری از خطاهای آزمون است. برای مدل رقیب $f^\alpha(\cdot)$، این ملاک به‌صورت

$$AIC_f = -۲\sum_{i=۱}^{n} \log f^{\hat{\alpha}_n}(y_i) + ۲p$$

تعریف می‌شود که در آن p، تعداد پارامترهای برآورد شده در مدل است.

[5] Pseudo True Value

در بین مدل‌های رقیب، مدلی که دارای کمترین مقدار AIC باشد، به عنوان بهترین مدل انتخاب می‌شود. برای پاسخ به این سوال که مدل انتخاب شده به وسیله AIC، مدل درست داده‌ها است یا نه، پیشنهاد می‌شود که پس از انتخاب یک مدل به وسیله AIC، یک آزمون فرضیه مطلق نیز در نظر گرفته شود. روجاس و همکاران (۲۰۰۸) نشان دادند که از آزمون ساویر برای تشخیص بین خانواده‌های لگ نرمال و نمایی و همچنین بین خانواده های لگ نرمال و وایبول، نمی‌توان استفاده کرد. بنابراین AIC و به دنبال آن آزمون کاکس در نظر گرفته شده است. استفاده‌کنندگان از معیار اطلاع آکائیک طیف وسیعی از محققین را در بر می‌گیرد که در مواردی در مجموعه‌ای از مدل‌های رقیب نامناسب برای یک مدل درست، با یک محاسبه ساده بر اساس ملاک اطلاع آکائیک مدلی را پذیرفته و به‌کار می‌گیرند. این عدم دقت برای AIC ناشی از آن است که ملاک کولبک-لیب‌لر در مقایسه دو مدل تنها معادل بودن مدل‌ها را در نظر می‌گیرد و ممکن است دو مدل بد و معادل را انتخاب کند. ملاک اطلاع آکائیک بعنوان برآوردگر معیار کولبک-لیب‌لر نیز همین خطا را مرتکب می‌شود. آزمون وونگ را می‌توان برای انتخاب مدل در حالت‌هایی که دو مدل نسبت به هم غیرآشیانی، آشیانی و یا دارای همپوشانی هستند به‌کار برد که متناسب با هر حالت، آماره‌ای مناسب محاسبه می شود. این آزمون در حالت غیرآشیانی برتری دو مدل نسبت به یکدیگر را با توجه به مدل درست داده‌ها تعیین می‌کند. بنابراین ممکن است با توجه به مدل درست داده‌ها یکی از مدل‌ها بر دیگری برتری داشته باشد و یا این که هر دو مدل نسبت به مدل درست داده‌ها معادل باشند. بنابراین آزمون وونگ یک آزمون فرضیه نسبی است که نشان‌دهنده برتری یک مدل بر مدل دیگر است ولی مدل درست داده‌ها را مشخص نمی‌کند. آزمون فرضیه کاکس، تعمیم آزمون فرضیه درستنمایی به حالتی است که دو مدل نسبت به هم غیرآشیانی باشند. با توجه به فرضیاتی که برای ساختن این آزمون در نظر گرفته می‌شود، آزمون کاکس مدلی را که دارای ساختار درست داده‌ها است به‌عنوان مدل درست انتخاب می‌کند. لذا دو مدلی که در آزمون کاکس مورد بررسی قرار می‌گیرند ممکن است هر دو پذیرفته، یا هر دو رد یا یکی از آنها انتخاب شود. هنگامی که این آزمون برای دو مدل آشیانی به کار گرفته می‌شود به آزمون درستنمایی ماکسیمم تعدیل می‌یابد.

با استفاده از ملاک AIC حتماً یک مدل به‌عنوان مدل مناسب انتخاب می‌شود. ولی این ملاک مشخص نمی‌کند که آیا مدل انتخاب شده دارای ساختار مدل درست داده‌ها است یا خیر. زیرا اگر مدل درست داده‌ها در مجموعه مدل‌های رقابتی نباشد مدلی که دارای کمترین مقدار AIC است نمی‌تواند همان مدل درست باشد.

توجه به این نکته ضروری است که جنیوس و استرازرا (۲۰۰۰) به بررسی ماهیت مدل‌های رقیب و مدل انتخاب شده براساس AIC نپرداخته‌اند. آن چه که به عنوان یک سوال در مقاله جنیوس و استرازرا می توان مطرح کرد این است که: آیا تداخل یا شباهت مدل‌های رقیب و مدل درست می‌توانند بر نتیجه آزمون‌ها یا ملاک‌های انتخاب مدل اثر بگذارند؟ نتیجه حاصل از انتخاب یک مدل توسط AIC، درست یا غلط بودن یک فرضیه نیست بلکه استنتاج در مورد نزدیکی مدل رقیب به مدل درست است. لذا در وضعیت‌هایی که مدل‌ها آشیانی نیستند، استفاده از AIC ما را به انتخاب بهترین مدل در یک مجموعه از مدل‌های بد-توصیف شده هدایت می‌کند. از طرفی این ملاک عاری از خطاهای نوع اول و دوم است. این در حالی است که در آزمون کاکس خطاها قابل بررسی هستند. بنابراین ضروری به نظر می‌رسد که انتخاب یک مدل نباید تنها مبتنی بر استفاده از یک آزمون یا یک ملاک باشد. هنگامی که یک مدل به‌عنوان مدل مناسب انتخاب می‌شود لازم است تحلیل بیشتری بر روی مدل منتخب به‌عمل آید.

۱.۴ روشی برای مرتب کردن مدل‌های رقیب

شیمودایرا (۱۹۹۸) با استفاده از آزمون فرض نسبی و ارتباط آن با AIC، به ساخت مجموعه‌ای از مدل های رقیب پرداخت که در سطح معنی‌داری آزمون، به طور معادل بیشترین نزدیکی را به مدل درست داده‌ها دارند. گروهی از مدل‌های رقیب را در نظر بگیرید که بر حسب AIC مرتب شده‌اند. اگر ملاک $AIC_{(j)}$ بیان کننده AIC برای j امین مدل رقیب باشد و m مدل رقیب داشته باشد، آنگاه به ازای $j = ۱, \ldots, m - ۱$، $AIC_{(j)} \leq AIC_{(j+۱)}$. اگر دو مدل رقیب با کمترین AIC، $AIC_{(۱)}$ و $AIC_{(۲)}$، به‌وسیله آزمون کاکس مورد مقایسه قرار گیرند نتایج به‌صورت

زیر خواهد بود:

اگر مدلی که توسط AIC پذیرفته شده توسط آزمون کاکس نیز پذیرفته شود همان ساختار مدل درست را دارد و چنانچه مدل خوب-توصیف شده باشد، همان مدل درست است.

اگر هر دو مدل رقیب با آزمون کاکس رد شوند، آنگاه مدل منتخب به وسیله AIC، هر چند بهتر از سایر مدل‌های رقیب است ولی دارای ساختار همانند مدل درست داده‌ها نیست. به عبارت دیگر، مجموعه مدل‌های رقیب، شامل مدل درست داده‌ها نبوده است. اگر هر دو مدل رقیب با آزمون کاکس پذیرفته شوند، در سطح معنی داری آزمون، هر دو مدل ساختاری تقریباً مشابه به مدل درست داده‌ها دارند. در این حالت، مدل رقیب دیگری با کمترین مقدار AIC، مثلاً $AIC_{(3)}$ را باید با مدل دارای $AIC_{(1)}$، مقایسه کرد. این عمل تا جایی تکرار می‌شود که یکی از مدل‌های رقیب به وسیله آزمون کاکس در مقابل مدل با $AIC_{(1)}$ رد شود. به این ترتیب مجموعه‌ای از مدل‌های هم‌ساختار با مدل مولد داده‌ها ساخته خواهد شد.

این قاعده تصمیم‌گیری کمک می‌کند تا مشخص شود مدل انتخاب شده به‌وسیله AIC چقدر به مدل درست داده‌ها نزدیک و دارای ساختار احتمالاتی مشابه با آن است. همچنین می‌توان مجموعه‌ای از مدل‌های رقیب را تشکیل داد که در سطح معنی‌داری آزمون از ساختار مدل درست پیروی کنند و به طور معادل به مدل درست داده‌ها نزدیک باشند.

اگر چه هنگامی که بیش از یک مدل رقیب با تعداد پارامتر یکسان در نظر گرفته می‌شود، شرایط آکائیک برای استخراج AIC مهیا نمی‌شود، اما این ملاک همواره به‌کار گرفته شده است.

۵ بررسی شبیه‌سازی

در این بخش روش پیشنهاد شده در بخش ۱.۴ در مطالعه‌ای شبیه‌سازی مورد بررسی قرار می‌گیرد. خانواده توزیع‌های وایبول و گاما شامل چگالی نمایی هستند. در واقع چگالی‌های وایبول، $W(\alpha,\beta)$ و گاما، $\Gamma(\alpha,\beta)$ برای تمام مقادیر β و $\alpha = 1$ به

توزیع نمایی تبدیل می‌شوند. لذا توزیع‌های وایبول و گاما ساختار مشابهی دارند. بدین منظور سه تابع چگالی احتمال لگ نرمال، $LN(۲, ۰/۵)$، گاما، $\Gamma(۱/۵, ۱/۵)$ و وایبول $W(۳, ۵)$ در نظر گرفته می‌شود. مقادیر پارامترها به گونه‌ای انتخاب شده‌اند که کلیه حالت‌های ممکن در آزمون فرض کاکس قابل شبیه‌سازی باشند. در این شبیه‌سازی حجم نمونه‌ها ۵۰، ۱۰۰ و ۲۰۰ و تعداد تکرارها ۴۰۰ است. آماره کاکس بر اساس روش پیشنهادی پسران و پسران (۱۹۹۳) شبیه‌سازی می‌شود. برای این منظور آزمون فرضیه‌های

$$\begin{cases} H_f : \underline{Y} \sim f^{\alpha}(y) \\ H_g : \underline{Y} \sim g^{\beta}(y) \end{cases}$$

را در نظر بگیرید. برای محاسبه $\beta_{\hat{\alpha}}$ مقادیر مشاهده شده و مستقل $\underline{Z}_j = (Z_{۱j}, Z_{۲j}, \ldots, Z_{nj})'$ را با استفاده از $f^{\hat{\alpha}_n}(y)$ تولید شود. با استفاده از $\underline{Z}_j$ برآورد ماکسیمم درستنمایی β را تحت مدل $f^{\hat{\alpha}}(y)$ محاسبه نموده با $\hat{\beta}_{nj}$ نشان می‌دهیم. سپس با استفاده از رابطه

$$\hat{\beta}_{\star}(R) = \frac{۱}{R}\sum_{j=۱}^{R} \hat{\beta}_{nj}$$

به برآورد $\beta_{\hat{\alpha}}$ پرداخته می‌شود، که در آن R تعداد تکرارها است. صورت کسر و واریانس آماره کاکس با استفاده از شبیه‌سازی و با استفاده از روابط

$$\begin{aligned} C_{fg} &= \frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n} \log\frac{f^{\hat{\alpha}_n}(y_i)}{g^{\hat{\beta}_n}(y_i)} - \frac{۱}{nR}\sum_{j=۱}^{R}\sum_{i=۱}^{n} \log\frac{f^{\hat{\alpha}_n}(y_i)}{g^{\hat{\beta}_{nj}}(y_i)} \\ V_f &= \frac{۱}{n}\underline{d}'\{I_n - M(\hat{\alpha})[M'(\hat{\alpha})M(\hat{\alpha})]^{-۱}M'(\hat{\alpha})\}\underline{d} \end{aligned}$$

به‌دست می‌آیند، که در آن $\underline{d}' = (d_۱, \ldots, d_n)$ و $M(\alpha)$ ماتریس $n \times (p + ۱)$ به‌صورت زیر است:

$$M(\alpha) = \begin{pmatrix} ۱ & \partial \log f^{\alpha}(y_۱)/\partial\alpha_۱ & \ldots & \partial \log f^{\alpha}(y_۱)/\partial\alpha_p \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ ۱ & \partial \log f^{\alpha}(y_n)/\partial\alpha_۱ & \ldots & \partial \log f^{\alpha}(y_n)/\partial\alpha_p \end{pmatrix}$$

این مطالعه شبیه‌سازی نشان می‌دهد وقتی که تابع چگالی لگ‌نرمال به‌عنوان تابع چگالی مولد داده‌ها به‌کار می‌رود، AIC مدل‌های رقیب به‌صورت سطر اول جدول ۱ رتبه بندی می‌شوند.

جدول ۲ فراوانی نسبی نتایج AIC را برای مدل‌های رقیب متناظر با داده‌های تولید شده و برای مقادیر مختلف نمونه نشان می‌دهد. ستون آخر جدول مبین آن است که وقتی داده‌ها از توزیع لگ نرمال تولید شده‌اند و مدل درست در میان مدل‌های رقیب است، AIC مدل درست را انتخاب می‌کند و با افزایش حجم نمونه میزان دقت آن افزایش می‌یابد. اما در غیاب مدل درست داده‌ها در مجموعه مدل‌های رقیب، AIC توزیع گاما را به عنوان مدل درست داده‌ها می‌پذیرد. همین رویه زمانی که تابع مولد داده‌ها توزیع وایبول است نیز وجود دارد.

با این حال وقتی که توزیع مولد داده‌ها گاما است به دلیل نحوه انتخاب پارامترها و شباهت بسیار زیاد مدل مولد داده‌ها به توزیع وایبول، AIC در مقابل سه مدل رقیب، مدل‌های وایبول و گاما را با فراوانی‌های نسبی تقریبا یکسان، ۰/۵۵۷ و ۰/۴۴۳، معادل یکدیگر می‌داند. در این حالت AIC مدل وایبول را به مدل لگ نرمال ترجیح می‌دهد. نتایج مشابهی برای موقعی که مدل مولد وایبول است در جدول ۲ مشاهده می‌شود. با توجه به مقادیر AIC، می‌توان مدل‌های رقیب را براساس این مقادیر و مطابق جدول ۱ مرتب کرد. جدول ۳ نشان دهنده فراوانی نسبی نتایج آزمون کاکس برای هر یک از توابع چگالی رقیب است. ستون اول، نتایج آزمون کاکس برای دو مدل لگ نرمال و گاما را هنگامی که تابع چگالی لگ نرمال به‌عنوان مدل مولد داده‌ها در نظر گرفته شده است بررسی می‌کند. همان‌طور که ملاحظه می‌شود آزمون کاکس تابع چگالی لگ نرمال را به‌عنوان مدل درست داده‌ها می‌پذیرد و با افزایش حجم نمونه، فراوانی نسبی این پذیرش افزایش می‌یابد. به‌عبارت دیگر، مدلی که AIC به عنوان مدل درست داده‌ها از بین مدل‌های رقیب انتخاب می‌کند همان مدل درست داده‌ها است. اگر مدل لگ نرمال از مجموعه مدل‌های رقیب حذف شود، تابع چگالی گاما دارای کمترین AIC خواهد بود. نتایج آزمون کاکس برای دو مدل رقیب گاما و وایبول هنگامی که تابع چگالی مولد داده‌ها لگ نرمال است منتج به رد هر دو مدل رقیب می‌شود و با افزایش حجم نمونه، فراوانی نسبی

آن نیز افزایش می‌یابد. به عبارتی دیگر، مدلی که به‌وسیله AIC با حذف مدل درست از مجموعه مدل‌های تحت بررسی انتخاب شده است هر چند از مدل دیگر بهتر است ولی دارای ساختار مشابه با مدل مولد داده‌ها نیست.

هنگامی که تابع چگالی مولد داده‌ها $\Gamma(۱/۵, ۱/۵)$ است، AIC برای مدل‌های رقیب مطابق سطر دوم جدول ۱ محاسبه و رتبه‌بندی شده است. از آنجا که تابع چگالی‌های $\Gamma(۱, ۱)$ و $W(۱, ۱)$ یکسان و معادل تابع چگالی نمایی $(\lambda = ۱)$ هستند، وقتی داده‌ها از تابع چگالی $\Gamma(۱/۵, ۱/۵)$ تولید می‌شوند این دو تابع چگالی بسیار به هم شبیه هستند. بنابراین می‌توان انتظار داشت که AICهای آن‌ها نیز با هم تفاوت زیادی نداشته باشند. ستون سوم جدول ۳ نشان می‌دهد که آزمون کاکس برای دو مدل رقیب گاما و وایبول، هنگامی که تابع چگالی مولد داده‌ها گاما است هر دو مدل را به عنوان مدل درست داده‌ها می‌پذیرد. با افزایش حجم نمونه، فراوانی نسبی پذیرش نیز افزایش می یابد. در گام بعد به آزمون دو مدل گاما و لگ نرمال می‌پردازیم. ستون اول جدول ۳ نشان می‌دهد که مدل رقابتی لگ نرمال به‌عنوان مدل درست داده‌ها رد می‌شود.

با حذف تابع چگالی گاما از مجموعه مدل‌های رقیب، باید آزمون کاکس برای دو مدل وایبول و لگ نرمال انجام شود. از آنجا که در این حالت مدل رقابتی توزیع وایبول دارای ساختاری مشابه با مدل گاما (مدل مولد داده‌ها) است، مدل وایبول به‌عنوان مدل درست داده‌ها پذیرفته می‌شود.

جدول‌های ۲ و ۳ نشان می‌دهند هنگامی که تابع چگالی وایبول به عنوان تابع مولد داده‌ها در نظر گرفته می‌شود، مدل انتخاب شده به وسیله AIC توسط آزمون کاکس نیز پذیرفته می‌شود ولی در غیاب مدل وایبول در مجموعه مدل‌های رقیب، مدل گاما به‌عنوان مدل درست داده‌ها به وسیله AIC انتخاب می‌شود. این در حالی است که به وسیله آزمون کاکس این مدل رد می‌شود. به عبارتی دیگر، مدل انتخاب شده به‌وسیله AIC دارای ساختار درست داده‌ها نیست.

جدول ۱: مقادیر رتبه‌بندی شده AIC مدل‌های مولد

مدل مولد داده‌ها	AICهای رتبه بندی شده
لگ نرمال	$AIC_{LN} < AIC_{\Gamma} < AIC_W$
گاما	$AIC_{\Gamma} \leq AIC_W < AIC_{LN}$
وایبول	$AIC_W < AIC_{\Gamma} < AIC_{LN}$

بحث و نتیجه‌گیری

برای یافتن بهترین مدل در مجموعه مدل‌های رقیب، به دلیل سادگی در محاسبه و تفسیر از AIC استفاده می‌شود. در این مقاله برای پاسخ به این سؤال که آیا مدل انتخاب شده به وسیله AIC دارای همان ساختار توزیع مولد داده‌ها است یا نه؟ آزمون کاکس به‌کار گرفته شد. با این آزمون می‌توان مشخص کرد که آیا مدل درست داده‌ها یا مدلی که دارای ساختار مشابه با مدل درست داده‌ها است، در مجموعه مدل‌های رقیب قرار دارد؟ این روش بسیار محتاطانه است. در این مقاله نشان داده شده که آزمون کاکس مدل‌هایی را می‌پذیرد که دارای ساختاری مشابه با مدل درست داده‌ها در سطح معنی داری آزمون باشند، نکته‌ای که AIC به آن بی‌توجه است. جنیوس و استرازرا (۲۰۰۰) به مطالعه روش‌های انتخاب مدل برای مدل‌های غیرآشیانی پرداخته‌اند و حساسیت روش‌ها به مدل‌های رقیب را در نظر نگرفته‌اند. تاکید ما بر آن است که قبل از انتخاب مدل باید روابط احتمالی بین مدل‌های رقیب مورد توجه قرار گیرد و متناسب با این روابط روش انتخاب مدل به‌کار گرفته شود. اگر چه تعیین آزمون یا ملاک انتخاب مدل برای مجموعه‌هایی از مدل‌های رقیب که دارای روابط احتمالی هستند موضوع پیچیده‌ای است اما در این مقاله سعی شده است تا مسئله مطرح و با شبیه‌سازی پاسخی مقدماتی به آن داده شود. آنچه که به‌عنوان یک نتیجه‌گیری می‌توان به آن استناد کرد آن است که برای تحلیل نتایج انتخاب مدل توسط AIC لازم است نتایج آزمون‌های موجود از جمله آزمون کاکس نیز مورد توجه قرار گیرد. همچنین اگر روابط ساختاری بین مدل‌های رقیب وجود داشته باشد، آزمون کاکس بر AIC ارجحیت دارد. لذا استنباط دقیق‌تر پس از انتخاب مدل ضروری است.

جدول ۲: فراوانی نسبی نتایج ملاک اطلاع آکائیک

حجم نمونه	نتایج	وایبول			مدل مولد داده ها گاما			لگ نرمال		
		$H_0 : LN$ $H_1 : \Gamma$	$H_0 : W$ $H_1 : \Gamma$	$H_0 : W$ $H_1 : LN$	$H_0 : LN$ $H_1 : W$	$H_0 : \Gamma$ $H_1 : W$	$H_0 : \Gamma$ $H_1 : LN$	$H_0 : \Gamma$ $H_1 : W$	$H_0 : LN$ $H_1 : W$	$H_0 : LN$ $H_1 : \Gamma$
۵۰	H_0 بهتراست	۰ /۰۲۵	۰/۸۰۱	۰/۹۰۶	۰/۲۱۰	۰/۵۵۷	۰/۸۵۸	۰/۹۸۰	۰/۸۹۰	/۸۰۲
	H_1 بهتر است	۰/۹۷۵	۰/۱۹۹	/۰۹۴۰	۰/۷۹۰	۰/۴۴۳	۰/۱۴۲	۰/۰۲۰	۰/۱۱۰	۰/۱۹۸
۱۰۰	H_0 بهتر است	۰/۰۰۰	۰/۸۸۱	۰/۹۷۸	۰/۱۰۲	۰/۶۳۵	۰/۹۴۰	۰/۹۹۹	۰/۹۶۵	۰/۸۷۹
	H_1 بهتر است	۱/۰۰۰	۰/۱۱۹	۰/۰۲۲	۰/۸۹۸	۰/۳۶۵	۰/۰۶۰	۰/۰۰۱	۰/۰۳۵	۰/۱۲۱
۲۰۰	H_0 بهتر است	۰/۰۰۰	۰/۹۶۴	۰/۹۹۹	۰/۰۲۵	۰/۶۸۸	۰/۹۹۵	۱/۰۰۰	۰/۹۹۸	۰/۹۷۳
	H_1 بهتر است	۱/۰۰۰	۰/۰۳۶	۰/۰۰۱	۰/۹۷۵	۰/۳۱۲	۰/۰۰۵	۰/۰۰۰	۰/۰۰۲	۰/۰۲۷

جدول ۳: فراوانی نسبی نتایج آزمون کاکس

حجم نمونه	نتایج	لگ نرمال		مدل مولد داده‌ها گاما			وایبول	
		$H_f : LN$ $H_g : \Gamma$	$H_f : \Gamma$ $H_g : W$	$H_f : \Gamma$ $H_g : W$	$H_f : \Gamma$ $H_g : LN$	$H_f : \Gamma$ $H_g : LN$	$H_f : W$ $H_g : \Gamma$	$H_f : \Gamma$ $H_g : LN$
۵۰	پذیرش H_f، رد H_g	۰/۷۰۵	۰/۳۱۰	۰/۰۷۰	۰/۶۵۵	۰/۷۰۰	۰/۴۹۵	۰/۵۸۰
	رد H_f، پذیرش H_g	۰/۱۱۰	۰/۰۰۵	۰/۰۲۵	۰/۱۵۵	۰/۱۲۰	۰/۱۱۰	۰/۰۰۰
	پذیرش هر دو مدل	۰/۱۴۰	۰/۰۹۵	۰/۷۲۰	۰/۰۳۰	۰/۰۹۰	۰/۲۸۵	۰/۰۰۵
	رد هر دو مدل	۰/۰۴۰	۰/۵۹۰	۰/۰۹۵	۰/۲۲۵	۰/۱۵۰	۰/۰۴۵	۰/۴۷۰
۱۰۰	پذیرش H_f، رد H_g	۰/۸۰۵	۰/۲۰۰	۰/۱۶۰	۰/۷۲۱	۰/۶۹۰	۰/۶۰۵	۰/۳۷۵
	رد H_f، پذیرش H_g	۰/۵۰۰	۰/۰۰۵	۰/۰۳۰	۰/۰۲۰	۰/۰۸۰	۰/۰۵۵	۰/۰۰۵
	پذیرش هر دو مدل	۰/۰۵۰	۰/۰۰۵	۰/۷۷۰	۰/۰۰۰	۰/۲۰۰	۰/۳۴۵	۰/۱۰۰
	رد هر دو مدل	۰/۰۵۵	۰/۸۲۵	۰/۰۳۵	۰/۲۹۰	۰/۰۳۰	۰/۰۲۵	۰/۵۲۵
۲۰۰	پذیرش H_f،رد H_g	۰/۸۷۵	۰/۰۶۰	۰/۲۰۵	۰/۸۶۴	۰/۷۳۰	۰/۷۰۵	۰/۲۵۰
	رد H_f، پذیرش H_g	۰/۰۱۵	۰/۰۰۰	۰/۰۳۵	۰/۰۱۰	۰/۰۰۶	۰/۰۵۰	۰/۰۰۰
	پذیرش هر دو مدل	۰/۰۰۵	۰/۰۰۰	۰/۷۸۰	۰/۰۰۰	۰/۲۰۰	۰/۱۹۵	۰/۰۰۰
	رد هر دو مدل	۰/۰۹۰	۰/۹۷۵	۰/۰۴۰	۰/۱۰۵	۰/۰۰۰	۰/۰۴۰	۰/۷۴۵

تقدیر و تشکر

نویسندگان از اصلاحات پیشنهادی داوران محترم که موجب بهبود این مقاله گردید، کمال تشکر و قدردانی را دارند.

مراجع

سیاره، ع.، ترکمان، پ. (۱۳۸۸)، برآورد مخاطره‌های کولبک-لیبلر برای مشاهدات سانسوریده از راست نوع II تحت مدل‌های غیر آشیانه‌ای، مجله علوم آماری، جلد **۳**، شماره ۱، ۷۸-۵۹.

Akaike, H.(1973), Information Theory and an Extension of Maximum Likelihood Principle, Second International Symposium on Information Theory, Akademia Kiado, 267-281.

Akaike, H. (1974), A New Look at the Statistical Model Identification. IEEE Transactions on Automatic Control, **19**, 716-723.

Allen, D. M. (1974), The Relationship Between Variable Selection and Prediction, *Technometrics*, **16**, 125-127.

Bozdogan, H. (1990), On the Information-Based Measure of Covariance Complexity and its Application to the Evaluation of Multivariate Linear Models, *Communications in Statistics Theory and Methods*, **19**, 221-278.

Bozdogan, H. (2000), Akaike Information Criterion and Recent Developments in Information Complexity, *Journal of Mathematical Psychology*, **44**, 62-91.

Burnham, K. P. and Anderson, D. R. (2002), *Model Selection and Multimodel Inference: A Practical Information-Theoretic Approach*, (2nd ed.), Springer, New York.

Commenges, D. Sayyareh, A., Letenneur, L., Guedj, J. and Bar-Hen, A. (2008), Estimating a Difference of Kullback-Leibler Risk Using a Normalized Difference of AIC, *Annals of Applied Statistics*, **2**, 1123-1142.