مجله علوم آماری، بهار و تابستان ۱۳۸۹
جلد ۴، شماره ۱، ص ۲۱-۳۳

آزمون تقارن توزیع بر اساس آنتروپی رنی

ملیحه عباس‌نژاد، داود محمدی
گروه آمار، دانشگاه فردوسی مشهد

تاریخ دریافت: ۱۳۸۹/۲/۱۰ تاریخ آخرین بازنگری: ۱۳۸۹/۵/۱۷

چکیده : در این مقاله، ابتدا توزیع‌های متقارن براساس تفاضل آنتروپی رنی آماره‌های مرتب زیر نمونه‌ها، مشخصه‌سازی می‌شوند. سپس آزمونی برای تقارن توزیع بر مبنای برآورد آنتروپی رنی آماره‌های مرتب معرفی می‌گردد. براساس روش شبیه‌سازی مونت کارلو، توان آزمون پیشنهادی محاسبه شده و با آزمون ارائه شده توسط حبیبی و ارقامی (۱۳۸۶) مقایسه می‌شود. نشان داده خواهد شد آزمون پیشنهاد شده برای برخی از توزیع‌های جانشین از توان بالاتری برخوردار است.

واژه‌های کلیدی : آنتروپی رنی، برآورد آنتروپی رنی، آماره‌های مرتب.

۱ مقدمه

یکی از اساسی‌ترین معیارها برای اندازه‌گیری عدم حتمیت یک متغیر تصادفی آنتروپی شانون است که توسط شانون (۱۹۴۸) معرفی شد. آنتروپی شانون متغیر تصادفی پیوسته X با تابع چگالی احتمال $f(x)$ برابر است با

$$H(X) = -\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\log f(x)dx.$$

آدرس الکترونیک مسئول مقاله: ملیحه عباس‌نژاد، ma_abbasnejad@yahoo.com

کد موضوع‌بندی ریاضی (۲۰۰۰): 94A17, 62G30

حالت کلی‌تری از آنتروپی شانون توسط رنی (۱۹۶۱) به‌صورت

$$H_s(X) = -\frac{1}{s-1}\log\int_{-\infty}^{+\infty} f^s(x)dx, \quad s > 0 \ (\neq 1).$$

ارائه شد. به راحتی می‌توان نشان داد که

$$\lim_{s\to 1} H_s(X) = H(X).$$

از آنجا که مفهوم آنتروپی کاربردهای فراوانی در مباحث آماری نظیر نظریه اطلاع و آزمون‌های نیکوئی برازش دارد، مسأله برآورد $H(X)$ براساس مشاهدات $x_1,\ldots,x_n$ توسط محققین زیادی از جمله احمد و لین (۱۹۷۶)، واسیچک (۱۹۷۶)، ابراهیمی و همکاران (۱۹۹۴) و کوریا (۱۹۹۵) مورد بررسی قرار گرفته است. از میان تمام این برآوردگرها، برآوردگر واسیچک به واسطه سادگی در محاسبات و دقت بالای آن بسیار مورد استفاده قرار می‌گیرد. واچویک و همکاران (۲۰۰۵) به روشی مشابه واسیچک برآوردی برای آنتروپی رنی به‌صورت

$$H_s(\omega,n) = -\frac{1}{s-1}\log\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{n}{2\omega}(x_{i+\omega:n}-x_{i-\omega:n})\right)^{1-s}\right], \qquad (1)$$

معرفی نمودند، که در آن $x_{1:n},\ldots,x_{n:n}$ آماره‌های مرتب نمونه تصادفی هستند و ω یک عدد صحیح کوچکتر یا مساوی $\frac{n}{2}$ است و برای $i < 1$، $x_{i:n} = x_{n:n}$ و برای $i > n$، $x_{i:n} = x_{1:n}$.

برآورد آنتروپی در به دست آوردن آماره نیکوئی برازش برای توزیع نرمال ابتدا توسط واسیچک (۱۹۷۶) و سپس توسط آریزونو و اوتا (۱۹۸۹)، علیزاده و علیزاده (۱۳۸۷)، زمان زاده و ارقامی (۱۳۸۷) و یوسف زاده و ارقامی (۲۰۰۸)، دادویچ و ون در مولن (۱۹۸۱) برای توزیع یکنواخت و ابراهیمی و همکاران (۱۹۹۲) برای توزیع نمایی مورد استفاده قرار گرفت. همچنین برآورد آنتروپی در آزمون نمایی بودن توزیع برای داده‌های سانسور شده نوع دو توسط پارک (۲۰۰۵) و برای داده‌های سانسور پیشرونده نوع دو توسط بالاکریشنان و همکاران (۲۰۰۷) به کار رفته است. حبیبی و ارقامی (۱۳۸۶) نیز از برآورد آنتروپی شانون آماره‌های مرتب برای آزمون تقارن توزیع کمک گرفتند. عباس‌نژاد و شکوری (۱۳۸۷) آزمونی برای توزیع نمایی

بر مبنای برآورد اطلاع رنی معرفی نمودند و نیز آزمون نیکوئی برازش برای توزیع نمایی و نرمال براساس اطلاع رنی توسط عباس‌نژاد (۲۰۱۱) ارائه شده است. در بخش دوم این مقاله برآورد آنتروپی رنی آماره‌های مرتب که تعمیمی از برآورد آنتروپی است، بیان می‌شود، سپس در بخش ۳ آزمون تقارن بر اساس آنتروپی رنی آماره‌های مرتب زیر نمونه‌های ۲ تایی ارائه و توان آزمون پیشنهادی با آزمون حبیبی و ارقامی (۱۳۸۶) مقایسه می‌شود. در بخش ۴ آزمون معرفی شده در بخش ۳ برای مقادیر مختلف k (حجم زیر نمونه) تعمیم داده شده و در انتها با کمک شبیه‌سازی نشان داده می‌شود که افزایش k، تأثیر مثبتی بر توان آزمون دارد.

۲ برآورد آنتروپی رنی آماره‌های مرتب

فرض کنید متغیر تصادفی پیوسته X دارای تابع توزیع $F(x)$ و تابع چگالی احتمال $f(x)$ باشد. همچنین فرض کنید $X_{r:k}$، آماره مرتب rام با تابع توزیع $F_{r:k}(x)$ از یک زیر نمونه تصادفی k تایی $(k = ۲, ۳, \ldots)$ باشد که با روش باجایگذاری از نمونه اصلی گرفته شده است.

لم ۱ : اگر $H_{s,۱:k}$ و $H_{s,k:k}$ به ترتیب آنتروپی رنی اولین و k امین آماره مرتب از یک زیر نمونه k تایی باشند، آن‌گاه

$$\begin{aligned}H_{s,۱:k} &= -\frac{s}{s-۱}\log k - \frac{۱}{s-۱}\log\int_{-\infty}^{+\infty} f^s(x)[۱-F(x)]^{s(k-۱)}dx,\\ H_{s,k:k} &= -\frac{s}{s-۱}\log k - \frac{۱}{s-۱}\log\int_{-\infty}^{+\infty} f^s(x)[F(x)]^{s(k-۱)}dx.\end{aligned}$$

برهان با کمک تعریف آنتروپی رنی، نتیجه به آسانی به دست می‌آید.

برای محاسبه برآورد آنتروپی $H_{s,۱:k}$ و $H_{s,k:k}$، با استفاده از تغییر متغیر $F(x) = p$ داریم

$$\begin{aligned}H_{s,۱:k} &= -\frac{s}{s-۱}\log k - \frac{۱}{s-۱}\log\int_{۰}^{۱}\left[\frac{d}{dp}F^{-۱}(p)\right]^{۱-s}(۱-p)^{s(k-۱)}dp,\\ H_{s,k:k} &= -\frac{s}{s-۱}\log k - \frac{۱}{s-۱}\log\int_{۰}^{۱}\left[\frac{d}{dp}F^{-۱}(p)\right]^{۱-s}p^{s(k-۱)}dp.\end{aligned}$$

بنابراین برآورد آنتروپی رنی $X_{1:k}$ و $X_{k:k}$ بر اساس زیرنمونه k تایی از نمونه‌ای به اندازه n برابر است با

$$\begin{aligned}\hat{H}_{s,1:k} &= -\frac{1}{s-1}\log\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(1-\frac{i}{n+1})^{s(k-1)}\left(\frac{n}{2\omega}(x_{i+\omega:n}-x_{i-\omega:n})\right)^{1-s}\\ &- \frac{s}{s-1}\log k, \qquad (2)\\ \hat{H}_{s,k:k} &= -\frac{1}{s-1}\log\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\frac{i}{n+1})^{s(k-1)}\left(\frac{n}{2\omega}(x_{i+\omega:n}-x_{i-\omega:n})\right)^{1-s}\\ &- \frac{s}{s-1}\log k. \qquad (3)\end{aligned}$$

۳ آزمون تقارن توزیع

در این بخش به معرفی آزمون تقارن توزیع بر اساس برآورد آنتروپی رنی آماره‌های مرتب پرداخته می‌شود. پارک (۱۹۹۵) لم زیر را برای آزمون تقارن توزیع بر اساس برآورد آنتروپی معرفی کرده است.

لم ۲ (پارک، ۱۹۹۵) فرض کنید $D_k = E_{1:k} - E_{k:k}$، که در آن $E_{1:k}$ و $E_{k:k}$ به‌ترتیب نشان‌دهنده آنتروپی شانون اولین و k امین آماره مرتب از یک زیر نمونه k تایی هستند. آن‌گاه برای $k = 2, 3, \ldots$، $D_k = 0$ اگر و تنها اگر تابع f متقارن باشد. براساس آنتروپی رنی، لم ۲ به صورت زیر تعمیم داده می‌شود.

لم ۳ فرض کنید $D_{k,s} = H_{s,1:k} - H_{s,k:k}$. آن‌گاه برای $k = 2, \ldots$، $D_{k,s} = 0$ اگر و تنها اگر تابع f متقارن باشد.

برهان بدون از دست دادن کلیت مسأله، فرض کنید تابع f نسبت به صفر متقارن باشد. در این‌صورت $X_{i:n} \stackrel{d}{=} -X_{n-i+1:n}$ (آذرنوش، ۱۳۷۹). بنابراین برای $k = 2$ (حجم زیر نمونه) داریم

$$X_{1:2} \stackrel{d}{=} -X_{2:2},$$

از طرفی $H_s(X_{1:2}) = H_s(-X_{2:2}) = H_s(X_{2:2})$، در نتیجه

$$D_{k,s} = H_s(X_{1:2}) - H_s(X_{2:2}) = 0.$$

برعکس فرض کنید $D_{k,s} = 0$، در این صورت $H_s(X_{1:2}) = H_s(X_{2:2})$ یا $H_s(X_{1:2}) = H_s(-X_{2:2})$. حال اگر قرار داده شود $Y = -X$، آن گاه

$$-X_{2:2} = Y_{1:2}$$

بنابراین

$$H_s(X_{1:2}) = H_s(Y_{1:2}),$$

با توجه به قضیه ۲ براتپور و همکاران (۲۰۰۸) داریم

$$X \stackrel{d}{=} Y \Rightarrow X \stackrel{d}{=} -X,$$

و اثبات تمام است.

بنابراین مقدار $D_{k,s}$ معیار خوبی برای تشخیص تقارن توزیع داده‌هاست، از این رو برای آزمون تقارن توزیع در مقابل توزیع‌های نامتقارن (چوله) می‌توان از $D_{k,s}$ به عنوان آماره آزمون استفاده کرد. در ادامه آماره آزمون $D_{k,s}$ را با کمک روابط (۲) و (۳) به‌صورت

$$D_{k,s}(n,\omega) = -\frac{1}{s-1}\log\frac{\sum_{i=1}^{n}(1-\frac{i}{n+1})^{s(k-1)}(x_{i+\omega:n}-x_{i-\omega:n})^{1-s}}{\sum_{i=1}^{n}(\frac{i}{n+1})^{s(k-1)}(x_{i+\omega:n}-x_{i-\omega:n})^{1-s}}, \quad (4)$$

برآورد می‌شود.

مقادیر بزرگ $|D_{k,s}|$ از H_1 پشتیبانی می‌کنند، بنابراین فرضیه H_0 به نفع H_1 در سطح معنی‌داری α رد می‌شود اگر $|D_{k,s}| > d_{k,s}(\alpha)$، که در آن مقدار بحرانی $d_{k,s}(\alpha)$ به وسیله چندک $\alpha - 1$ام از توزیع آماره $D_{k,s}$ تحت فرضیه H_0 محاسبه می‌شود. از آنجا که توزیع $D_{k,s}$ تحت فرضیه H_0 پیچیده است، برای تخمین چندک‌های توزیع آماره آزمون برای محاسبه مقادیر بحرانی و همچنین در بخش بعدی برای محاسبه توان‌های تجربی آزمون از روش مونت کارلو استفاده می‌شود.

برای این منظور به ازای مقادیر مختلف s و مقادیر $\omega < \frac{n}{2}$، ۱۰۰۰۰ نمونه تصادفی به حجم n از توزیع نرمال استاندارد تولید نموده و چندک $\alpha - 1$ام به‌عنوان مقدار بحرانی تعیین می‌شود. لازم به ذکر است که چون آماره آزمون نسبت به تبدیل مکان-مقیاس پایا است، توزیع نرمال به‌صورت استاندارد در نظر گرفته شده است.

۱.۳ توان آزمون

در این بخش توان آزمون پیشنهادی با توان آزمون حبیبی و ارقامی (۱۳۸۶) مقایسه می‌شود. برای این منظور، توزیع‌های جانشین زیر در نظر گرفته می‌شوند.

- توزیع کی‌دو با درجه آزادی ۱ و ۴ و ۱۰.
- توزیع گاما با پارامتر شکل ۱/۵ و ۲.
- توزیع وایبول با پارامتر شکل ۰/۵ و ۱/۵ و ۲.

مجدداً تأکید می‌شود که چون آماره آزمون مقیاس-پایا است، پارامتر مقیاس در توزیع‌های گاما و وایبل مقدار یک در نظر گرفته شده است. به منظور محاسبه توان آزمون پیشنهادی، ۱۰۰۰۰ نمونه به حجم‌های $n = ۱۰, ۲۰$ از توزیع‌های جانشین تولید می‌شود. در جدول ۱ توان آزمون پیشنهادی $D_{k,s}$ و آزمون حبیبی و ارقامی (۱۳۸۶) به ازای $k = ۲$، $\alpha = ۰/۰۵$ و $n = ۱۰, ۲۰$ ارائه شده‌اند.

نتایج شبیه‌سازی نشان می‌دهند مقادیر ω که منجر به ماکسیمم توان آزمون می‌شود مشابه مقادیر ارائه شده توسط پارک (۱۹۹۹) است. از این رو توان آزمون برای $n = ۱۰$، به ازای $\omega = ۳$ و برای $n = ۲۰$، به ازای $\omega = ۴$ ارائه شده است. لازم به ذکر است، توان آزمون به ازای مقادیر مختلف s محاسبه شده و مشاهده شد که درحالت کلی مقدار بهینه s به توزیع جانشین بستگی دارد. بنابراین نمی‌توان یک مقدار قطعی برای s تعیین نمود. در اینجا مقدار $s = ۰/۵$ پیشنهاد می‌شود که براساس نتایج شبیه‌سازی برای بیشتر توزیع‌های جانشین بیشترین توان را می‌دهد. در جدول ۱ مقدار $s = ۰/۵$ در نظر گرفته شده است. از جدول ۱ مشاهده می‌شود که آماره ارائه شده در مورد توزیع‌های کی‌دو با درجه آزادی ۴ و ۱۰ و همچنین به ازای $n = ۱۰$ در مقابل توزیع وایبل با پارامتر ۱/۵ و ۲، و توزیع گاما با پارامتر ۱/۵

و ۲، توان بیشتری نسبت به آزمون حبیبی و ارقامی (۱۳۸۶) دارد، گر چه این اختلاف‌ها بسیار ناچیز هستند.

جدول ۱: مقایسه توان‌ها(۱۰۰×) برای $n =$ ۱۰,۲۰ و $\alpha =$۰/۰۵

توزیع	n	توان آزمون $D_{k,s}$	توان آزمون D_k
$\chi^2(1)$	۱۰	۷۸/۴۷	۸۰/۶۳
	۲۰	۹۸/۹۸	۹۹/۴۴
$\chi^2(4)$	۱۰	۲۶/۲۶	۲۵/۴۳
	۲۰	۵۸/۸۴	۵۸/۴۳
$\chi^2(10)$	۱۰	۱۲/۴۶	۱۱/۹۴
	۲۰	۲۷/۷۷	۲۵/۵۱
$Gam(1/5)$	۱۰	۳۴/۸۳	۳۴/۳۳
	۲۰	۷۳/۱۰	۷۴/۵۳
$Gam(2)$	۱۰	۲۵/۷۳	۲۵/۳۷
	۲۰	۵۷/۹۴	۵۸/۴۹
$Wei(0/5)$	۱۰	۹۱/۸۸	۹۳/۱۱
	۲۰	۹۹/۹۵	۹۹/۹۸
$Wei(1/5)$	۱۰	۱۹/۵۱	۱۹/۱۰
	۲۰	۴۷/۲۵	۴۷/۶۵
$Wei(2)$	۱۰	۸/۳۶	۸/۳۱
	۲۰	۱۷/۷۵	۱۷/۷۶

۴ توسعه آزمون تقارن توزیع

همان‌طور که در بخش ۳ به آن اشاره شد، مقدار آماره آزمون در رابطه (۴) فقط برای $k =$ ۲ محاسبه و به دنبال آن توان آزمون نیز تنها برای $k =$ ۲ محاسبه شده است. در این بخش توان آزمون برای مقادیر مختلف k محاسبه شده و مقداری از k که توان آزمون را ماکسیمم کند معرفی می‌شود.

در این بخش با توجه به آماره آزمون حبیبی و ارقامی (۱۳۸۶) تفاضل آنتروپی

رنی آماره‌های مرتب که به یک فاصله از دو انتهای زیرنمونه‌ها قرار دارند به عنوان آماره آزمون در نظر گرفته می‌شود، یعنی

$$D_{k,s}(r) = H_{s,r:k} - H_{s,k-r+1:k} \quad ; \quad k = 2, 3, \ldots, \quad r = 1, 2, \ldots, [\frac{k}{2}].$$

با اثباتی مشابه لم ۳ برای آماره آزمون فوق، از آن نیز می‌توان به عنوان آماره آزمون تقارن توزیع استفاده نمود، با این تفاوت که می‌توان توان آزمون را برای مقادیر مختلف k و همچنین r محاسبه نمود. حال آماره آزمون فوق مشابه روابط (۲) و (۳) به‌صورت

$$D_{k,s}(r) = -\frac{1}{s-1} \log \frac{\sum_{i=1}^{n} (1-t)^{s(r-1)} t^{s(k-r)} (x_{i+\omega:n} - x_{i-\omega:n})^{1-s}}{\sum_{i=1}^{n} t^{s(r-1)} (1-t)^{s(k-r)} (x_{i+\omega:n} - x_{i-\omega:n})^{1-s}}. \quad (5)$$

برآورد می‌شود، که در آن $t = \frac{i}{n+1}$ است. حال با استفاده از رابطه (۵) مقادیر بحرانی آزمون $|\hat{D}_{k,s}(r)|$، را براساس روش مونت کارلو برای ۱۰۰۰۰ نمونه شبیه‌سازی کرده و سپس توان آزمون در سطح $\alpha = 0/05$ برای نمونه‌هایی به حجم $n = 10(\omega = 3)$ و $n = 20(\omega = 4)$ برای مقادیر مختلف r و k در مقابل توزیع‌های جانشین معرفی شده در بخش ۳ محاسبه شده است. نتایج در جدول ۲ ارائه شده‌اند. حبیبی و ارقامی (۱۳۸۶) برای $n = 10$، $k = 4$ و $r = 2$ و برای $n = 20$، $k = 10$ و $r = 5$ را پیشنهاد کردند. توان آزمون حبیبی و ارقامی (۱۳۸۶) به ازای این مقادیر نیز در جدول ۲ آورده شده است.

در جدول ۲ مشاهده می‌شود که افزایش k تأثیر مثبتی بر توان آزمون داشته، به نحوی که ماکسیمم توان در اکثر موارد برای $n = 10$ به ازای $k = 4$ و برای $n = 20$ به ازای $k = 10$ به دست می‌آید. به ازای مقدار ثابت k، با افزایش r توان آزمون در بعضی موارد کاهش یافته و در مواردی نیز افزایش می‌یابد. بنابراین نمی‌توان به طور کلی در مورد تأثیر r بر توان آزمون اظهار نظر کرد. نتایج جدول ۲، در بیشتر موارد کاهش توان آزمون را به ازای افزایش r نشان می‌دهند.

با مقایسه توان‌های آزمون مبتنی بر $D_{k,s}(r)$ با آزمون حبیبی و ارقامی (۱۳۸۶) مشاهده می‌شود که آزمون معرفی شده برای $n = 10$، به ازای همه توزیع های جانشین به جز توزیع کی‌دو با درجه آزادی یک و توزیع وایبول با درجه آزادی ۲

توان بالاتری دارد، گرچه این اختلاف در توان‌ها ناچیز است. برای $n = ۲۰$، در همه موارد آزمون ارائه شده توان بیشتری دارد. علاوه بر این اختلاف توان‌ها در مقایسه با حالت $n = ۱۰$ بیشتر است.

همچنین می‌توان گفت که در مقابل توزیع‌های جانشین کی‌دو هر چقدر درجه آزادی بیشتر می‌شود، یا به عبارتی توزیع به سمت تقارن می‌رود، اختلاف توان آزمون مبتنی بر آنتروپی رنی با توان آزمون حبیبی و ارقامی (۱۳۸۶) بیشتر می‌شود.

۵ بحث و نتیجه‌گیری

در این مقاله، با استفاده از تفاضل آنتروپی رنی آماره‌های مرتب زیرنمونه‌ها، آزمونی برای تقارن توزیع ارائه شد. این آزمون به ازای $k = ۲$ (زیرنمونه‌های ۲ تایی) تفاوت چشمگیری با آزمون حبیبی و ارقامی (۱۳۸۶) که بر اساس آنتروپی شانون معرفی شده بود، ندارد. اما به ازای سایر مقادیر k و همچنین مقادیر مختلف r، بخصوص برای $n = ۲۰$، آزمون پیشنهادی عملکرد بهتری را نشان می‌دهد. هر چند به طور کلی نمی‌توان شرایطی را مشخص کرد که تحت آنها آزمون پیشنهادی همواره نسبت به آزمون رقیب بهتر عمل کند، اما استفاده از آنتروپی رنی به عنوان آماره آزمون به علت داشتن پارامتر s در مقایسه با آنتروپی شانون این امکان را فراهم می‌سازد که با تغییر s، آزمون پرتوان تری به دست آورده شود.

بر اساس نتایج شبیه سازی انجام شده مقدار $s = ۰/۵$ پیشنهاد می‌شود. علاوه بر این با توجه به جدول ۲، توصیه می‌شود برای $n = ۱۰$ از $k = ۴$ و برای $n = ۲۰$ از $k = ۱۰$ استفاده شود.

تقدیر و تشکر

نویسندگان از پیشنهادهای ارزندهٔ داوران محترم که باعث اصلاحات سازنده و ارائه بهتر این مقاله شد کمال تشکر و سپاسگزاری را دارند. در ضمن از حمایت مالی قطب داده‌های ترتیبی و فضایی دانشگاه فردوسی مشهد نیز قدردانی و تشکر می‌شود.

جدول ۲: توان آزمون (۱۰۰×) برای $n = ۱۰, ۲۰$ و $s = ۰/۵$

آماره	n	k	r	$\chi^۲(۱)$	$\chi^۲(۴)$	$\chi^۲(۱۰)$	$Gam(۱.۵)$	$Gam(۲)$	$Wei(.۵)$	$Wei(۱.۵)$	$Wei(۲)$
$D_{k,s}$	۱۰	۲	۱	۷۷/۲۹	۲۴/۱۷	۱۳/۷۹	۳۳/۷۷	۲۶/۳۳	۹۲/۲۷	۱۹/۲۷	۸/۲۶
	۱۰	۴	۱	۷۷/۴۹	۲۷/۵۱	۱۲/۵۵	۳۳/۶۲	۲۵/۴۲	۹۳/۲۷	۱۹/۲۲	۸/۲۶
	۱۰	۴	۲	۷۸/۷۶	۲۶/۹۲	۱۲/۴۵	۳۴/۸۹	۲۶/۴۳	۹۱/۵۰	۱۹/۲۲	۸/۰۳
	۲۰	۲	۱	۹۸/۹۰	۵۹/۰۱	۲۶/۷۵	۷۳/۲۳	۵۹/۷۸	۹۹/۹۵	۴۶/۸۶	۱۷/۸۴
	۲۰	۴	۱	۹۸/۹۹	۵۹/۳۹	۲۶/۳۰	۷۳/۹۵	۵۸/۹۳	۹۹/۹۷	۴۵/۶۷	۱۷/۶۴
	۲۰	۴	۲	۹۸/۷۸	۵۸/۳۲	۲۷/۰۷	۷۲/۲۸	۵۹/۲۷	۹۹/۸۹	۴۵/۰۵	۱۸/۳۹
	۲۰	۶	۱	۹۹/۱۴	۵۹/۸۱	۲۶/۴۹	۷۲/۷۱	۵۹/۳۳	۹۹/۹۸	۴۷/۶۱	۱۸/۱۲
	۲۰	۶	۲	۹۸/۸۶	۵۹/۶۸	۲۷/۲۷	۷۱/۴۶	۵۸/۵۴	۹۹/۹۲	۴۶/۱۷	۱۸/۰۳
	۲۰	۶	۳	۹۸/۴۸	۶۰/۳۴	۲۷/۴۴	۷۱/۵۶	۵۹/۳۰	۹۹/۹۰	۴۶/۴۲	۱۷/۳۶
	۲۰	۸	۱	۹۸/۹۹	۵۹/۸۴	۲۶/۴۴	۷۲/۰۷	۵۹/۶۱	۹۹/۹۵	۴۵/۸۱	۱۷/۶۲
	۲۰	۸	۲	۹۹/۰۱	۵۸/۶۴	۲۷/۴۷	۷۳/۳۳	۶۰/۵۵	۹۹/۹۴	۴۷/۲۴	۱۷/۳۶
	۲۰	۸	۳	۹۸/۵۷	۵۷/۸۹	۲۷/۱۹	۷۱/۹۱	۵۸/۷۰	۹۹/۸۹	۴۵/۷۲	۱۷/۳۱
	۲۰	۸	۴	۹۸/۲۶	۵۷/۷۴	۲۶/۱۲	۷۰/۸۴	۵۸/۴۷	۹۹/۹۰	۴۴/۹۴	۱۷/۲۸
	۲۰	۱۰	۱	۹۹/۱۶	۵۸/۴۴	۲۵/۶۰	۷۴/۳۹	۵۸/۱۹	۹۹/۹۸	۴۶/۱۴	۱۷/۵۲
	۲۰	۱۰	۲	۹۹/۰۵	۵۹/۹۶	۲۵/۵۰	۷۳/۱۷	۶۰/۰۴	۹۹/۹۲	۴۷/۱۷	۱۸/۷۱
	۲۰	۱۰	۳	۹۸/۹۶	۵۸/۶۲	۲۷/۵۵	۷۱/۷۴	۵۹/۹۴	۹۹/۹۱	۴۵/۵۲	۱۷/۸۶
	۲۰	۱۰	۴	۹۸/۳۳	۵۶/۲۱	۲۶/۶۷	۶۹/۸۰	۵۷/۹۴	۹۹/۸۹	۴۳/۹۹	۱۶/۸۵
	۲۰	۱۰	۵	۹۷/۹۳	۵۶/۰۰	۲۷/۱۷	۶۹/۶۷	۵۷/۷۲	۹۹/۸۴	۴۳/۲۴	۱۶/۶۸
D_k	۱۰	۴	۲	۷۹/۳۹	۲۷/۳۳	۱۲/۵۷	۳۴/۳۸	۲۶/۳۸	۹۲/۸۷	۱۹/۵۶	۸/۵۹
	۲۰	۱۰	۵	۹۶/۸۴	۴۴/۴۲	۱۹/۰۶	۵۷/۰۵	۴۴/۹۲	۹۹/۵۸	۳۳/۴۲	۱۳/۴۵

مراجع

آذرنوش، ح. (۱۳۷۹)، نخستین درس در آماره های ترتیبی، انتشارات دانشگاه فردوسی مشهد. ص ۴۰.

حبیبی راد، آ.، ارقامی، ن. (۱۳۸۶)، آزمون متقارن بودن توزیع بر مبنای آنتروپی، مجله علوم آماری، جلد **۱**، شماره ۲، ۱۲۰-۱۰۹.

زمان‌زاده، ا.، ارقامی، ن. (۱۳۸۷)، آزمون‌های نیکویی برازش توزیع‌های نرمال و نمایی بر مبنای برآوردگرهای جدید آنتروپی، مجله علوم آماری، جلد **۲**، شماره ۲، ۲۰۰-۱۷۹.

عباس‌نژاد، م.، شکوری، م. (۱۳۸۷)، آزمون نیکویی برازش برای توزیع نمایی بر مبنای برآورد اطلاع رنی، مجله علوم آماری، جلد **۲**، شماره ۲، ۲۰۱-۲۱۱.

علیزاده، ن. ه.، علیزاده، ن. ر. (۱۳۸۷)، مقایسه توان آزمون‌های نیکویی برازش بر مبنای آنتروپی با سایر روش‌ها، مجله علوم آماری، جلد **۲**، شماره ۱، ۱۱۳-۹۷.

Abbasnejad, M. (2011), Some Goodness of Fit Tests Based on Renyi Information, *Applied Mathematical Sciences*, **39**, 1921-1936.

Ahmad, I. A. and Lin, P. E. (1976), A Nonparametric Estimation of the Entropy of the Absolutely Continuous Distributions, *IEEE Transacation on Information Theory*, **22**, 327-375.

Arizono, I. and Ohta, H. (1989), A Test for Normality Based on Kullback-leibler Information, *The American Statistician*, **43**, 20-23.

Balakrishnan, N., Habibi Rad, A. and Arghami, N. R. (2007), Testing Exponentiality Based on the Kullback-Leibler Information with Progressively Type II Censored Data, *IEEE Transaction on Reliability*, **56**, 301-307.

Baratpour, S. and Ahmadi, J. and Arghami, N. R. (2008), Characterizations based on Renyi Entropy of Order Statistics and Record Values, *Journal of Statistical Planning and Inference*, **138**, 2544-2551.

Correa, J. C. (1995), A New Estimator of Entropy, *Communications in Statistics-Theory and Methods*, **24**, 2439-2449.

Dudewicz, E. J. and Van der Meulen, E. C. (1981), Entropy-based Tests of Uniformity, *Journal of American Statistical Association*, **76**, 967-974.

Ebrahimi, N., Habibullah, M. and Soofi, E. S. (1992), Testing Exponentiality Based on Kullback-Leibler Information, *Journal of the Royal Statistical Society*, **54**, 739-748.

Ebrahimi, N., Pflughoeft, K. and Soofi, E. S. (1994), Two Measures of Sample Entropy, *Statistics & Probability Letters*, **20**, 225-234.

Park, S. (1995), The Entropy of Consecutive Order Statistics, *IEEE Transaction Information Theory*, **41**, 2003-2007.

Park, S. (1999), A Goodness-of-fit Test for Normality Based on the Sample Entropy of Order Statistics, *Statistics and Probability Letters*, **44**, 359-363.

Park, S. (2005), Testing Exponentiality Based on the Kullback-Leibler Information with the Type II Censored Data, *IEEE Transaction on Reliability*, **54**, 22-26.

Renyi, A. (1961), On Measures of Entropy and Information, *In Proceeding of Fourth Berkeley Symposioum*, Vol. I, UC Press, Berkeley, 547-561.

Shannon, C. E. (1948), A Mathematical Theory of Communications, *Bell System Technical Journal*, **27**, 379-423; 623-656.

Vasicek, O. (1976), A Test for Normality Based on Sample Entropy, *Journal of the Royal Statistical Society*, **38**, 54-59.

Wachowiak, M. P. and Smolikova, R. and Tourassi, G. D. and Elmaghraby, A. S. (2005), Estimation of Generalized Entropies with Sample Spacing, *Pattern Annal Applic*, **8**, 95-101.

Yousefzadeh, F. and Arghami, N. R. (2008), Testing Exponentiality Based on Type II Censored data and a New cdf Estimator, *Communications in Statistics: Simulation and Computation*, **37**, 1479-1499.