

## تعیین اندازه نمونه بیزی برای توزیع نرمال با استفاده از فاصله‌های با کمترین زیان پسین

نرگس نجفی<sup>۱</sup>، حسین بیورانی<sup>۲</sup>

<sup>۱</sup>دانشگاه آزاد اسلامی، واحد ماکو

<sup>۲</sup>دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه تبریز

تاریخ دریافت: ۱۳۸۸/۱۰/۱۰ تاریخ آخرین بازنگری: ۱۳۸۹/۵/۱۲

**چکیده:** در این مقاله ابتدا به معرفی فاصله‌های  $p$ -تحميل با کمترین زیان پسین پرداخته و سپس به کمک تابع زیان توان دوم خطا و استفاده از سه روش متوسط طول، متوسط همگرایی و بدترین برآمد به محاسبه اندازه نمونه برای برآورد پارامتر  $\theta$  در توزیع نرمال با توزیع پیشین نرمال پرداخته می‌شود.

**واژه‌های کلیدی:** استنباط بیزی، تابع زیان توان دوم خطا، ناحیه‌های با کمترین زیان پسین.

### ۱ مقدمه

یکی از روش‌های تعیین اندازه نمونه استفاده از برآورد فاصله‌ای است. در آمار کلاسیک، دسو و رواگوار (۱۹۹۰)، لیپسی (۱۹۹۰) و لمشو و همکاران (۱۹۹۰) فرمول‌هایی برای اندازه نمونه برای توزیع نرمال با استفاده از فاصله اطمینان  $100p$  درصد و طول  $l$  به دست آورده‌اند. فاصله‌های اطمینان کلاسیک اغلب برای تعیین

آدرس الکترونیک مسئول مقاله: نرگس نجفی، narges\_najafi63@yahoo.com  
کد موضوع‌بندی ریاضی (۲۰۰۰): ۶۲F۱۵

اندازه نمونه برای آزمایش‌های بعدی مورد استفاده قرار می‌گیرند. محقق با مشخص کردن سطح اطمینان  $p$  و با فرض این که طول فاصله اطمینان برابر  $l$  باشد، معادله را برحسب  $n$  حل کرده و اندازه نمونه مناسب را به صورت  $n = \left(\frac{2qz}{p}\right)^2$  به دست می‌آورد، که در آن  $q$  چندک  $p$  درصد از توزیع مورد نظر است. در عمل معمولاً واریانس نامعلوم بوده و از برآورد آن استفاده می‌شود. مسئله‌ای که از اندازه نمونه به دست آمده آشکار است این است که

(۱) هرچه سطح اطمینان  $p$  افزایش یابد، اندازه نمونه نیز بیشتر می‌شود.

(۲) هر چه طول فاصله کوچکتر شود، اندازه نمونه بزرگتر می‌شود و بالاخره واریانس‌های بزرگتر منجر به اندازه نمونه بزرگتری می‌شوند.

اخیراً برای برآورد اندازه نمونه بیزی روش‌های مختلفی پیشنهاد شده است. آدکوک (۱۹۸۸ و ۱۹۹۷) و فام‌گیبا و ترکان (۱۹۹۲) روش بیزی را برای برآورد فاصله‌ای بر اساس تقریب‌های نرمال، چگالی‌های پسین بر اساس میانگین‌ها و واریانس‌های پسین به کار بردند.

هدف از این مقاله برآورد اندازه نمونه بیزی بر اساس فاصله‌های با کمترین زیان پسین<sup>۱</sup> (LPL) است. در این مقاله با به کار بردن نظریه تصمیم و استفاده از تابع زیان به کمک سه روش متوسط طول<sup>۲</sup> (ALC)، متوسط پوشش<sup>۳</sup> (ACC) و بدترین برآمد<sup>۴</sup> (WOC)، اندازه نمونه بهینه را برای برآورد پارامتر  $\theta$  در توزیع نرمال به دست آورده می‌شود. جوزف و همکاران (۱۹۹۵ و ۱۹۹۷) و جوزف و بلیسل (۱۹۹۱) این سه روش را بر اساس فاصله‌های با چگالی پسین مرتفع<sup>۵</sup> (HPD) برای تعیین اندازه نمونه بیزی برای پارامتر دو جمله‌ای و برای تفاضل نسبت‌های دو جمله‌ای و برآورد میانگین نرمال و تفاضل میانگین‌های نرمال به کار بردند و تا آنجایی که مولفین بررسی کرده‌اند، استفاده از این سه روش برای یافتن اندازه نمونه بیزی بر اساس

<sup>۱</sup> Lowest Posterior Loss

<sup>۲</sup> Average Length Criterion

<sup>۳</sup> Average Coverage Criterion

<sup>۴</sup> Worst Outcome Criterion

<sup>۵</sup> Highest Posterior Density

فاصله‌های با کمترین زیان پسین انجام نشده است.

## ۲ فاصله‌های با کمترین زیان پسین برای توزیع نرمال

فرض کنید  $\underline{X} = (X_1, \dots, X_n)$  نمونه تصادفی به اندازه  $n$  از توزیع نرمال  $N(\theta, \sigma^2)$  باشد، که در آن  $\sigma^2$  معلوم است. همچنین فرض کنید  $\theta$  متغیری تصادفی از توزیع نرمال  $N(\mu, \tau^2)$  است، که در آن  $\mu$  و  $\tau$  نیز معلوم هستند. اگر  $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$  میانگین این نمونه  $n$  تایی از  $x_i$ ها باشد، با استفاده از قضیه بیز توزیع پسین  $\theta$  نرمال  $N(\mu_n(\bar{x}), \text{Var}(\theta | \bar{x}))$  خواهد بود، که در آن

$$\mu_n(\bar{x}) = \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + n\tau^2} \mu + \frac{n\tau^2}{\sigma^2 + n\tau^2} \bar{x} \quad (1)$$

$$\text{Var}(\theta | \bar{x}) = \frac{\sigma^2 \tau^2}{\sigma^2 + n\tau^2} = \sigma_n^2 \quad (2)$$

همچنین توزیع پیشگو برای  $\bar{x}$  نیز نرمال  $N(\mu, \sigma_n^2)$  است، که در آن  $\sigma_n^2 = \frac{\sigma^2 + n\tau^2}{n}$  (برناردو و اسمیت، ۱۹۹۴).

فرض کنید تابع زیان توان دوم خطا به صورت  $L(\theta, \delta(\underline{x})) = (\delta(\underline{x}) - \theta)^2$  باشد، در این صورت فاصله  $p$ -تحمل با کمترین زیان پسین برای توزیع نرمال زیرمجموعه‌ای به صورت  $R_p^\ell$  از فضای پارامتر است، هرگاه داشته باشیم

$$\begin{aligned} i) & \int_{R_p^\ell} N(\theta | \mu_n(\bar{x}), \sigma_n^2) d\theta = p \\ ii) & \forall \delta \in R_p^\ell, \forall \delta' \notin R_p^\ell, R(\pi, \delta) \leq R(\pi, \delta') \end{aligned}$$

که در آن  $R(\pi, \delta(\underline{x})) = \int_{-\infty}^{+\infty} N(\theta | \mu_n(\bar{x}), \sigma_n^2) (\delta(\underline{x}) - \theta)^2 d\theta$  مخاطره پسین است و  $(\mu_n(\bar{x})$  و  $\sigma_n^2$  در روابط (۲) و (۳) آمده است. بنابراین داریم

$$\begin{aligned} R(\pi, \delta(\underline{x})) &= \int_{-\infty}^{+\infty} N(\theta | \mu_n(\bar{x}), \sigma_n^2) (\delta(\underline{x}) - \theta)^2 d\theta \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} N(\theta | \mu_n(\bar{x}), \sigma_n^2) (\delta^2(\underline{x}) - 2\delta(\underline{x})\theta + \theta^2) d\theta \\ &= \delta^2(\underline{x}) - 2\delta(\underline{x})E(\theta | \underline{x}) + E(\theta^2 | \underline{x}) \end{aligned}$$

۸۰ ..... اندازه نمونه بیزی برای توزیع نرمال با فاصله‌های کمترین زیان پسین

$$= \delta^2(\underline{x}) - 2\delta(\underline{x})\mu_n(\bar{x}) + (\sigma_n^2 + \mu_n^2(\bar{x})) \quad (3)$$

برای مقادیر مشخص  $\sigma^2$ ,  $\mu$ ,  $\tau^2$ ,  $n$  و  $\bar{x}$  مخاطره پسین، تابع درجه دوم از برآوردگر  $\delta(\underline{x})$  است. بنابراین با روش‌های عددی می‌توان مقادیری از  $\delta(\underline{x})$  را چنان انتخاب کرد که ضمن مینیمم کردن مخاطره پسین، مساحت سطح زیر نمودار تابع چگالی پسین برای این مقادیر، مقدار ثابت  $p$  باشد. به این ترتیب فاصله با کمترین زیان پسین به دست آورده می‌شود. به عنوان مثال اگر  $\sigma^2 = 1$ ,  $\mu = 1$ ,  $\tau^2 = 0/1$ ,  $n = 10$  و  $\bar{x} = 0/5$  باشند، معادله مخاطره پسین به صورت

$$R(\pi, \delta(\underline{x})) = \delta^2(\underline{x}) - 0/75\delta(\underline{x}) + 0/61$$

به دست می‌آید، که با حل عددی آن به ازای مقادیر مختلف مخاطره پسین فاصله‌ای با کمترین زیان پسین به صورت  $(1/3805)$  و  $(0/1195)$  به دست می‌آید. برای این معادله،  $44/5$  درصد از نقاط زیر خط مخاطره پسین قرار دارند.

### ۳ اندازه نمونه بیزی با استفاده از فاصله‌های با کمترین زیان پسین

برای تعیین اندازه نمونه به یک فاصله تحمل و استفاده از سه روش متوسط طول، متوسط پوشش و بدترین برآمد نیازمند است. آدکوک (۱۹۸۸) پیشنهاد کرد فاصله به کار گرفته شده فاصله‌ای متقارن حول میانگین پسین  $R_p^l = E(\theta | \underline{x}) \pm \frac{l}{2}$  باشد، که در آن  $l$ ، طول معلوم است. جوزف و همکاران (۱۹۹۷) ناحیه‌ای به صورت

$$R_p^l = [a, a + l]$$

پیشنهاد کردند، که در آن  $l$  از قبل معلوم است و  $a$  چنان تعیین می‌شود که فاصله  $R_p^l$  یک فاصله با چگالی پسین مرتفع باشد. اگر چه در کل، نتیجه حاصل از این دو روش متفاوت است، ولی با توجه به اینکه برای توزیع‌های تک‌مدی و متقارن مانند توزیع نرمال، ناحیه با چگالی پسین مرتفع، فاصله‌ای متقارن حول میانگین است، پس نتیجه‌ای مشابه دو روش به دست می‌آید.

در حالتی که واریانس توزیع نرمال معلوم است و هدف برآورد میانگین باشد، چون  $\sigma_n^2$  فقط به  $n$  بستگی دارد و مستقل از مقادیر مشاهدات است، آدکوک و

جوزف (۱۹۸۸) به این نتیجه رسیدند که هر سه روش متوسط طول، متوسط پوشش و بدترین برآمد منجر به نتیجه مشابهی به صورت

$$2Z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\sigma_n^2} \leq \ell \quad \sigma_n^2 = \frac{\sigma^2 \tau^2}{\sigma^2 + n\tau^2} \quad n \geq \frac{4\sigma^2 Z_{\frac{\alpha}{2}}^2}{\ell^2} - \frac{\sigma^2}{\tau^2} \quad (4)$$

برای اندازه نمونه می‌شوند. فاصله‌های با کمترین زیان پسین مانند فاصله‌های با چگالی پسین مرتفع برای توزیع نرمال متقارن نیستند، مگر اینکه تابع زیان مورد نظر، مانند تابع زیان اختلاف حقیقی (برناردو، ۲۰۰۵) پایا باشد. بنابراین در ادامه تعیین اندازه نمونه با استفاده از فاصله‌های با کمترین زیان پسین و سه روش ذکر شده را برای توزیع نرمال تعریف کرده و با استفاده از شبیه‌سازی، مقادیر اندازه نمونه محاسبه می‌شود.

### ۱.۳ روش پوشش متوسط برای توزیع نرمال

روش ACC (جوزف و بلیسل، ۱۹۹۱) کمترین مقدار  $n$  را طوری تعیین می‌کند که نابرابری

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \int_{RLPL} N(\theta | \mu_n(\bar{x}), \sigma_n^2) d\theta \right\} N(\bar{x} | \mu, \sigma_n^2) d\bar{x} \geq p \quad (5)$$

برقرار باشد، که در آن ناحیه تحمل با کمترین زیان پسین است. چون  $\mu_n(\bar{x})$  به مقدار مشاهدات و  $n$  بستگی دارد، به دست آوردن مقدار عددی برای طرف چپ نامعادله (۵) بسیار مشکل است. بنابراین باید از جستجوی عددی برای رسیدن به اندازه نمونه درست استفاده کرد. یک روش برای این فرایند به کار بردن استراتژی جستجوی زیربخشی است. این فرایند زمانی متوقف می‌شود که نتایج مطلوب و مورد نظر برای  $n$  برقرار باشد نه برای  $n - 1$ . در زیر به طور خلاصه از الگوریتم مونت کارلو برای تکمیل روش‌های توصیف شده استفاده خواهد شد. به طور کلی روش ACC به صورت

$$\int_{\mathcal{X}} \left\{ \int_{R_p^i} \pi(\theta | \underline{x}) d\theta \right\} f(\underline{x}) d\underline{x} \geq p \quad (6)$$

۸۲ ..... اندازه نمونه بیزی برای توزیع نرمال با فاصله‌های کمترین زیان پسین

قابل بیان است، که در آن  $R_p^\ell$  فاصله‌ای به طول  $\ell$  و  $f(x)$  تابع چگالی پیشگو و  $x$  دامنه مقادیر  $x$  است. الگوریتم با تولید یک نمونه تصادفی به حجم  $M$  از توزیع  $f(x)$  ادامه می‌یابد و برای هر  $M$  نمونه، انتگرال داخل اکولاد محاسبه می‌شود. متوسط این  $M$  انتگرال، سمت چپ نامعادله (۶) را تقریب می‌زند تا نتیجه مطلوب برای  $n$  به دست آید. این نگرش به نگرش آمیخته‌ی بیزی-درست‌نمایی معروف است که جوزف و همکاران (۱۹۹۷) آن را برای طرح آزمایش‌هایی برای برآورد تفاضل بین دو نسبت دوجمله‌ای به کار بردند و نتایج آن را با نتایج فرمول‌های استاندارد مقایسه کردند.

برای بررسی خطای روش مونت کارلو می‌توان شبیه‌سازی را چندین بار تکرار کرده و واریانس اندازه نمونه را محاسبه کرد. بدیهی است هر چه تعداد  $M$  و تکرارها افزایش یابد، خطای روش مونت کارلو کاهش می‌یابد. در این مقاله به دلیل طولانی بودن زمان جستجوی کامپیوتری از یک تکرار و  $M = 50$  و الگوریتم کلی زیر استفاده شده است:

(۱) یک مقدار اولیه برای اندازه نمونه  $n$  در نظر بگیرید.

(۲) مقدار از متغیر تصادفی  $\bar{x}_i$  را از توزیع  $N(\mu, \sigma_n^2)$  تولید کنید.

(۳) برای هر مقدار  $\bar{x}_i$ ، تابع درجه دوم مخاطره پسین را از رابطه (۳) محاسبه کرده و آن را به ازای مقادیر مختلف حل کنید تا ناحیه‌ی با کمترین زیان پسین به طول  $\ell$  به دست آید. برای هر  $M$  مقدار  $\bar{x}_i$ ، به ازای  $i = 1, 2, \dots, M$  مقدار  $\text{Coverage}(\bar{x}_i) = \int_{R_{LP\ell_i}} N(\theta | \mu_n(\bar{x}), \sigma_n^2) d\theta$  را محاسبه کنید.

(۴) متوسط پوشش را برای مقادیر مختلف از رابطه  $p' = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \text{Coverage}(\bar{x}_i)$  محاسبه کنید.

(۵) اگر  $p' \geq p$  باشد، الگوریتم متوقف می‌شود و مقدار  $n$  اندازه نمونه بهینه است. در غیر این صورت مقدار  $n$  را تغییر داده و مراحل را تکرار کنید تا کمترین مقدار برای  $n$  دست آید.

### ۲.۳ روش طول متوسط برای توزیع نرمال

روش  $ALC$  (جوزف و همکاران، ۱۹۹۷) کمترین مقدار  $n$  را چنان تعیین می‌کند که داشته باشیم

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \int_{RLPL} d\theta \right\} N(\bar{x} | \mu, \sigma_n^2) d\bar{x} \leq \ell$$

می‌توان الگوریتمی مشابه الگوریتم بالا برای تعیین اندازه نمونه برای روش  $ALC$  نوشت. تفاوت دو روش  $ALC$  و  $ACC$  این است که در روش  $ALC$  باید برای هر  $\bar{x}_i$ ، به ازای  $i = 1, 2, \dots, M$ ، فاصله‌ای جستجو شود که پوشش آن  $p$  باشد. سپس طول این فاصله را به دست آورده و  $\ell'$  به صورت

$$\ell' = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m Length(\bar{x}_i)$$

محاسبه می‌شود، که در آن  $Length(\bar{x}_i)$  طول فاصله با کمترین زیان پسین برای  $\bar{x}_i$ ، با پوشش  $p$  است. برای  $\ell$  مشخص هرگاه  $\ell' \leq \ell$  شود، الگوریتم متوقف می‌شود، در غیر این صورت الگوریتم تا جایی ادامه می‌یابد تا این شرط برقرار شود و مقدار بهینه  $n$  به دست آید.

### ۳.۳ روش بدترین برآمد برای توزیع نرمال

روش  $WOC$  (جوزف و همکاران، ۱۹۹۷)، مینیمم  $n$  را طوری جستجو می‌کند که داشته باشیم

$$\inf_{x \in X} \left\{ \int_{RLPL} N(\theta | \mu_n(\bar{x}), \sigma_n^2) d\theta \right\} \geq p$$

با الگوریتمی مشابه می‌توان اندازه نمونه بهینه را برای روش بدترین برآمد به دست آورد که در آن مقدار معلومی است.

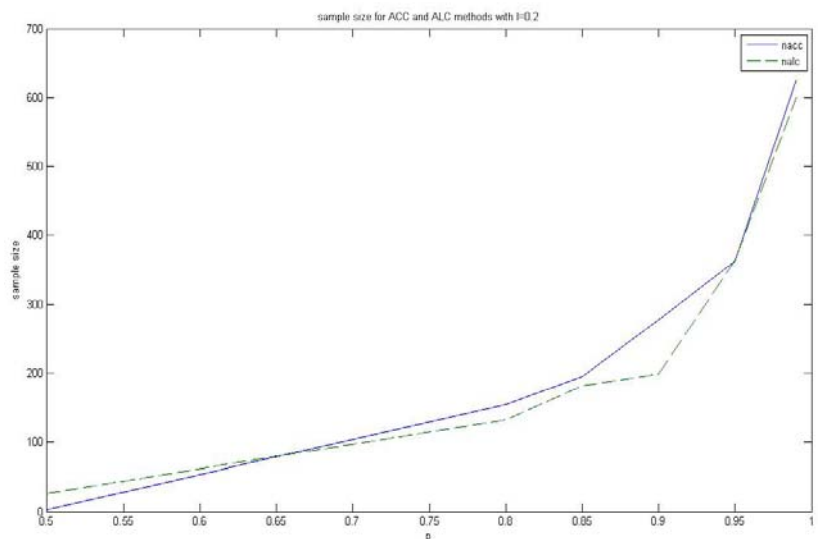
## ۴.۳ شبیه‌سازی حجم نمونه برای توزیع نرمال

شبیه‌سازی با نرم‌افزار MATLAB برای مقادیر  $\sigma^2 = 1$ ،  $\mu = 1$ ،  $\tau^2 = 0/1$  انجام شده و اندازه نمونه با استفاده از روش‌های متوسط پوشش، متوسط طول برحسب مقادیر مختلف پوشش  $p$  و طول  $l$  به ترتیب در جدول ۱ آمده است. همان‌طور که ملاحظه می‌شود اندازه نمونه حاصل از دو روش ACC و WOC یکسان هستند، زیرا توزیع حاشیه‌ای پسین  $\bar{x}$ ،  $N(\mu, \frac{\sigma^2 + n\tau^2}{n})$  است. بنابراین برای مقادیر در نظر گرفته شده برای  $n$ ، واریانس این توزیع مقداری کمتر از یک به دست می‌آید. به‌عنوان مثال برای  $n = 50$ ،  $\frac{\sigma^2 + n\tau^2}{n} = 0/12$ . در این شبیه‌سازی  $M = 50$  عدد تصادفی از توزیع  $N(\mu, \frac{\sigma^2 + n\tau^2}{n})$  تولید شده‌اند که در محاسبه میانگین توزیع پسین، یعنی  $\mu_n(\bar{x}) = \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + n\tau^2}\mu + \frac{n\tau^2}{\sigma^2 + n\tau^2}\bar{x}$  به کار می‌روند. چون اعداد خیلی نزدیک به هم هستند، میانگین توزیع پسین نیز برای اعداد تفاوت چندانی با هم ندارند. بنابراین پوشش‌های فاصله‌های با کمترین زیان پسین برای این اعداد تصادفی تقریباً با هم برابرند. روش ACC متوسط این ۵۰ پوشش را با مقدار معلوم  $p$  و روش WOC مینیمم پوشش‌ها را با  $p$  مقایسه می‌کند. بنابراین با توجه به یکسان بودن این مقادیر مینیمم مقدار با متوسط مقدار برابر است. پس اندازه نمونه به دست آمده از دو روش تقریباً مساوی است. شکل ۱ تغییرات اندازه نمونه با دو روش ACC و ALC برای مقادیر متفاوت  $p$  و  $l = 0/2$  و شکل ۲ تغییرات اندازه نمونه با این دو روش را برای مقادیر مختلف  $l$  و  $p = 0/9$  نشان می‌دهد.

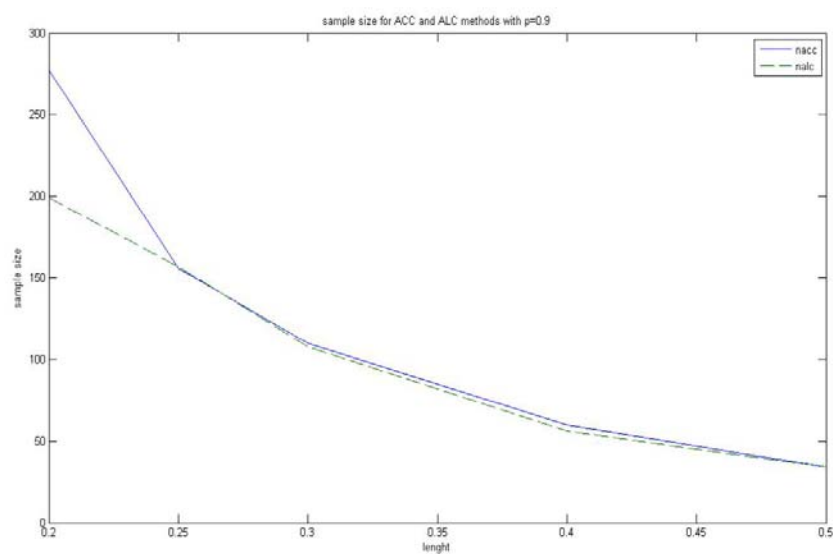
## ۴ بحث و نتیجه‌گیری

در این مقاله اندازه نمونه بیزی با استفاده از فاصله‌های با کمترین زیان پسین و سه روش ذکر شده محاسبه شد. اندازه نمونه به دست آمده با استفاده از فاصله‌های با کمترین زیان پسین در جدول ۱ نزدیک به مقادیر به دست آمده توسط آدکوک و جوزف (۱۹۸۸) با به‌کارگیری رابطه (۴) است. به‌عنوان مثال با استفاده از رابطه (۴)، برای  $0/25$  و  $l = 0/2$  و  $p = 0/8$  اندازه نمونه به ترتیب ۱۵۴ و ۹۴ به دست می‌آید. در حالی که برای همین مقادیر با توجه به جدول ۱، اندازه نمونه به روش





شکل ۱: اندازه نمونه‌ای  $ACC$  و  $ALC$  برای توزیع نرمال با  $p$  های مختلف و  $\ell = 0/2$ .



شکل ۲: اندازه نمونه‌ای  $ACC$  و  $ALC$  برای توزیع نرمال با  $l$  های مختلف و  $p = 0/9$ .

۸۶ ..... اندازه نمونه بیزی برای توزیع نرمال با فاصله‌های کمترین زیان پسین

جدول ۱: اندازه نمونه بیزی برای توزیع نرمال با طول و پوشش‌های مختلف به ازای  $\mu = 1, \sigma^2 = 1, \tau^2 = 0/1$ .

$l$					$p$	روش
۰/۵	۰/۴	۰/۳	۰/۲۵	۰/۲		
۰	۲	۳	۱۱	۲۱	۰/۵۰	
۱۷	۳۲	۶۳	۹۶	۱۵۵	۰/۸۰	
۲۴	۴۲	۸۳	۱۲۴	۱۹۵	۰/۸۵	ACC
۳۴	۶۰	۱۱۰	۱۵۴	۲۷۷	۰/۹۰	
۵۳	۸۷	۱۶۳	۲۴۴	۳۶۲	۰/۹۵	
۹۸	۱۵۵	۲۸۲	۴۱۴	۶۲۷	۰/۹۹	
۰	۱	۱۰	۱۸	۲۶	۰/۵۰	
۱۳	۲۹	۶۲	۸۷	۱۳۲	۰/۸۰	
۵۲	۴۱	۷۸	۱۱۷	۱۸۲	۰/۸۵	ALC
۳۴	۵۶	۱۰۸	۱۵۷	۱۹۹	۰/۹۰	
۴۴	۷۹	۱۴۸	۲۲۵	۳۶۳	۰/۹۵	
۸۵	۱۲۹	۲۴۹	۳۶۱	۶۰۱	۰/۹۹	

ACC به ترتیب ۱۵۵ و ۹۶ و به روش ALC به ترتیب ۱۳۲ و ۸۷ است. همان‌طور که ملاحظه می‌شود اندازه نمونه به روش ALC با استفاده از فاصله‌های با کمترین زیان پسین کوچکتر از فاصله‌های با چگالی پسین مرتفع است، که آدکوک و جوزف (۱۹۸۸) محاسبه کرده‌اند. البته مزیت دیگری که فاصله‌های با کمترین زیان پسین دارند این است که در محاسبه آن‌ها تابع زیان نیز به کار می‌رود که امری مهم در تحلیل بیزی است. با توجه به شکل‌های ۱ و ۲ برای  $l$  ثابت با افزایش  $p$  اندازه نمونه افزایش و برای  $p$  ثابت با افزایش  $l$  اندازه نمونه کاهش می‌یابد.

#### تقدیر و تشکر

نویسندگان از داوران محترم که پیشنهادهای مفید و ارزنده‌ای برای بهبود این مقاله ارائه کردند تقدیر و تشکر می‌نمایند.

مراجع

- Adcock, C. J. (1988), Bayesian Approach to Calculating Sample Size, *Statistician*, **37**, 433-439.
- Adcock, C. J. (1997), Sample Size Determination: A Review, *Statistician*, **46**, 261-283.
- Bernardo, J. M. and Smith, A. F. M. (1994), Bayesian Theory, *Chichester: Wiley*.
- Bernardo, J. M. (2005), Intrinsic Credible Regions: An Objective Bayesian Approach to Interval Estimation, *Test*, **14**, 317-384.
- Desu, M. M. and Raghavarao. D. (1990), *Sample Size Methodology*, Boston: Academic Press.
- Joseph, L., Wofson, D. and du Berger, R. (1995), Sample Size Calculations for Binomial Proportions via Highest Posterior Density Intervals, *Statistician*. **44**, 143-154.
- Joseph, L., Belisle, P. (1991), Bayesian Sample Size Determination for Normal Means and Difference Between Normal Means, *Statistician*, **46**, 209-226.
- Joseph, L., Du Berger, R., Belisle, P. (1997), Bayesian and Mixed Bayesian Likelihood Criteria for Sample Size Determination, *Statistics in Medicine*, **16**, 769-781.
- Lemeshoa, S., Hosmer, D. W., Klar, J. and Lwanga, S. K. (1990), Adequacy of Sample Size in Health Studies, *Chichester: Wiley*.
- Lipsey, M. W. (1990), *Design Sensitivity Statistical Power for Experimental Research*, Newbury Park: Sage.

۸۸ ..... اندازه نمونه بیزی برای توزیع نرمال با فاصله‌های کمترین زیان پسین

Pham-Gia, T. and Turkkan, N. (1992), Sample Size Determination in Bayesian Analysis (Disc: P399-404), *The Statistician*, **41**, 389-397.

Archive of SID