مجله علوم آماری، بهار و تابستان ۱۳۹۰
جلد ۵، شماره ۱، ص ۷۵-۸۶

مشخص‌سازی توزیع‌ها بر اساس اندازه اطلاع کولبک- لیبلر آماره‌های ترتیبی و مقادیر رکورد

ابراهیم کونانی، سعید بگرضایی
گروه آمار، دانشگاه رازی کرمانشاه

تاریخ دریافت: ۱۳۹۰/۲/۱۰ تاریخ آخرین بازنگری: ۱۳۹۰/۵/۱۶

چکیده : در این مقاله با استفاده از اطلاع کولبک- لیبلر آماره های ترتیبی و مقادیر رکورد به مشخص‌سازی توزیع‌ها پرداخته می‌شود. سپس برخی مشخص‌سازی‌ها بر پایه اطلاع کولبک- لیبلر و اطلاع شانون برای آماره‌های ترتیبی و آماره‌های رکورد به‌دست آورده می‌شود.

واژه‌های کلیدی : آ ماره‌های ترتیبی، آنتروپی شانون، اطلاع کولبک- لیبلر، اطلاع فیشر، مقادیر رکورد، چندجمله‌ای لژاندر، مشخص‌سازی.

۱ مقدمه

خاصیت اطلاع در آماره‌های ترتیبی و مقادیر رکورد در چند دهه اخیر مورد بحث بسیاری از آماردانان بوده است و بر اساس ویژگی های اطلاع در آماره‌های ترتیبی توزیع اصلی $F_X(x)$ را مشخص سازی می‌کنند. تا کنون مطالعات زیادی در

آدرس الکترونیک مسئول مقاله: ابراهیم کونانی، e.konani@yahoo.com
کد موضوع‌بندی ریاضی (۲۰۰۰): ۶۲E۱۰

خصوص ویژگی‌های آماره‌های ترتیبی و مقادیر رکورد در مشخص سازی توابع توزیع صورت گرفته است. در سال‌های اخیر براتپور و همکاران (۲۰۰۷b) به مطالعه خواص آنتروپی شانون رکوردها پرداختند و رابطه آنتروپی شانون n امین آماره رکورد بالای مستخرج از توزیعی دلخواه و آنتروپی شانون n امین آماره رکورد بالای حاصل از توزیع نمایی استاندارد را به‌دست آوردند . همچنین مشخص‌سازی‌هایی با استفاده از آنتروپی شانون آماره‌های رکورد، در ارتباط با بعضی توزیع‌های آماری توسط براتپور و همکاران (۲۰۰۷ و ۲۰۰۸) صورت گرفته است.

در این مقاله فرض می‌شود X متغیر تصادفی پیوسته دارای توابع توزیع تجمعی و چگالی احتمال به ترتیب متعلق به خانوده‌های $\{F(x;\theta),\theta\in\Theta\}$ و $\{f(x;\theta)>0,\theta\in\Theta\}$ باشد که در آن فضای پارمتر Θ زیر مجموعه‌ای باز از اعداد حقیقی است. همچنین فرض می‌شود $P_\theta=\bigcup_{\Theta\subset R}\{F(x;\theta),\theta\in\Theta\}$ باشد، که ممکن است دو خانواده از توزیع‌های پارامتری متفاوت، مانند خانواده‌های مکانی و مقیاسی را دربر گیرد.

۱.۱ آماره‌های رکورد بالا و آماره‌های ترتیبی

فرض کنید X_1،X_2،... دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی و هم‌توزیع با تابع توزیع‌تجمعی $F(x;\theta)$ و تابع چگالی احتمال $f(x;\theta)$ باشد. قرار داده شود

$$U_1=1,\quad U_{n+1}=\min\{j:j>U_n,X_j>X_{U_n}\},n\geq 1$$

در این‌صورت $\{U_n^X=X_{U_n}\}$ $(\{U_n\})$ دنباله آماره‌های رکورد بالا (دنباله زمان‌های رکورد) نامیده می‌شود. چگالی n امین آماره رکورد بالا به صورت

$$f_{U_n^X}(x;\theta)=f(x;\theta)\frac{[-\log(1-F(x;\theta))]^{n-1}}{(n-1)!}$$

است. فرض کنید X_1،...، X_n نمونه‌ای تصادفی از متغیرهای تصادفی و هم‌توزیع با تابع توزیع تجمعی مطلقاً پیوسته $F(x;\theta)$ و تابع چگالی احتمال $f(x;\theta)$ باشد. همچنین فرض کنید $X_{1;n}\leq X_{2;n}\leq\ldots\leq X_{n;n}$ نمایشی از n آماره ترتیبی متناظر

با این نمونه تصادفی باشد، در این‌صورت

$$f_{X_{1;n},\dots,X_{n;n}}(x_1,\dots,x_n;\theta) = n! f_{X_1,\dots,X_n}(x_1,\dots,x_n;\theta)$$
$$f_{X_{1;n}}(x;\theta) = nf(x;\theta)[1 - F(x;\theta)]^{n-1}$$
$$f_{X_{n;n}}(x;\theta) = nf(x;\theta)[F(x;\theta)]^{n-1}$$

۲.۱ اندازه‌های اطلاع

تابع تشخیص کولبک- لیبلر: تابع اطلاع تشخیص کولبک- لیبلر که اولین بار توسط کولبک و لیبلر (**۱۹۵۱**) معرفی شد، یکی از اندازه‌های اطلاع برای مقایسه دو توزیع و یکی از معیارهای اندازه‌گیری فاصله بین دو توزیع احتمال است. برای دو متغیر تصادفی پیوسته X و Y به ترتیب با توابع چگالی احتمال $f_X(x)$ و $g_Y(y)$، اطلاع کولبک- لیبلر به عنوان میزان تفاوت توزیع‌های دو متغیر به‌صورت

$$K(f_X(x) : g_Y(x)) = \int f_X(x) \log \frac{f_X(x)}{g_Y(x)}\, dx$$

تعریف می‌شود، که در آن $g_Y(y)$ توزیع مرجع است. از اندازه اطلاع کولبک- لیبلر برای تقریب توابع توزیع نیز استفاده می‌شود، به این معنا که اگر یکی از دو توزیع دارای تابع چگالی معلوم باشد، $K(f_X(x) : g_X(x))$ قابلیت پیش بینی توزیع نامعلوم با استفاده از تابع توزیع معلوم را نشان می‌دهد. برای بررسی خواص این اطلاع به کولبک (**۱۹۵۹**) مراجعه شود.

آنتروپی شانون: برای متغیر تصادفی X با تابع چگالی احتمال $f_X(x)$، آنتروپی شانون به صورت

$$H(f_X(x)) = -\int f_X(x) \log f_X(x)\, dx = -E_f[\log f_X(X)]$$

تعریف شده که میزان بی‌نظمی و اغتشاش تابع چگالی $f_X(x)$ را اندازه می‌گیرد، به این معنی که هر چقدر تابع چگالی $f_X(x)$ به تابع چگالی یکنواخت نزدیک‌تر باشد

یا به عبارتی هر چه چگالی منظم‌تر باشد آنتروپی شانون نیز کمتر می‌شود و تصمیم‌گیری بر اساس آن مشکل‌تر خواهد شد. بنابراین تصمیم‌گیری بر اساس تابع چگالی $f_X(x)$ زمانی قابل درک است که اندازه آنتروپی شانون آن کم باشد. بنابراین مهم است بدانیم کدام چگالی برای متغیرهای تصادفی پیوسته به ماکسیمم اطلاع منجر می‌شود. اصل ماکسیمم آنتروپی نیز به برآورد توزیع متغیرهای تصادفی می‌پردازد و توزیعی به عنوان یک مدل مناسب انتخاب می‌شود که عدم حتمیت بیشتری داشته باشد. برای جزئیات بیشتر در مورد آنتروپی شانون و معیارهای مرتبط با آن به کاور و توماس (۲۰۰۶) مراجعه شود.

اندازهٔ اطلاع فیشر: برای متغیر تصادفی X با تابع توزیع تجمعی $F(x;\theta)$ و تابع چگالی احتمال $f(x;\theta)$ که در آن $\theta \in R$، اندازه اطلاع فیشر به صورت زیر تعریف می‌شود

$$I^F(\theta) = E[\frac{\partial}{\partial\theta} \log f(X;\theta)]^{۲}$$

اگر X یک متغیر تصادفی پیوسته باشد که تکیه‌گاه آن به پارامتر بستگی نداشته باشد، آنگاه شرایط نظم (ناگاراجا، ۱۹۶۸) ضروری است. $I^F(\theta)$ میزان اطلاع موجود در متغیر تصادفی را در مورد پارامتر θ بیان می‌کند. هر چه مقدار $I^F(\theta)$ بزرگتر باشد X اطلاع بیشتری در مورد θ در بر دارد.

۳.۱ شرایط برابری اطلاع فیشر

اگر $X_{۱;n}$ اولین آماره ترتیبی متناظر با نمونه تصادفی $X_۱$،...، X_n باشد تابع توزیع و تابع نرخ شکست با $F_{۱;n}(x;\theta)$ و $h_{۱;n}(x;\theta)$ نمایش داده می‌شود که در آن $h_{۱;n}(x;\theta) = nh(x;\theta)$ و $h(x;\theta) = f(x;\theta)/(۱ - F(x;\theta))$ تابع نرخ شکست متغیر تصادفی X است. اطلاع فیشر برای $X_{۱;n}$ بر حسب تابع نرخ شکست به‌صورت

$$I^F_{۱;n}(\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} [\frac{\partial}{\partial\theta} \log h_\theta(x)]^{۲}\, dF_{۱;n}(x;\theta) \qquad (۱)$$

است. برای هر $\theta \in \Theta$ و هر $u \in (0,1)$ تابع $\alpha_\theta^F : u \in [0,1] \to R$ به‌صورت

$$\alpha_\theta^F(u) = [\frac{\partial}{\partial\theta}F(x;\theta)]_{x=F^{-1}(u;\theta)}$$

تعریف می‌شود، که در آن

$$\alpha_\theta^F(0) = \lim_{x\to-\infty}\frac{\partial}{\partial\theta}F(x;\theta) = 0$$
$$\alpha_\theta^F(1) = \lim_{x\to+\infty}\frac{\partial}{\partial\theta}F(x;\theta) = 0$$

تابع $\alpha_\theta^F(u)$ بر بازه $(0,1)$ پیوسته و مشتق پذیر است. فرض کنید $C = \{\alpha_\theta^F : F_\theta \in P_\theta\}$ و تبدیل $\eta : F_\theta \in P_\theta \longrightarrow \alpha_\theta^F \in C$ به‌صورت $\eta(F_\theta) = (\alpha_\theta^F)^2$ تعریف شود. پارک و زنگ (۲۰۰۴) نشان دادند تحت شرایط نظم با استفاده از تبدیل $F(x;\theta) = u$ برای هر $u \in (0,1)$ رابطه (۱) را می‌توان به‌صورت

$$\int_0^1 [\frac{\partial}{\partial u}\alpha_\theta^F(u) + \frac{\alpha_\theta^F(u)}{1-u}]^2 n(1-u)^{n-1}\, du$$

نوشت، که برای هر $\theta \in \Theta$ و $u \in (0,1)$

$$\eta(F_\theta) = \eta(G_\theta)$$

اگر و تنها اگر برای هر $n \in N = \{1,2,\ldots\}$، $I_{1;n}^F(\theta) = I_{1;n}^G(\theta)$د. به‌علاوه برای هر $\theta \in \Theta$ اگر $\eta(F_\theta) = \eta(G_\theta)$ آنگاه

$$I_{s;n}^F(\theta) = I_{s;n}^G(\theta), I_{st;n}^F(\theta) = I_{st;n}^G(\theta), \qquad 1 \le s < t \le n$$

بنابراین با داشتن اطلاع فیشر برابر، در مورد یک پارامتر در هر مجموعه از آماره‌های ترتیبی، می‌توان توزیع مورد بررسی $(G(x;\theta))$ را با استفاده از تابع توزیع تجمعی $F(x;\theta)$ یا با تصویر نمودن $\eta(F_\theta)$ یعنی $\alpha_\theta^F(u)$ مشخص کرد.

در بخش ۲ دو توزیع پارامتری $F(x;\theta)$ و $G(x;\theta)$ در P_θ با توابع چگالی احتمال $f(x;\theta)$ و $g(x;\theta)$ از نقطه نظر اطلاع کولبک-لیبلر و آنتروپی شانون آماره‌های ترتیبی و مقادیر رکورد در حالی مورد بررسی قرار می‌گیرد که فضای

پارامتری دو توزیع یکسان باشد. برخی از توزیع‌ها بر اساس اندازه اطلاع کولبک-لیبلر آماره‌های ترتیبی و مقادیر رکورد مشخص‌سازی و شرط لازم و کافی به‌دست آورده می‌شود که از برابری این اندازه اطلاع، در آماره‌های ترتیبی و مقادیر رکورد، بتوان توزیع را به‌طور یکتا مشخص کرد. در سراسر این مقاله دو توزیع پارامتری $F(x;\theta)$ و $G(x;\theta)$ که با هم مقایسه می‌شوند متعلق به خانواده توزیع‌های P_θ هستند و فضای تعریف شده برای توزیع‌ها یکسان است.

۲ اطلاع تشخیص کولبک-لیبلر آماره‌های ترتیبی و آماره‌های رکورد بالا

دراین بخش خاصیت اطلاع تشخیص کولبک-لیبلر آماره‌های ترتیبی و آماره‌های رکورد بررسی و با استفاده از برابری اطلاع کولبک-لیبلر آماره‌های ترتیبی و آماره‌های رکورد شرط لازم و کافی برای مشخص سازی برخی توزیع‌ها به‌دست آورده می‌شود.

قضیه ۱ : فرض کنید X و Y دو متغیر تصادفی پیوسته با توابع توزیع تجمعی $F_X(x)$ و $G_Y(y)$ و توابع چگالی احتمال $f_X(x)$ و $g_Y(y)$ باشند که تکیه گاه آنها یکسان است. همچنین فرض کنید $H_Z(z)$ یک تابع توزیع پیوسته معلوم دلخواه با تابع چگالی معلوم $h_Z(z)$ باشد. آنگاه $X \overset{\mathrm{D}}{=} Y$ اگر و تنها اگر

$$K(h_{m;n} : f_{m;n}) = K(h_{m;n} : g_{m;n}); \quad m \leq n, n \geq ۱ \qquad (۲)$$

برهان : با توجه به اینکه h یک تابع چگالی معلوم است، شرط لازم قضیه بدیهی است. برای اثبات شرط کافی فرض کنید برای هر $m \leq n, n \geq ۱$ رابطه (۱) برقرار باشد. با توجه به تعریف اطلاع کولبک- لیبلر و مطلقاً پیوسته بودن H می‌توان از تبدیل‌های $u = H(x)$ و $u = H(y)$ برای هر $u \in (۰, ۱)$ استفاده کرد. بنابراین رابطه (۱) را می‌توان به صورت

$$\int_۰^۱ ku^{m-۱}(۱-u)^{n-m} \log f_{m;n}(H^{-۱}(u))\, du$$

$$= \int_{\circ}^{۱} ku^{m-۱}(۱-u)^{n-m} \log g_{m;n}(H^{-۱}(u))\, du$$

نوشت، که در آن $k = n!/[(m-۱)!(n-m)!]$. حال با قرار دادن $n - m = r$ داریم

$$\int_{\circ}^{۱} ku^{m-۱}(۱-u)^{r} \log\left(\frac{f_{m;n}(H^{-۱}(u))}{g_{m;n}(H^{-۱}(u))}\right) du = \circ$$

بنابراین برای هر $r \geq \circ$، هر $u \in (\circ, ۱)$ و به ازای هر m، که $۱ \leq m \leq n, n$، داریم

$$\log \frac{f_{m;n}(H^{-۱}(u))}{g_{m;n}(H^{-۱}(u))} = \circ$$

یا

$$f_{m;n}(H^{-۱}(u)) = g_{m;n}(H^{-۱}(u))$$

در نتیجه

$$F_{m;n}(H^{-۱}(u)) = G_{m;n}(H^{-۱}(u))$$

حال اگر $m = ۱$ و $n = ۱$ آنگاه

$$F(H^{-۱}(u)) = G(H^{-۱}(u))$$

یعنی X و Y هم توزیع هستند.

می‌توان نشان داد اندازه اطلاع کولبک- لیبلر برای کوچکترین و بزرگترین آماره‌های ترتیبی در دو توزیع پارامتری با پارامترهای مقیاسی و مکانی، به پارامتر بستگی ندارد و مقداری ثابت است.

تذکر ۱ : فرض کنید X و Y دو متغیر تصادفی پیوسته با تکیه‌گاه یکسان و به‌ترتیب با توابع توزیع تجمعی $F(x;\theta)$ و $G(y;\theta)$ و توابع چگالی احتمال $f(x;\theta)$ و $g(x;\theta)$ باشند به‌طوری که θ پارامتر مقیاس یا مکان است. در این صورت

$$K[f_{۱;n}(X,\theta) : g_{۱;n}(Y,\theta)] = K[f^{\star}_{۱;n} : g^{\star}_{۱;n}]$$
$$K[f_{n;n}(X,\theta) : g_{n;n}(Y,\theta)] = K[f^{\star}_{n;n} : g^{\star}_{n;n}]$$

که در آن $f^{\star}_{۱;n}(x) = nf(x)F^{n-۱}(x)$ و $f^{\star}_{n;n}(x) = nf(x)F^{n-۱}(x)$.

قضیه ۲ : فرض کنید U_n^X، U_n^Y و U_n^Z به ترتیب نشان دهنده n امین آماره رکورد بالا از توزیع‌های تجمعی F_X، G_Y و H_Z با تکیه‌گاه‌های یکسان و توابع چگالی احتمال f_X، g_Y و h_Z باشند، به‌طوری که $E[\log g(X)]^{۲} < \infty$، $E[\log g(Y)]^{۲} < \infty$ و $E[\log g(Z)]^{۲} < \infty$. در این صورت برای هر $n \geq ۱$، $X \overset{\mathrm{D}}{=} Y$ اگر و تنها اگر $K[U_n^Z : U_n^X] = K[U_n^Z : U_n^Y]$

برهان : شرط لازم قضیه بدیهی است. برای اثبات شرط کافی فرض کنید

$$K[U_n^Z : U_n^X] = K[U_n^Z : U_n^Y], \quad n \geq ۱$$

با توجه به تعریف اطلاع کولبک-لیبلر می‌توان نوشت

$$\int_{\chi} (-\log \bar{H}(x))^{n-۱} h(x) \log f_{U_n^X}(x)\, dx = \int_{\chi} (-\log \bar{H}(y))^{n-۱} h(y) \log f_{U_n^Y}(y)\, dy$$

با استفاده از تبدیل‌های $u = -\log \bar{H}(x)$ و $u = -\log \bar{H}(y)$ داریم

$$\int_{\circ}^{\infty} \log\left(\frac{f_{U_n^X}(H^{-۱}(۱ - e^{-u}))}{g_{U_n^X}(H^{-۱}(۱ - e^{-u}))}\right) e^{-u} u^{n-۱}\, du = \circ$$

بر اساس توابع لژاندر (گوفمن و پدریک، ۱۹۶۵) برای هر $n \geq ۱$ می‌توان نوشت

$$\int_{\circ}^{\infty} \log\left(\frac{f_{U_n^X}(H^{-۱}(۱ - e^{-u}))}{g_{U_n^X}(H^{-۱}(۱ - e^{-u}))}\right) e^{-u} L_u\, du = \circ$$

که در آن $L_n(u)$ چند جمله‌ای لژاندر است. با توجه به اینکه $E[\log g(X)]^{۲} < \infty$ و $E[\log g(Y)]^{۲} < \infty$، با استفاده از نامساوی مینکوسکی می‌توان نوشت

$$\log\left(\frac{f_{U_n^X}(H^{-۱}(۱ - e^{-u}))}{g_{U_n^X}(H^{-۱}(۱ - e^{-u}))}\right) \in L_{۲}(\circ, \infty)$$

در نتیجه با استفاده از کامل بودن توابع لژاندر برای هر $n \geq ۱$ خواهیم داشت

$$\log\left(\frac{f_{U_n^X}(H^{-۱}(۱ - e^{-u}))}{g_{U_n^Y}(H^{-۱}(۱ - e^{-u}))}\right) = \circ$$

از این رو برای هر $n \geq ۱$ و $u \in (\circ, ۱)$ داریم

$$f_{U_n^X}(H^{-۱}(۱ - e^{-u})) = g_{U_n^Y}(H^{-۱}(۱ - e^{-u}))$$

به ازای $n = ۱$ نتیجه می‌شود $f(H^{-۱}(۱ - e^{-u})) = g(H^{-۱}(۱ - e^{-u}))$. در نتیجه برای هر $u \in (۰, ۱)$

$$F(H^{-۱}(۱ - e^{-u})) = G(H^{-۱}(۱ - e^{-u}))$$

یعنی برای هر $x \in \chi$، $F(x) = G(x)$ اوا X و Y هم‌توزیع هستند.

تذکر ۲ : نتیجه‌ای مشابه با قضیه ۲ برای آماره‌های رکورد پایین نیز برقرار است.

براتپور و همکاران (۲۰۰۷a) نشان دادند اگر X و Y دو متغیر تصادفی کاملاً پیوسته باشند که تکیه گاه آنها دارای کران پایین مشترکی مانند b باشد و $E[\log f(X)]^{۲} < \infty$ و $E[\log g(Y)]^{۲} < \infty$ در این صورت X و Y هم توزیع‌اند اگر و تنها اگر برای هر $n \geq ۱$، $H(U_n^X) = H(U_n^Y)$ ، که در آن U_n^X و U_n^Y به ترتیب n امین آماره رکورد بالا از متغیرهای تصادفی X و Y هستند.

تذکر ۳ : فرض کنید X متغیر تصادفی کاملاً پیوسته با تابع توزیع تجمعی $F(x;\theta)$ و تابع چگالی احتمال $f(x;\theta)$ باشد، که در آن θ پارامتر مکانی است. همچنین فرض کنید $U_{n,\theta}^F$ نشان دهنده n امین آماره رکورد بالا از این توزیع و U_n^F نشان دهنده n امین آماره رکورد بالا از تابع توزیع تجمعی استاندارد $F(x)$ باشد. می‌توان نشان داد که برای هر $n \geq ۱$

$$H(U_{n,\theta}^F) = H(U_n^F). \tag{۳}$$

قضیه ۳ : فرض کنید $U_{n,\theta}^X$ و $U_{n,\theta}^Y$ به ترتیب نشان دهنده n امین آماره رکورد بالا از توزیع‌های تجمعی $F(x;\theta)$ و $G(y;\theta)$ با تکیه گاه های یکسان و توابع چگالی احتمال $f(x;\theta)$ و $g(y;\theta)$ باشند که در آن θ پارامتر مکانی است. برای هر $m \leq n, n \geq ۱$ گزاره‌های زیر معادل هستند.

الف- $H(U_{n,\theta}^F) = H(U_{n,\theta}^G)$

ب- $I_{m;n}^F(\theta) = I_{m;n}^G(\theta)$

ج- $X \overset{\mathrm{D}}{=} Y$

برهان : در اینجا فقط معادل بودن (الف) و (ب) بررسی می‌شود و بررسی قسمت‌های دیگر با توجه به رابطه (۳) و رابطه براتپور و همکاران (۲۰۰۷ a) در

ارتباط با برابری n امین آماره رکورد بالا به سادگی نتیجه می‌شوند. فرض کنید برای هر $n \geq ۱$, $m \leq n$ داشته باشیم $I^F_{m;n}(\theta) = I^G_{m;n}(\theta)$. با توجه به آنچه در بخش ۲.۱ بیان شد $\eta(F) = \eta(G)$ است، که در آن $\eta(F) = (\alpha^F_\theta)^۲$. در توزیع‌های با پارامتر مکانی $\eta(F(x-\theta)) = \eta(G(x-\theta-c))$، که در آن c مقداری ثابت و حقیقی است. بنابراین در خانواده توزیع‌های مکانی برای هر $u \in (۰, ۱)$، $\alpha^F_\theta(u) = \alpha^G_\theta(u)$ است. از طرفی

$$H(U^F_{n,\theta}) = \int \frac{(-\log \bar{F}(x;\theta))^{n-۱}}{(n-۱)!} f(x;\theta) \log [\frac{(-\log \bar{F}(x;\theta))^{n-۱}}{(n-۱)!} f(x;\theta)]\, dx$$

با استفاده از تبدیل $F(x;\theta) = u$ خواهیم داشت

$$H(U^F_{n,\theta}) = \int_۰^۱ \frac{(-\log (۱-u))^{n-۱}}{(n-۱)!} \log [\frac{(-\log (۱-u))^{n-۱}}{(n-۱)!} f(F^{-۱}(u))]\, du$$

در خانواده توزیع‌های مکانی برای هر $u \in (۰, ۱)$، $\alpha^F_\theta(u) = -f(F^{-۱}(u))$ است. ابنابراین

$$H(U^F_{n,\theta}) = \int_۰^۱ -\frac{(-\log (۱-u))^{n-۱}}{(n-۱)!} \log [-\frac{(-\log (۱-u))^{n-۱}}{(n-۱)!} \alpha^F_\theta(u)]\, du \quad (۴)$$

با توجه به $\alpha^F_\theta(u) = \alpha^G_\theta(u)$، برای هر $u \in (۰, ۱)$ خواهیم داشت

$$H(U^F_{n,\theta}) = H(U^G_{n,\theta}), \quad n \geq ۱$$

در این صورت با توجه به رابطه (۴) و با استفاده از تبدیل $v = -\log (۱-u)$، برای هر $n \geq ۱$

$$\int_۰^\infty v^{n-۱} e^{-v} [\log (-\frac{v^{n-۱}}{(n-۱)!} \alpha^F_\theta(۱-e^{-v})) - \log (-\frac{v^{n-۱}}{(n-۱)!} \alpha^G_\theta(۱-e^{-v}))]\, dv = ۰$$

حال برای هر $n \geq ۱$ می‌توان نوشت

$$\int_۰^\infty e^{-v/۲} L_n(v) [\log (-\frac{v^{n-۱}}{(n-۱)!} \alpha^F_\theta(۱-e^{-v})) - \log (-\frac{v^{n-۱}}{(n-۱)!} \alpha^G_\theta(۱-e^{-v}))]\, dv = ۰$$

که در آن $L_n(v)$ چند جمله‌ای لژاندر است. بنابر نامساوی مینکوسکی

$$[\log(-\frac{v^{n-1}}{(n-1)!}\alpha_\theta^F(1-e^{-v})) - \log(-\frac{v^{n-1}}{(n-1)!}\alpha_\theta^G(1-e^{-v}))] \in L_2(0,\infty)$$

با توجه به کامل بودن توابع چند جمله‌ای لژاندر در $L_2(0,\infty)$،

$$\log(-\frac{v^{n-1}}{(n-1)!}\alpha_\theta^F(1-e^{-v})) - \log(-\frac{v^{n-1}}{(n-1)!}\alpha_\theta^G(1-e^{-v})) = 0$$

از این رو برای هر $v > 0$

$$\log[-\alpha_\theta^F(1-e^{-v})] = \log[-\alpha_\theta^G(1-e^{-v})]$$

بنابراین برای هر $u \in (0,1)$، $\alpha_\theta^F(u)) = \alpha_\theta^G(u)$ و در نتیجه $\eta(F) = \eta(G)$. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که برای هر $m \le n, n \ge 1$، $I_{m;n}^F(\theta) = I_{m;n}^G(\theta)$.

بحث و نتیجه‌گیری

در این مقاله به مشخصه‌سازی توزیع‌ها بر اساس اطلاع کولبک‌ـلیبلر آماره‌های ترتیبی پرداخته شد و رابطه هم‌ارزی بین اطلاع شانون آماره‌های رکورد بالا و اطلاع فیشر آماره‌های ترتیبی به‌دست آورده شد.

تقدیر و تشکر

نویسندگان از پیشنهادهای ارزنده داوران محترم که باعث ارتقای کیفی مقاله شد کمال تشکر و قدردانی را دارند.

مراجع

Baratpour, S., Ahmadi, J. and Arghami, N. R. (2008), Characterizations Based on Renyi entropy of Order Statistics an Record Values, *Journal of Statistical Planning and Inference*, **138**, 2544-2551.

Baratpour, S., Ahmadi, J. and Arghami, N. R. (2007a), Some Characterizations Based on Enteropy of Order Statistics and Record Values, *Communication in Statistics Theory and Methods*, **36** , 47-58.

Baratpour, S., Ahmadi, J. and Arghami, N. R. (2007b), Entropy Properties of Record Statistics, *Statistical Papers*, **48**, 197-213.

Cover, T. M. and Thomas, J. A. (2006), *Elements of Information Theory*, Second Edition, Wiley, New York.

Gofman, C. and Pedrick, G. (1965), *First Course in Functional Analysis*, Printic-Hall, Inc.

Kullback, S. and Libler, R. A. (1951), On information and Sufficiency, *The Annals of Mathematical Statistics*, **22**, 79-86.

Kullback, S. (1959), Information, *Theory and Statistics*, Wiley, New York.

Nagaraja, H. N. (1983), On the Information Contained in Order Statistics, *Technical Report, No. 278,* Departement of Statistics, The Ohio State University, Columbus, Ohio.

Park, S. and Zheng, G. (2004), Equal Fisher Information in Order Statistics, *Sankhya*, **66**, 20-34.

Shannon, C. E. (1948), A Mathematical Theory of Communication, *Bell System Technical Journal*, **27**, 370-432.