

## تحلیل بیزی مدل‌های خطی پویای تعمیم یافته در ساختارهای گسسته غیرمزدوج

مژده اسماعیل زاده<sup>۱</sup>، فرزاد اسکندری<sup>۱</sup>، سیما نقی زاده اردبیلی<sup>۲</sup>

<sup>۱</sup> گروه آمار، دانشگاه علامه طباطبائی تهران

<sup>۲</sup> سازمان سنجش آموزش کشور

تاریخ دریافت: ۱۳۹۰/۶/۲ تاریخ آخرین بازنگری: ۱۳۹۰/۱۲/۱۶

**چکیده:** یکی از مسائل مهم پیش‌بینی وضع آینده سیستم یا فرایندهایی است که با گذشت زمان در حال تغییرند. در چنین شرایطی علاوه بر متغیرها امکان دارد پارامترها نیز در حال تغییر باشند و از این‌رو فرض استقلال برای پارامترها و متغیرها از بین می‌رود. برای تحلیل چنین سیستمی معمولاً از مدل‌های خطی پویای تعمیم یافته استفاده می‌شود. هدف این مقاله، به‌کارگیری مدل‌های خطی پویای تعمیم یافته بیزی در تحلیل ساختارهای گسسته غیرمزدوج بر پایه الگوریتم مونت کارلوی زنجیر مارکوفی است. پس از ارائه مبانی نظری موضوع، با بهره‌گیری از مدلی که پارامترهای پویای آن از فرایند اتورگرسیو پیروی می‌کند و ابزارهای سودمندی که مدل‌های خطی پویای تعمیم یافته بیزی در اختیار ما قرار می‌دهند، به تحلیل فعالیت اقتصادی طی سال‌های ۱۳۸۵ تا ۱۳۸۷ در سه استان کشور پرداخته می‌شود.

**واژه‌های کلیدی:** فرایند اتورگرسیو، ساختار گسسته غیرمزدوج، مدل خطی پویای تعمیم یافته بیزی.

• آدرس الکترونیک مسئول مقاله: مژده اسماعیل زاده، m\_emailzadeh61@yahoo.com

• کد موضوع‌بندی ریاضی (۲۰۰۰): ۶۲J۱۲

## ۱ مقدمه و پیش نیازها

در مطالعات واقعی گاهی با وضعیت‌هایی سروکار داریم که داده‌های ثبت شده از آزمایش خودهمبسته یا وابسته به زمان هستند. به دیگر سخن، اگر آن‌ها در قالب یک متغیر تصادفی بیان شوند، این متغیر تصادفی به زمان وابسته خواهد بود. از این رو استفاده از روش‌های متداول در تحلیل این‌گونه داده‌ها منجر به ارائه نتایج نادرستی خواهد شد. پس از معرفی مدل‌های خطی پویای تعمیم یافته<sup>۱</sup> (DGLM)، برخی از محققین با استفاده از ابزارهای قدرتمندی که این نظریه در اختیار قرار می‌داد به تحلیل این‌گونه مسائل پرداختند. از طرفی، وقتی در رابطه با مدل تحت بررسی اطلاعاتی پیشین در دسترس است، استفاده از رهیافت بیزی اثرهای مفیدی در تحلیل داده‌ها به دنبال خواهد داشت.

وست و همکاران (۱۹۸۵) تحلیل بیز تقریبی را برای تحلیل DGLMها پیشنهاد دادند. فاهرمیر و کافمن (۱۹۹۱) رویکرد مبتنی بر درستنمایی را پیشنهاد کردند که در آن درستنمایی توأم  $f(\beta|y)$  ماکسیمم می‌شود. همچنین، محققینی مانند اسمیت (۱۹۷۹) چنین مدل‌هایی را در رده‌ای کوچکتر از فضای وضعیت مدل بر اساس قدم زدن تصادفی ساده گسترش دادند و به‌طور کلی با فیلتر کردن و پیش بینی مسائل که توسط وست (۱۹۹۷) و فاهرمیر (۱۹۹۲) ارائه شده بود، بررسی نموده‌اند. بعد از آن، فریرا و گامرمن (۲۰۰۰) یک بازنگری از روش‌های MCMC که کاربرد خاصی در DGLMها بود، فراهم کردند. تحلیل بیز DGLMها برای متغیرهای گسسته در حالت چند پارامتری با پیشین‌های مزدوج توسط اسکندری و نقی‌زاده (۲۰۰۵) بررسی شد. همچنین، در زمینه استنباط بیزی می‌توان به روش چیوگنا و گائتان (۲۰۰۲) و لی و شادکیک (۲۰۰۸) اشاره کرد. هدف این مقاله، استفاده از رویکرد بیزی مدل‌های خطی پویای تعمیم یافته و تحلیل ساختارهای گسسته غیرمزدوج بر اساس الگوریتم MCMC است. در بخش دوم، مدل‌گزینی بر اساس فرایند اتورگرسیو برای پارامترهای پویا مورد مطالعه قرار می‌گیرد. در بخش سوم الگوریتم MCMC برای مدل ارائه شده معرفی می‌شود. در بخش چهارم با استفاده از مجموعه‌ای از داده‌های

<sup>۱</sup> Dynamic generalized linear models

واقعی به پیاده سازی مدل مورد بحث پرداخته و نتایج حاصل تحلیل خواهد شد. در انتها بحث و نتیجه گیری ارائه می شود.

## ۲ مدل گزینی بر اساس فرایند اتورگرسیو برای پارامترهای پویا

در تحلیل بیزی مدل های خطی پویای تعمیم یافته در شرایطی که به چگالی های غیراستاندارد برمی خوریم، روش های کامل تر و جامع تری برای بررسی توزیع پسین و برآورد پارامترهای مجهول مدل وجود دارد. در سال های اخیر مطالعاتی که برای تاثیر آلودگی هوا روی سلامت انجام گرفته، براساس DGLM بوده اند و به طور خاص از روش های رگرسیون سری زمانی برای برآورد بهره گرفته شده است. اگر  $y_t$  تعداد رویدادهای سلامتی در روز  $t$  با توزیع پواسون  $p(\mu_t)$  باشد، مدل لگ خطی استاندارد را می توان به صورت

$$y_t \sim p(\mu_t) \quad t = 1, \dots, n; \quad \ln(\mu_t) = \omega_t \gamma + z_t^T \alpha, \quad (1)$$

نوشت، که در آن  $\omega_t \gamma$  مولفه آلودگی هوا،  $\gamma$  اثر آلودگی هوا بر داده های سلامت و  $\ln(\mu_t)$  لگاریتم طبیعی متوسط تعداد سلامتی می باشد که با سطوح آلودگی هوا  $\omega_t$  و بردار متغیرهای کمکی  $z_t^T = (z_{t1}, \dots, z_{tr})$  دارای ارتباط خطی است.

در مدل (۱)، با توجه به این که داده های سلامتی بر حسب شماره روزها در دسترس بوده است، مدل های پواسون خطی تعمیم یافته و مدل های جمعی، روش های استاندارد تحلیل بوده اند. اما تحلیل بیزی داده های سلامت توسط مدل های خطی پویای تعمیم یافته توسط لی و شادکیک (۲۰۰۸) بر اساس مدلی در قالب این داده ها معرفی شد که از بسط یک مدل خطی تعمیم یافته، همراه با زیر مجموعه ای از پارامترهای رگرسیونی که به صورت دنباله ای از پارامترهای وابسته به زمان آشکار می شوند، به وجود می آیند. فرض کنید داده های سلامت دارای توزیع پواسون باشند و از مدل

$$\begin{aligned} y_t &\sim p(\mu_t), \quad t = 1, \dots, n; & \ln(\mu_t) &= x_t^T \beta_t + z_t^T \alpha \\ \beta_t &= F_1 \beta_{t-1} + \dots + F_p \beta_{t-p} + \nu_t & \nu_t &\sim N(0, \Sigma_\beta) \\ \beta_0, \dots, \beta_{1-p} &\sim N(\mu_0, \Sigma_0) & \alpha &\sim N(\mu_\alpha, \Sigma_\alpha) \\ \Sigma_\beta &\sim IW(n_\Sigma, S_\Sigma^{-1}) \end{aligned} \quad (2)$$

پیروی کنند. بردار مشاهده‌ها  $y = (y_1, \dots, y_n)_{n \times 1}^T$  نشان دهنده تعداد سلامتی و بردار  $z_t$  متغیرهای کمکی از مرتبه  $r \times 1$  با پارامترهای ثابت  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_r)_{r \times 1}^T$  و بردار  $x_t$  از مرتبه  $q \times 1$  با پارامترهای پویای  $\beta = (\beta_{t1}, \dots, \beta_{tq})_{q \times 1}^T$  است.

در این جا، پارامترهای پویا از یک فرایند اتورگرسیو مرتبه  $p$  پیروی می‌کنند و دارای پارامترهای اولیه  $(\beta_{-p+1}, \dots, \beta_0)$  هستند که در زمان‌های  $(-p+1, \dots, 0)$  آغاز شده‌اند. هر پارامتر اولیه دارای توزیع پیشین نرمال با بردار میانگین  $\mu_0$  و ماتریس کواریانس  $\Sigma_0$  است. پارامترهای این فرایند می‌توانند در یک بردار یکتای  $\beta = (\beta_{-p+1}, \dots, \beta_0, \beta_1, \dots, \beta_n)_{(n+p)q \times 1}^T$  خلاصه شوند.

تغییرپذیری در این فرایند به وسیله ماتریس کواریانس  $\Sigma_\beta$  از مرتبه  $q \times q$  که به صورت توزیع پیشین مزدوج ویشارت معکوس<sup>۲</sup> (IW) تعیین شده است، کنترل می‌شود. برای فرایندهای یک متغیره  $\Sigma_\beta$  مقداری اسکالر است و توزیع پیشین مزدوج آن به توزیع گامای معکوس تبدیل خواهد شد. تکامل و مانایی این فرایندها توسط  $\Sigma_\beta$  و ماتریس ضرایب پارامترها،  $F = \{F_1, \dots, F_p\}$ ، که از مرتبه  $q \times q$  است، تعیین می‌شوند. این ماتریس ممکن است شامل پارامترهای نامعلوم یا ثابت‌های معلوم باشد و تشخیص توزیع پیشین به فرم آن بستگی دارد. برای مثال مدل گزینی پویای تک متغیره، مانا است اگر  $|F_1| < 1$  باشد. همچنین، مدل گزینی پویای چندمتغیره ماناست اگر عناصر روی قطر اصلی  $\Sigma_\beta$  صفر و عناصر روی قطر اصلی  $F$  یک باشند.

همان‌طور که ملاحظه می‌شود در مدل پیشنهاد شده بردار متغیرهای کمکی با پارامترهای ثابت  $\alpha$  شامل پیش بینی کننده خطی می‌شوند. برای پارامتر ثابت  $\alpha$ ، توزیع پیشین نرمال را به دلیل سادگی اطلاعات، می‌توان برای آن در نظر گرفت. با داشتن مجموعه پارامترهای نامعلوم  $(\beta, \alpha, \Sigma_\beta)$  و نیز مولفه  $F$  و با توجه به این که دسترسی به توزیع پیشین مزدوج امکان پذیر نیست، به طور قطعی توزیع پسین مدل تحت بررسی فرم بسته‌ای نخواهد داشت. از آن‌جا که هدف برآورد پارامترهای پویا است، به ناچار از روش‌های مبتنی بر شبیه‌سازی استفاده می‌شود. مدل پیشنهادی ارائه شده قادر است با استفاده از شبیه‌سازی به طور بهتری توزیع پسین را

<sup>۲</sup> Inverse wishart

برآورد کند. چون در این روش پارامترهای ثابت و پویا می‌توانند بطور جداگانه در شبیه‌سازی MCMC به‌نگام شوند. همچنین، حضور فرایند اتورگرسیو در پارامترهای پویای مدل باعث می‌شود تمامی پارامترهای پویا،  $\beta$ ، بدون ثابت نگه داشتن آن‌ها در شبیه‌سازی، در طی به‌نگام کردن با یکدیگر ترکیب شوند.

حضور فرایند اتورگرسیو در پارامترهای پویای مدل پیشنهادی (۲) باعث ایجاد تفاوت‌های اساسی با مدل (۱) خواهد شد به طوری که می‌توان مدل اول را به روشی که در زیربخش آتی آورده شده است، بسط داد.

## ۱.۲ مدل‌گزینی دنباله‌ای از پارامترهای پویا

خاصیت مدل‌گزینی فرایند اتورگرسیو  $p$  مرحله‌ای در مدل (۲) پارامترهای پویا را قادر می‌سازد که به‌وسیله دنباله‌ای از پارامترهای وابسته به زمان به‌جای تابع‌هایی هموار از زمان انتخاب شوند. حضور فرایند اتورگرسیو در پارامترهای پویای مدل بسیار مطلوب است چرا که، چنین پارامترهایی در زمان‌های گسسته قرار می‌گیرد و تحت روندی در داده‌ها به‌طور هم‌زمان برآورد می‌شوند در حالی که هموارسازی آن با یک تک‌پارامتر کنترل شود. از این جهت، مدل‌گزینی پارامترهای پویا بر اساس فرایندهای اتورگرسیو یک انتخاب طبیعی برای مدل‌گزینی اثر عامل‌های آمیخته است، چراکه این فرایند را می‌توان به‌صورت زمان گسسته توابع هموار از زمان در نظر گرفت.

در ادبیات مدل‌های پویا معمولاً پارامترهای پویا تحت روندهای

$$\begin{aligned} \beta_t &\sim N(\beta_{t-1}, \tau^2) && \text{قدم زدن تصادفی مرتبه اول} \\ \beta_t &\sim N(2\beta_{t-1} - \beta_{t-2}, \tau^2) && \text{(۳) قدم زدن تصادفی مرتبه دوم} \\ \beta_t &\sim N(\beta_{t-1} + \delta_{t-1}, \tau^2); \delta_t \sim N(\delta_{t-1}, \psi^2) && \text{مدل روند خطی موضعی} \end{aligned}$$

مدل‌گزینی می‌شوند. یک ویژگی مطلوب در مدل‌گزینی پارامترهای پویا، نامانایی فرایند تحت بررسی است که در مدل (۳) هر سه فرایند نامانا هستند به طوری که به سطح میانگین‌هایشان اجازه می‌دهند تا در طول زمان تغییر کنند. قدم زدن تصادفی

مرتبه دوم یک انتخاب طبیعی از حالت‌های قدم زدن تصادفی مرتبه اول، مدل موضعی روند خطی و روش استاندارد مانند اسپلاین درجه سوم طبیعی است. لازم به ذکر است که اسپلاین درجه سوم یکی از روش‌های استاندارد برای برآورد تابع هموار است. این در حالی است که قدم زدن تصادفی مرتبه دوم شبیه یک اسپلاین درجه سوم در زمان گسسته است (فاهرمیر و تنز، ۲۰۰۱). بنابراین دلیل خوبی برای استفاده از این روش در برآورد پارامترها است و از آنجایی که هدف تحلیل بیزی DGLMها است، پس می‌توان تابع هموار را با یک اسپلاین درجه سوم طبیعی، به دلیل پارامتری بودنش، برآورد نموده و آنرا درون یک مجموعه بیزی سراسر ساخت. هرچند روش ذکر شده در برآورد پارامترهای مدل پویا روشی موثر و برجسته است، اما روش‌های دیگر نیز ممکن است در برخی شرایط عملکردی مناسبی داشته باشند (برای مقایسه روش‌ها به لی و شادکیک ۲۰۰۸، مراجعه شود).

### ۳ الگوریتم برآورد پارامترهای مدل

برای برآورد بیزی پارامترهای مدل (۲) بر اساس توزیع‌های پیشین معرفی شده، توزیع پسین توام پارامترها به صورت

$$\begin{aligned} f(\underline{\beta}, \underline{\alpha}, \Sigma_{\beta}, F | \underline{y}) &= \prod_{t=1}^n p(y_t | \underline{\beta}_t, \underline{\alpha}) N(\underline{\alpha} | \underline{\mu}_{\alpha}, \Sigma_{\alpha}) \\ &\times \prod_{t=1}^n N(\underline{\beta}_t | F \setminus \underline{\beta}_{t-1} + \dots + F_p \underline{\beta}_{t-p}, \Sigma_{\beta}) \\ &\times N(\underline{\beta}_{(-p+1)} | \underline{\mu}_{\beta}, \Sigma_{\beta}), \dots, N(\underline{\beta}_0 | \underline{\mu}_{\beta}, \Sigma_{\beta}) \\ &\times IW(\Sigma_{\beta} | n_{\Sigma}, S_{\Sigma}^{-1}) f(F), \end{aligned}$$

است، که در آن  $f(F)$  به فرم روندی که در نظر گرفته می‌شود بستگی دارد. در رابطه (۴)،  $p(\cdot | \cdot, \cdot)$  نماد توزیع پواسون،  $N(\cdot | \cdot, \cdot)$  نماد توزیع نرمال و  $IW(\cdot | \cdot, \cdot)$  نماد توزیع وارون ویشارت است. واضح است توزیع پسین ارائه شده دارای فرم بسته‌ای نیست و لازم است برای برآورد بیزی پارامترها از الگوریتم‌های MCMC استفاده نمود. پارامترها با استفاده از بلوک‌های الگوریتم متروپولیس هستینگس به روزرسانی

می شوند، که در آن‌ها مقادیر آغازین  $(\underline{\beta}^{(0)}, \underline{\alpha}^{(0)}, \Sigma_{\beta}^{(0)}, F^{(0)})$  از توزیع استیوونت تولید شده‌اند. پارامترها یک‌در میان از توزیع‌های شرطی کاملی که در ادامه آورده شده است، نمونه‌گیری می‌شوند.

**الف) نمونه‌گیری از  $f(\underline{\beta}|\underline{y}, \underline{\alpha}, \Sigma_{\beta}, F)$ .** توزیع شرطی کامل  $\underline{\beta}$  از حاصل ضرب تابع احتمال  $n$  مشاهده پواسون و توزیع پیشین اتورگرسو مرتبه  $p$  نرمال به صورت

$$f(\underline{\beta}|\underline{y}, \underline{\alpha}, \Sigma_{\beta}, F) \propto \prod_{t=1}^n N(\underline{\beta}_t | F_1 \underline{\beta}_{(t-1)} + \dots + F_p \underline{\beta}_{(t-p)}, \Sigma_{\beta}) \\ \times \prod_{t=1}^n p(y_t | \underline{\beta}_t, \underline{\alpha}) N(\underline{\beta}_{(-p+1)} | \underline{\mu}_0, \Sigma_0) \dots N(\underline{\beta}_0 | \underline{\mu}_0, \Sigma_0),$$

به دست می‌آید. توزیع شرطی کامل بدست آمده دارای فرمی غیر استاندارد است و برای شبیه‌سازی از آن تعدادی الگوریتم پیشنهاد شده است که همگی از خاصیت اتورگرسیوی بودن  $\underline{\beta}$  استفاده نموده‌اند. فاهرمیر و همکاران (۱۹۹۲) الگوریتم نمونه‌گیری رد کردنی را با گام گیبز ترکیب نمودند، اما نرخ‌های پذیرشی گزارش شده است که نشان می‌دهد الگوریتم، بازدارنده و بسیار کند است. در مقابل گامرن (۱۹۹۸)، الگوریتم‌های متروپولیس هستینگس را پیشنهاد نمودند که در آن توزیع‌های پیشنهادی به ترتیب بر اساس مراحل امتیازبندی فیشر و بسط تیلور بوده است. توزیع پیشنهادی آن‌ها از لحاظ محاسبه‌ای در مقایسه با دو الگوریتم بالا سریع‌تر است در حالی که نرخ پذیرش متروپولیس هستینگس دارای فرمی ساده‌تر و راحت‌تر از نظر محاسبه است.

**ب) نمونه‌گیری از  $f(\underline{\alpha}|\underline{y}, \underline{\beta}, \Sigma_{\beta}, F)$ .** توزیع شرطی کامل حاصل از  $\underline{\alpha}$  فرمی غیر استاندارد به صورت

$$f(\underline{\alpha}|\underline{y}, \underline{\beta}, \Sigma_{\beta}, F) \propto \prod_{t=1}^n p(y_t | \underline{\beta}_t, \underline{\alpha}) N(\underline{\mu}_{\alpha}, \Sigma_{\alpha})$$

دارد. بنابراین شبیه‌سازی با استفاده از گام متروپولیس هستینگس انجام می‌شود و دو انتخاب معمول، طرح‌های قدم زدن تصادفی و امتیازی فیشر هستند. به دلیل صرفه اقتصادی، کار محاسبه‌ای و دردسترس بودن پارامترهای دقیق، در این جا طرح قدم زدن تصادفی به جای نرخ امتیازی فیشر مورد استفاده قرار می‌گیرد. پارامترها در

بلوک‌ها به‌هنگام می‌شوند. توزیع پیشنهادی، بر اساس توزیع نرمال با میانگینی برابر با مقادیر کنونی بلوک و ماتریس کواریانس قطری طراحی شده است. ماتریس کواریانس قطری معمولاً همانی است و می‌تواند نرخ‌های پذیرش را افزایش دهد.

پ) نمونه‌گیری از  $f(\Sigma_\beta | \underline{y}, \underline{\beta}, \underline{\alpha}, F)$ . توزیع شرطی کامل  $\Sigma_\beta$  شامل  $n$  توزیع اتورگرسیو مرتبه  $p$  نرمال برای پارامترهای پویا و توزیع پیشین مزدوج وارون ویشارت  $IW(n\Sigma, S_\Sigma^{-1})$  است که نتیجه حاصل از آن توزیع پسین وارون ویشارت  $IW(a, b)$  خواهد بود، که در آن

$$a = n_\Sigma + n$$

$$b^{-1} = S_\Sigma + \sum (\underline{\beta}_t - F_1 \underline{\beta}_{t-1} - \dots - F_p \underline{\beta}_{t-p}) (\underline{\beta}_t - F_1 \underline{\beta}_{t-1} - \dots - F_p \underline{\beta}_{t-p})^T$$

ت) نمونه‌گیری از  $f(F | \underline{Y}, \underline{\beta}, \underline{\alpha}, \Sigma_\beta)$ . توزیع شرطی کامل  $F$  به فرم و بعد فرایندهای اتورگرسیو پارامترهای پویا از مرتبه  $p$  در نظر گرفته شده، بستگی دارد. انواع بسیار متداول آن فرایند اتورگرسیو پارامترهای پویای یک متغیره  $(\beta_t \sim N(F_1 \beta_{t-1}, \Sigma_\beta))$  و فرایند اتورگرسیو پارامترهای پویای دو متغیره  $(\beta_t \sim N(F_1 \beta_{t-1} + F_2 \beta_{t-2}, \Sigma_\beta))$  هستند. در هر مورد، تخصیص توزیع‌های پیشین ساده  $(F_1)$  یا  $(F_1, F_2)$  منجر به به‌دست آوردن توزیع شرطی کامل نرمال خواهد شد. برای مثال، در فرایند اتورگرسیو پارامترهای پویای یک متغیره، توزیع شرطی کامل برای  $F_1$  توزیع نرمال با میانگین  $\sum_{t=1}^n \beta_t \beta_{t-1} / \sum_{t=1}^n \beta_{t-1}^2$  و واریانس  $\Sigma_\beta / \sum_{t=1}^n \beta_{t-1}^2$  خواهد بود. نتایج مشابهی را می‌توان در حالت فرایند اتورگرسیو پارامترهای پویای دو متغیره نیز به‌دست آورد.

#### ۴ بررسی وضعیت فعالیت اقتصادی در سه استان کشور

مسئله فعالیت‌های اقتصادی و مطالعه راهکارهایی که منجر به بهتر شدن وضعیت آن می‌شود از مهم‌ترین موضوعاتی است که همواره از سوی پژوهشگران علوم مختلف مورد مطالعه، نقد و بررسی قرار گرفته است. در همین راستا آماردانان نیز سعی بر آن



دارند که با ارائه مدل‌های مناسب ارتباط عوامل مختلف و با اهمیتی که بر وضعیت فعالیت اقتصادی افراد تاثیرگذار است را شناسایی نموده و بر اساس میزان اثرگذاری عوامل کمکی بر روی آن، پیش‌بینی وضعیت آن را برای یک یا چند واحد زمانی آینده تعیین نمایند. در این بخش با بهره‌گیری از مدل ارائه شده در بخش دوم، به بررسی اثرهای عوامل کمکی بر وضعیت فعالیت اقتصادی سه استان کشور پرداخته می‌شود. جمعیت فعال اقتصادی به تمامی اعضای ده ساله و بیشتر خانوارها که در هفت روز قبل از مراجعه مامور آمارگیری، شاغل یا بیکار بوده‌اند اطلاق می‌شود.

جامعه ماری شامل جمعیت ده ساله و بیش‌تر بر حسب وضعیت فعالیت اقتصادی و نیز به تفکیک جنسیت و محل سکونت افراد برای سال‌های ۱۳۸۵ تا ۱۳۸۷ است که برای دستیابی به این داده‌ها از آمارهای منتشر شده طرح اشتغال و بیکاری مرکز آمار ایران طی سال‌های ۱۳۸۵ تا ۱۳۸۷ استفاده شده است.

در این مطالعه، هدف بررسی وضعیت فعالیت اقتصادی جمعیت ده ساله و بیشتر بر حسب وضعیت فعالیت اقتصادی و به تفکیک جنسیت و استان و محل سکونت در سه استان آذربایجان شرقی، اصفهان و خراسان رضوی است. در این جهت از سه متغیر کمکی زیر بهره گرفته می‌شود:

$$X_1 = \text{جنسیت: زن (۱)، مرد (۲)}$$

$$X_2 = \text{وضعیت بیکاری: شاغل (۱)، بیکار (۲)}$$

$$X_3 = \text{محل سکونت: روستا (۱)، شهر (۲)}$$

فرض کنید تعداد فعالان اقتصادی در هر یک از استان‌ها در زمان  $t$  به صورت

$$y_t^j \sim p(m_t^j); \quad t = 1, 2, 3; \quad j = 1, \dots, 8;$$

$$\ln(m_t^j) = \beta_{t1} + \beta_{t2}X_1^j + \beta_{t3}X_2^j + \alpha X_3^j$$

$$\beta_{t1} = F_{t1}\beta_{t-1,1} + \nu_{t1}; \quad \beta_{t2} = F_{t2}\beta_{t-1,2} + \nu_{t2}; \quad \beta_{t3} = F_{t3}\beta_{t-1,3} + \nu_{t3}$$

باشد، که در آن  $\beta_{t1}, \beta_{t2}, \beta_{t3}$  و  $\alpha$  به ترتیب اثر عوامل ثابت، اثرهای اصلی جنسیت، بیکاری و محل سکونت بر روی فعالیت اقتصادی هستند که از فرایند اتورگرسیون مرتبه اول پیروی می‌کنند و  $\alpha$  پارامتر ثابت مدل است. لازم به ذکر است که در زمان  $t = 1$  این پارامترها دارای مقادیر اولیه بوده و برای هر کدام از پارامترهای مدل،

توزیع‌های پیشین به صورت

$$\beta_{0,1}, \beta_{0,2}, \beta_{0,3} \sim MN(\mu_0, \Sigma_0); \quad \nu_t \sim MN(\mu, \tau); \quad \tau \sim W_3(R);$$

$$F \sim MN(\mu_f, \Sigma_f); \quad \alpha \sim N(\mu_\alpha, \Sigma_\alpha).$$

در نظر گرفته شده‌اند، که در آن  $MN(\cdot, \cdot)$  نماد توزیع نرمال چندمتغیره و  $W_3(\cdot)$  نماد توزیع ویشارت سه متغیره است. در این صورت، توزیع پسین پارامترها به صورت

$$f(\beta_{t,1}, \beta_{t,2}, \beta_{t,3}, \alpha, \tau | y_t) = \prod_{t=1}^n p(y_t | \beta_{t,1}, \beta_{t,2}, \beta_{t,3}, \alpha) N(\alpha | \mu_\alpha, \Sigma_\alpha)$$

$$\times \prod_{t=1}^n MN(\beta_{t,1} | F_{t,1} \beta_{t-1,1}, \tau) \times \prod_{t=1}^n MN(\beta_{t,2} | F_{t,2} \beta_{t-1,2}, \tau)$$

$$\times \prod_{t=1}^n MN(\beta_{t,3} | F_{t,3} \beta_{t-1,3}, \tau) \times MN(\beta_{0,1} | \mu_0, \Sigma_0)$$

$$\times MN(\beta_{0,2} | \mu_0, \Sigma_0) \times MN(\beta_{0,3} | \mu_0, \Sigma_0) \times W_3(\tau | R) \times MN(F | \mu_F, \Sigma_F).$$

حاصل می‌شوند، که فرم بسته‌ای ندارند و باید برای برآورد پارامترهای مدل از شبیه‌سازی استفاده شود. در ادامه با استفاده از بسته نرم‌افزار BUGS به تحلیل و بررسی اثرهای اصلی موثر بر وضعیت فعالیت اقتصادی پرداخته می‌شود. در این راستا برنامه‌ای در محیط نرم‌افزار BUGS نوشته شده و برای تک‌تک پارامترهای موردنظر در مدل نمونه‌گیری در هر زمان و به تعداد تکرار ۱۰۰۰۰۰ مرتبه و بر اساس دستورالعملی که در ادامه آورده شده است، انجام می‌پذیرد.

الف) نمونه‌گیری از  $f(\beta_{t,1}, \beta_{t,2}, \beta_{t,3} | y_t, \alpha, \tau)$ . در این حالت توزیع شرطی کامل به صورت

$$f(\beta_{t,1}, \beta_{t,2}, \beta_{t,3} | y_t, \alpha, \tau) = \prod_{t=1}^3 P(y_t | \beta_{t,1}, \beta_{t,2}, \beta_{t,3}, \alpha)$$

$$\times \prod_{t=1}^3 MN(\beta_{t,1} | F_{t,1} \beta_{t-1,1}, \tau) \times \prod_{t=1}^3 MN(\beta_{t,2} | F_{t,2} \beta_{t-1,2}, \tau)$$

$$\times \prod_{t=1}^3 MN(\beta_{t,3} | F_{t,3} \beta_{t-1,3}, \tau) \times MN(\beta_{0,1} | \mu_0, \Sigma_0)$$

$$\times MN(\beta_{02}|\mu_0, \Sigma_0) \times MN(\beta_{03}|\mu_0, \Sigma_0)$$

به دست می آید، که دارای فرم بسته ای نیست. برای غلبه بر این مشکل از خاصیت اتورگرسیو بودن  $\beta$  بهره گرفته و از الگوریتم نمونه گیری متروپولیس هستینگس استفاده می شود. توجه شود که نرم افزار BUGS به طور هوشمند تشخیص خواهد داد که نمونه گیری به روش متروپولیس هستینگس یا گیبز انجام شود.

ب) نمونه گیری از  $f(\alpha|y_t, \beta_{t1}, \beta_{t2}, \beta_{t3}, F, \tau)$ . در این حالت توزیع شرطی کامل به صورت

$$f(\alpha|y_t, \beta_{t1}, \beta_{t2}, \beta_{t3}, F, \tau) = \prod_{t=1}^3 p(y_t|\beta_{t1}, \beta_{t2}, \beta_{t3}, \alpha) N(\alpha|\mu_\alpha, \Sigma_\alpha)$$

به دست می آید که فرمی غیراستاندارد دارد و در این حالت نیز برای شبیه سازی از گام های متروپولیس هستینگس استفاده می شود.

پ) نمونه گیری از  $f(\tau|y_t, \beta_{t1}, \beta_{t2}, \beta_{t3}, \alpha, F)$ . در این حالت توزیع شرطی کامل عبارت است از

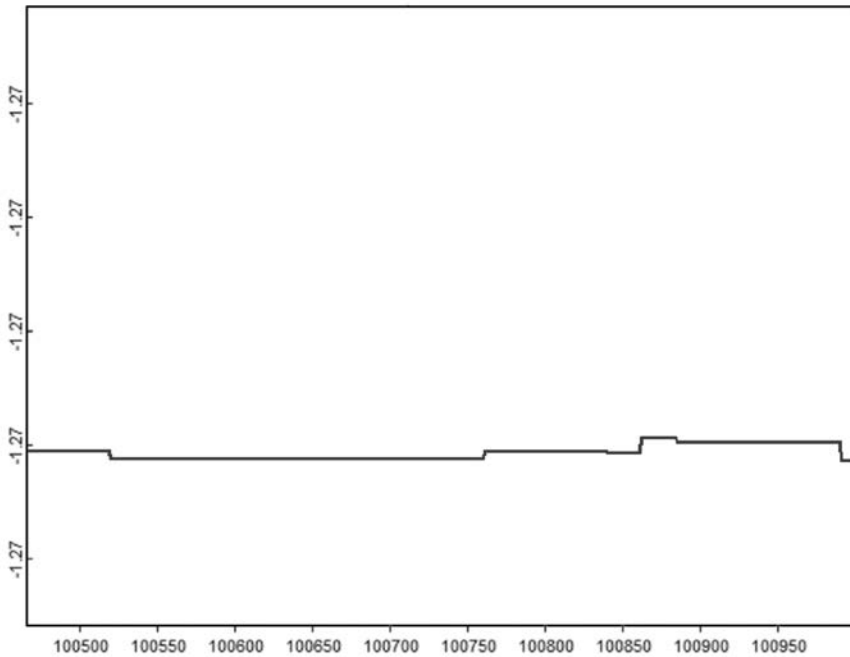
$$f(\tau|y_t, \beta_{t1}, \beta_{t2}, \beta_{t3}, \alpha, F) = \prod_{t=1}^3 MN(\beta_{t1}|F_{t1}\beta_{t-1,1}, \tau) \\ \times \prod_{t=1}^3 MN(\beta_{t2}|F_{t2}\beta_{t-1,2}, \tau) \times \prod_{t=1}^3 MN(\beta_{t3}|F_{t3}\beta_{t-1,3}, \tau) \times W_\tau(\tau|R).$$

ت) نمونه گیری از  $f(F|y_t, \beta_{t1}, \beta_{t2}, \beta_{t3}, \alpha, \tau)$ . در این حالت توزیع شرطی کامل به صورت

$$f(F|y_t, \beta_{t1}, \beta_{t2}, \beta_{t3}, \alpha, \tau) = \prod_{t=1}^3 MN(\beta_{t1}|F_{t1}\beta_{t-1,1}, \tau) \\ \times \prod_{t=1}^3 MN(\beta_{t2}|F_{t2}\beta_{t-1,2}, \tau) \times \prod_{t=1}^3 MN(\beta_{t3}|F_{t3}\beta_{t-1,3}, \tau) \\ \times MN(F|\mu_F, \Sigma_F).$$

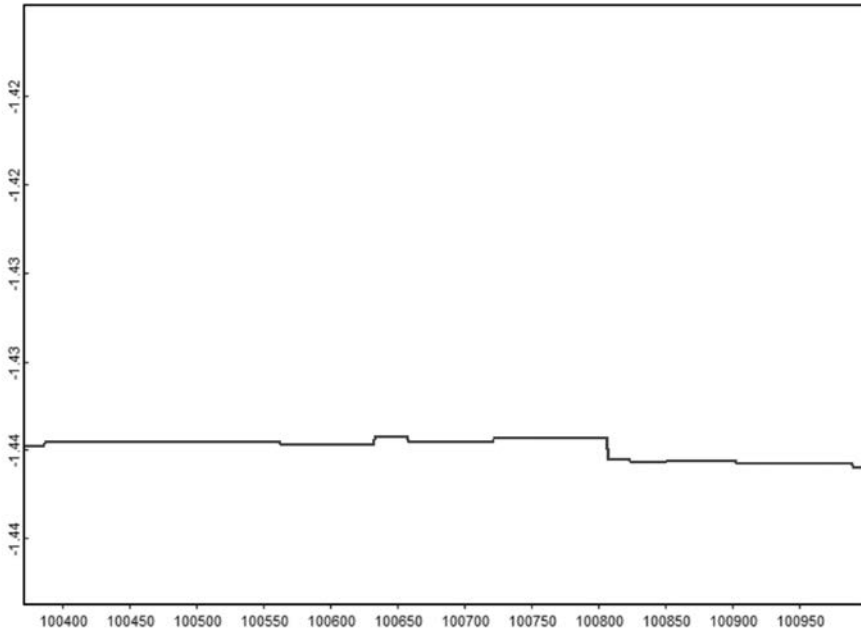
به دست می آید، که در آن پارامترهای پویا از نوع قدم زدن تصادفی مرتبه اول (AR(1)) هستند و از این رو توزیع شرطی کامل در این حالت دارای توزیع نرمال با

میانگین  $\sum_{t=1}^n \beta_t \beta_{t-1} / \sum_{t=1}^n \beta_{t-1}^2$  و واریانس  $\Sigma_{\beta} / \sum_{t=1}^n \beta_{t-1}^2$  خواهد بود.

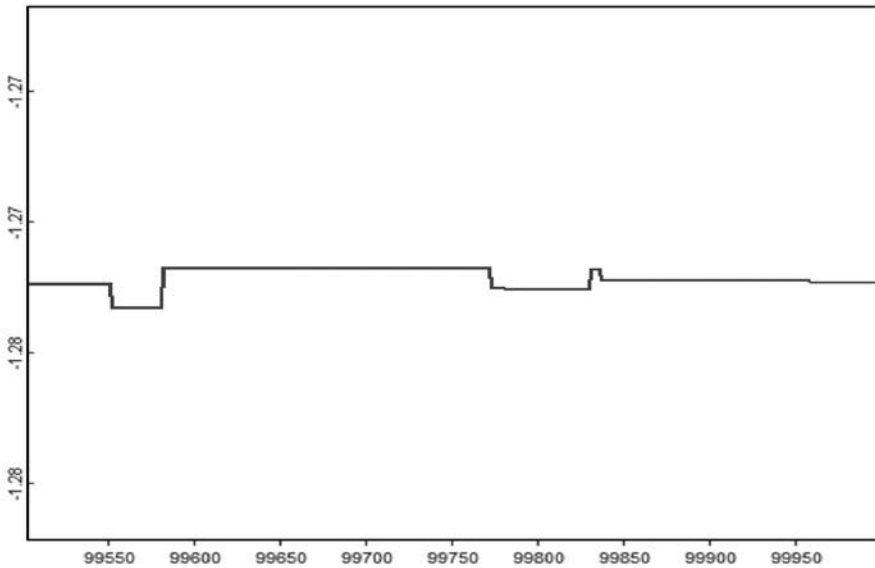


شکل ۱: نمودار اثر جنسیت بر فعالیت اقتصادی در مقابل تعداد تکرار در استان آذربایجان شرقی

اگر توزیع پسین موردنظر درست باشد، می‌توان نتیجه گرفت که نمونه تولید شده از توزیع مورد نظر درست است. از این رو نشان دادن همگرایی الگوریتم برای تولید نتایج توزیع پسین ضروری است. نمودار اثر یکی از روش‌هایی است که بر اساس آن می‌توان به بررسی این همگرایی پرداخت. در این نمودار تکرارها در برابر مقادیر تولید شده رسم می‌شوند. در صورتی که همه مقادیر درون یک حدود معین



شکل ۲: نمودار اثر جنسیت بر فعالیت اقتصادی در مقابل تعداد تکرار در استان اصفهان



شکل ۳: نمودار اثر جنسیت بر فعالیت اقتصادی در مقابل تعداد تکرار در استان

بدون حالت تناوبی شدید که از محدوده معین مقادیر بیشتر یا کمتر نباشند و شدت تعداد این دوره‌ها زیاد باشد، می‌توان فرض همگرایی مدل را پذیرفت.

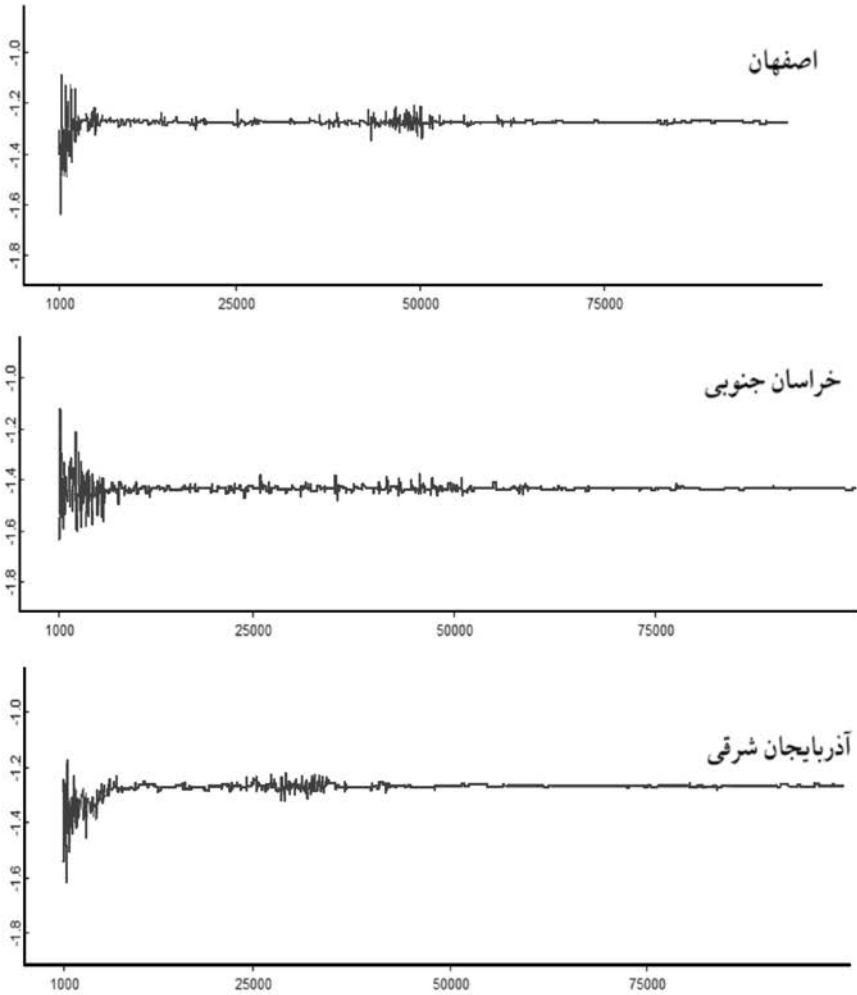
در شکل‌های ۱ تا ۳ نمودارهای مربوط به نمونه‌گیری از توزیع پسین  $\beta_{22}$ ، اثر جنسیت بر روی وضعیت فعالیت اقتصادی در سه استان تحت بررسی در سال ۱۳۸۷، پس از ۱۰۰۰۰ بار تکرار نمایش داده شده است. همان‌طور که ملاحظه می‌شود حدود نمونه‌گیری در هر سه شکل حول مقدار معینی تقریباً ثابت مانده است.

برای مثال، در شکل ۳، که مربوط به استان خراسان رضوی است، می‌توان دید که نمونه‌گیری حول مقدار  $1/27-1/28$  صورت پذیرفته و تغییر چندانی در این حدود معین نداشته است. همچنین با توجه به شکل ۴ که نمودار اثر کل نمونه‌های شبیه‌سازی شده در سه استان تحت بررسی همگرا هستند. پس از بررسی و تایید نمونه‌گیری از توزیع‌های پسین مورد نظر، باید برآورد تقریبی چگالی پسین بررسی شود. در شکل‌های ۵ تا ۷ برآورد تقریبی چگالی پسین پارامتر  $\beta_{22}$  به ترتیب در استان‌های آذربایجان شرقی، اصفهان و خراسان رضوی نشان داده شده‌اند. همان‌طور که ملاحظه می‌شود، پس از تکرار ۱۰۰۰۰۰ تایی در نرم‌افزار BUGS، توزیع پسین  $\beta_{22}$  تقریباً از توزیع نرمال پیروی می‌کند. از این رو می‌توان گفت که تعیین توزیع پیشین در مدل مناسب بوده که برآورد پارامتر مورد نظر پس از نمونه‌گیری و شبیه‌سازی دارای توزیع معینی شده است که برای هر سه استان قابل مشاهده است.

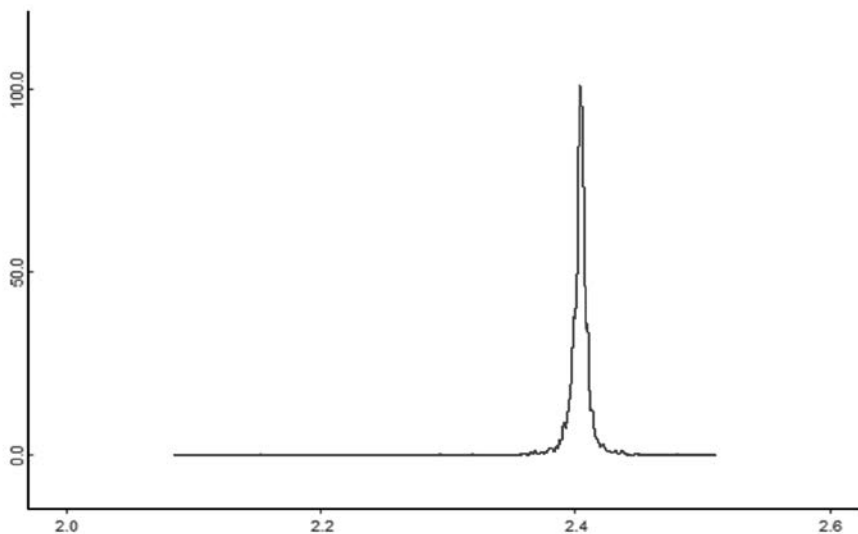
### بحث و نتیجه‌گیری

جدول ۱ حاوی میانگین و انحراف معیار توزیع‌های پسین برای سه استان آذربایجان شرقی، اصفهان و خراسان رضوی است که با بررسی آن‌ها نتایج زیر حاصل می‌شوند:

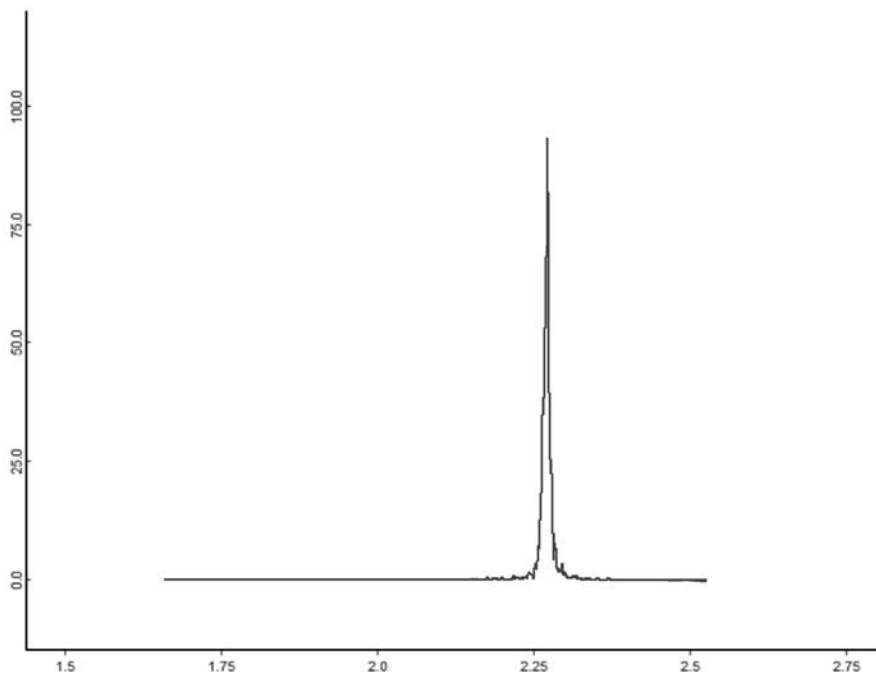
- ۱- در رابطه با اثر جنسیت، با توجه به برآوردهای بدست آمده برای  $\beta_{12}$ ،  $\beta_{22}$  و  $\beta_{22}$  در استان اصفهان، می‌توان نتیجه گرفت که حضور مردان نسبت به زنان از سال ۱۳۸۵ تا ۱۳۸۶ اثر مساعدتری بر روی وضعیت فعالیت اقتصادی داشته و از سال ۱۳۸۶ تا ۱۳۸۷ این دو گروه سهمی یکسان را در بهبود وضعیت فعالیت اقتصادی



شکل ۴: نمودار اثر کل جنسیت بر فعالیت اقتصادی در مقابل تعداد تکرار در سه استان

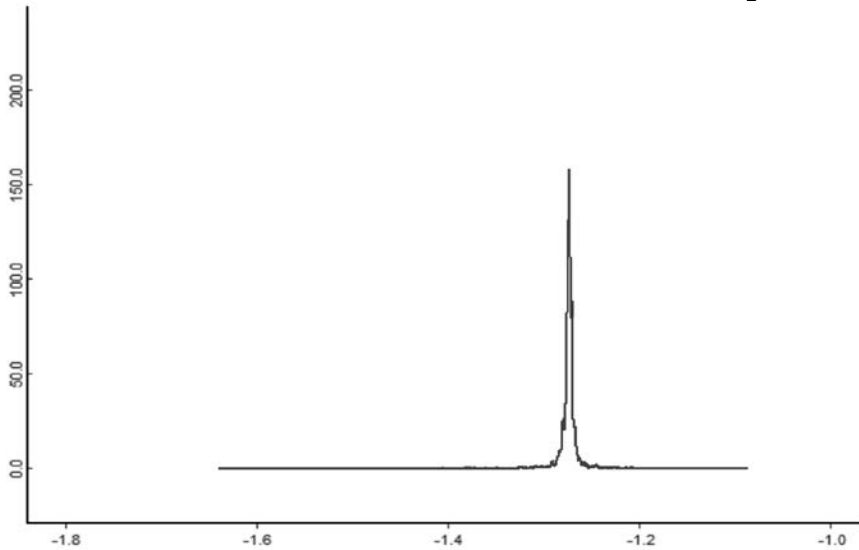


شکل ۵: نمودار برآورد تابع چگالی پسین اثر جنسیت بر فعالیت اقتصادی در استان آذربایجان شرقی



شکل ۶: نمودار برآورد تابع چگالی پسین اثر جنسیت بر فعالیت اقتصادی در استان اصفهان





شکل ۷: نمودار برآورد تابع چگالی پسین اثر جنسیت بر فعالیت اقتصادی در استان خراسان رضوی

دارا بوده‌اند. این امر نشان دهنده مشارکت برابر زنان و مردان در مشاغل مختلف در طی این سال‌ها است. با این حال در استان آذربایجان شرقی، در طی سه سال، همواره حضور مردان در فعالیت‌های اقتصادی روند مساعدتری نسبت به زنان دارا بوده است. با ادامه بررسی‌ها در استان خراسان رضوی به این نتیجه خواهیم رسید که تاثیر حضور مردان و زنان در وضعیت فعالیت اقتصادی در این استان تقریباً یکسان است. به عبارتی دیگر می‌توان گفت که در طی دوره سه ساله تحت بررسی، مردان و زنان به نسبت مساوی فعالیت داشته‌اند. اما در حالت کلی می‌توان اثر جنسیت زن در استان آذربایجان شرقی در سال ۱۳۸۵ و اثر جنسیت مرد را در استان اصفهان و در سال ۱۳۸۷ بسیار مناسب ارزیابی نمود.

۲- با بررسی اثر وضعیت بیکاری بر وضعیت فعالیت اقتصادی در استان‌ها و برآوردهای  $\beta_{13}$ ،  $\beta_{23}$  و  $\beta_{33}$  این نتیجه حاصل می‌شود که اثر وضعیت بیکاری روی فعالیت اقتصادی استان‌ها یکسان است. به این ترتیب از سال ۱۳۸۵ تا ۱۳۸۶ بیکاری اثر سوئی بر وضعیت فعالیت اقتصادی استان‌ها داشته که این امر می‌تواند به دلیل افزایش نیروی کار جدید در آن سال‌ها بوده باشد. از سال ۱۳۸۶ تا ۱۳۸۷ تقریباً

پارامتر	آذربایجان شرقی		اصفهان		خراسان رضوی	
	میانگین	انحراف معیار	میانگین	انحراف معیار	میانگین	انحراف معیار
$\beta_{11}$	۸/۲۶۶	۰/۹۷۶۶	۱۱/۵۱۰	۰/۷۱۵۱	۹/۲۵۱	۱/۲۴۳
$\beta_{12}$	-۰/۹۵۰	۰/۰۸۵۰	-۱/۲۱۲	۰/۷۱۶۵	-۱/۲۲	۰/۱۴۸۶
$\beta_{13}$	۳/۲۴۸	۰/۴۱۵۴	۲/۴۲۶	۰/۳۳۷۹	۳/۰۳۵	۰/۵۴۵۲
$\beta_{21}$	۹/۹۵۹	۰/۲۴۵۶	۲۱/۳۴۰	۰/۲۱۳۰	۱۰/۸۴	۰/۳۰۹۵
$\beta_{22}$	-۱/۱۳۲	۰/۰۲۸۸	-۱/۴۰۱	۰/۰۵۲۹	-۱/۲۱۵	۰/۰۴۴۰
$\beta_{23}$	۲/۴۸۸	۰/۰۹۱۹	۲/۱۲۴	۰/۰۸۶۱	۲/۲۴۹	۰/۱۴۳۲
$\beta_{31}$	۹/۸۴۶	۰/۰۴۸۵	۲۱/۰۶۰	۰/۱۴۶۳	۱۰/۶۱	۰/۰۹۲۰
$\beta_{32}$	-۱/۲۷۲	۰/۰۱۹۹	-۱/۴۳۴	۰/۰۱۴۵	-۱/۲۷۵	۰/۰۱۵۸
$\beta_{33}$	۲/۶۱۲	۰/۰۴۸۰	-۲/۲۷۰	۰/۰۲۴۸	۲/۴۰۲	۰/۰۲۰۵
$\alpha$	-۰/۴۵۳	۰/۰۸۶۷	-۱/۳۹۶	۰/۱۱۸۱	-۰/۴۴۱	۰/۰۸۴۸

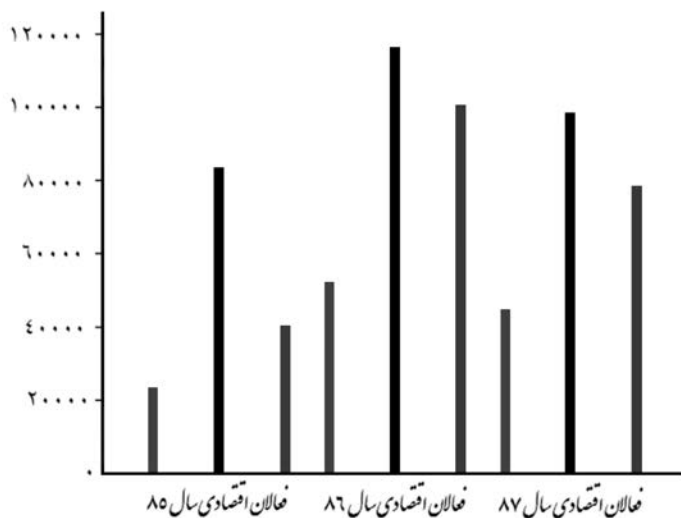
جدول ۱: برآورد میانگین و انحراف معیار توزیع پسین استان‌ها در سه سال

روندی ثابت را در هر سه استان شاهد هستیم. در واقع می‌توان گفت که اشتغال و بیکاری سهمی برابر در رابطه با ویژگی تحت بررسی داشته‌اند. بیشترین اثر وضعیت بیکاری مربوط به استان آذربایجان شرقی در سال ۱۳۸۵ است. نتایج نشان می‌دهند که شاغلین اثر بسیار مطلوبی بر وضعیت فعالیت اقتصادی داشته‌اند. اما در سال ۱۳۸۶، در استان اصفهان حضور بیکاران اثر نامطلوبی را بر وضعیت فعالیت اقتصادی نسبت به دو استان دیگر داشته است.

۳- در رابطه با اثر وضعیت محل سکونت در سه استان، با توجه به مقدار برآورد  $\alpha$ ، ملاحظه می‌شود که فعالیت‌های خوب روستائیان سه استان در طی سال‌های ۱۳۸۵ تا ۱۳۸۷ باعث اثرهای مطلوبی در وضعیت فعالیت اقتصادی سه استان شده است. این امر نشان‌دهنده آن است که روستائیان با درآمدزایی‌های خوب و ثبیت فعالیت‌های مفید در استان توانسته‌اند تاثیر بسزایی در وضعیت فعالیت اقتصادی هر یک از استان‌ها داشته باشند. همچنین حضور فعالان اقتصادی در روستاهای استان آذربایجان شرقی و خراسان رضوی به نسبت استان اصفهان کمتر بوده و از این رو می‌توان نتیجه گرفت که روستائیان این استان اثری مطلوب در فعالیت‌های اقتصادی داشته‌اند.

خراسان رضوی	اصفهان	آذربایجان شرقی	نرخ فعالان اقتصادی
۲/۲	۱/۴	۲/۱	سال ۸۶ نسبت به سال ۸۵
۰/۸۷	۰/۸۴	۰/۸۷	سال ۸۷ نسبت به سال ۸۶

جدول ۲: نرخ فعالان اقتصادی در سه استان



شکل ۸: نمودار نرخ فعالیت اقتصادی استان‌ها در طی دوره سه ساله به ترتیب برای استان‌های آذربایجان شرقی، اصفهان و خراسان رضوی

پس از بدست آوردن برآورد پارامترهای مدل پیشنهادی، می‌توان رشد نرخ فعالیت اقتصادی را از سالی نسبت به سال قبل محاسبه نمود. بر اساس نتایجی که در جدول ۲ و شکل ۸ آورده شده است، می‌توان نتیجه گرفت که نرخ فعالیت اقتصادی در سال ۱۳۸۶ نسبت به سال ۱۳۸۵ روندی صعودی را در هر سه استان دارا بوده است. این در حالی است که نرخ فعالیت اقتصادی استان‌ها از سال ۱۳۸۷ نسبت به ۱۳۸۶ روندی نزولی را طی کرده است.

**مقایسه با سایر روش‌ها:** تفاوت اصلی بین رویکرد بیزی با روش چپوگنا و گائتان (۲۰۰۲) که آن‌ها نیز از DGLM در این زمینه استفاده کرده‌اند، در تعیین روش برآورد پارامترها و استنباط مربوط به آن‌ها است. در رویکرد بیزی توزیع پسین  $\beta$  به درستی اجازه تغییرپذیری در ابرپارامترها را می‌دهد، در حالی که بازه‌های اطمینان محاسبه شده در روش درست‌نمایی این کار را انجام نمی‌دهند. در یک تحلیل درست‌نمایی،  $(\Sigma_\beta, F)$  توسط داده‌هایی که طی ضوابطی، همانند واریسی اعتبار تعمیم یافته استخراج شده‌اند، برآورد می‌شوند و برآوردها و انحراف استاندارد آنها از  $\beta$  با فرض این که  $(\Sigma_\beta, F)$  در مقدارهای آن‌ها ثابت هستند، محاسبه می‌شوند. در نتیجه بازه‌های اطمینان برای  $\beta$  احتمالاً بسیار کم پهن خواهند بود که این امر ممکن است منجر شود که عدم معنی‌داری آماری اثر آلودگی هوا معنی‌دار به نظر بیاید. در مقابل، بازه‌های اعتبار بیزی دارای پهنای درستی هستند، چرا که  $(\beta, \Sigma_\beta, F)$  با یکدیگر و به‌طور هم‌زمان در الگوریتم MCMC برآورد می‌شوند. رهیافت بیزی این امکان را به محقق می‌دهد تا اطلاعات پیشین راجع به پارامترها را در تحلیل مدل وارد کند در حالی که نتایج مشابه را می‌توان توسط تحلیل درست‌نمایی که با نادیده گرفتن توزیع پیشین است، به‌دست آورد. این موضوع به‌خصوص در مدل‌های پویا بسیار مهم است، چرا که پارامترهای رگرسیون احتمالاً در سرتاسر زمان به‌طور یکنواخت آشکار می‌شوند و عدم اطلاع توزیع پیشین از  $\Sigma_\beta$  ممکن است که در برآورد فرایند پارامترها به‌صورتی پنهان اختلال ایجاد کند. پس می‌توان با تشخیص اطلاع توزیع پیشین برای  $\Sigma_\beta$  آن‌را برطرف کرد.

رهیافت بیزی، به‌عنوان یک نگرش در مدل‌گزینی انواع مدل‌های سلسله‌مراتبی دیده می‌شود، زیرا می‌تواند تغییرات در چندین سطح را در یک روش مشخص

ترکیب کند، ضمن این که استفاده از روش های برآورد استاندارد را فراهم می سازد. به علاوه، کل توزیع پسین می تواند محاسبه شود در حالی که در تحلیل درستنمایی تنها مد و واریانس این توزیع برآورد می شود. به هر حال، همان گونه که با هر تحلیل بیزی محاسبه توزیع پسین وقت گیر است، برآورد مبتنی بر درستنمایی این کار را سریع تر انجام می دهد.

### تقدیر و تشکر

نویسندگان از نظرات و پیشنهادات سازنده داوران محترم که سبب بهبود مطالب ارائه شده در مقاله گردید، کمال تشکر و قدردانی را دارند.

### مراجع

اسکندری، ف.، نقی زاده اردبیلی، س. (۱۳۸۴). تحلیل بیزی مدل های خطی تعمیم یافته پویا در داده های گسسته و مقایسه آن با دو نگرش بیز معمولی و بیز تجربی با کاربردی در وضعیت بیکاری کشور، فصلنامه پژوهش های اقتصادی ایران، جلد ۲۳، ۹۲-۱۶۵.

Chiogna, M. and Gaetan, C. (2002), Dynamic Generalized Linear Models with Applications to Environmental Epidemiology, *Applied Statistics*, **51**, 453-468.

Fahrmeir, L. (1992), Posterior Mode Estimation by Extended Kalman Filtering for Multivariate Dynamic Generalized Linear Models, *Journal of the American Statistical Association*, **87**, 501-509.

Fahrmeir, L. and Kaufmann, H. (1991), On Kalman Filtering, Posterior Mode Estimation and Fisher Scoring in Dynamic Exponential Family Regression, *Metrika*, **38**, 37-60.

- Fahrmeir, L. and Tutz, G. (2001), *Multivariate Statistical Modelling Based on Generalized Linear Models*, Second Edition, Springer-Verlag, New York and Berlin.
- Ferreira, M. A. R. and Gamerman, D. (2000), *Dynamic Generalized Linear Models*, In *Generalized Linear Models: A Bayesian Perspective*, Eds. D. K. Dey, S. K. Ghosh and B. K. Mallick, 57-72, New York: Marcel Dekker.
- Gamerman, D. (1998), Markov Chain Monte Carlo for Dynamic Generalized Linear Models, *Biometrika*, **85**, 215-227.
- Lee, D. and Shaddick, G. (2008), Modelling the Effects of Air Pollution on Health using Bayesian Dynamic Generalised Linear Models, *Environmetrics*, **19**, 785-804.
- Smith, J. Q. (1979), A Generalization of the Bayesian Steady Forecasting Model, *Journal of the Royal Statistical Society, Series B*, **41**, 375-387.
- West, M. and Harrison, J. (1997), *Bayesian Forecasting and Dynamic Models*, Second Edition, Springer Verlag, New York.
- West, M. and Harrison, J. Migon, H. S. (1985), Dynamic Generalized Linear Models and Bayesian Forecasting, *The American Statistician*, **80**, 73-83.