

توزیع جدید نمایی پواسن توانی برای مدل طول عمر

عارف خنجری عیدنک، محمدرضا زاد کرمی، علیرضا دانشخواه

گروه آمار، دانشگاه شهید چمران اهواز

تاریخ دریافت: ۱۳۹۰/۴/۱۵ تاریخ آخرین بازنگری: ۱۳۹۰/۵/۱۶

چکیده: در این مقاله، یک توزیع ترکیبی طول عمر جدید با توابع نرخ مخاطره صعودی، نزولی، وان شکل و تک مدی-وان شکل مطرح می‌شود. توزیع جدید، سه پارامتری و تعمیمی از توزیع نمایی توانی است. برآورد پارامترها به روش ماکسیمم درست‌نمایی، گشتاورها، تابع چگالی آماره‌های ترتیبی، تابع بقا، تابع نرخ مخاطره، متوسط باقیمانده طول عمر، تابع قابلیت و میانۀ آن ارائه می‌شود. سپس در یک مثال کاربردی مزایای این توزیع نشان داده می‌شود.

واژه‌های کلیدی: توزیع نمایی توانی، نرخ مخاطره، مدل طول عمر، تابع بقا.

۱ مقدمه

توزیع نمایی توانی^۱ (EP) به عنوان یک مدل طول عمر، ابتدا توسط اسمیت و باین (۱۹۷۵) مطرح شد. این توزیع توسط آماردانان بسیاری مورد بحث قرار گرفت، لیمیس (۱۹۸۶) و چن (۱۹۹۹) در مورد پارامتر شکل توزیع نمایی توانی و همچنین راجارشی و راجارشی (۱۹۸۸) در مورد وان شکل بودن نرخ شکست توزیع نمایی

آدرس الکترونیک مسئول مقاله: عارف خنجری عیدنک، aref65khanjar@yahoo.com

کد موضوع بندی ریاضی (۲۰۰۰): ۶۲۴۱۰

^۱ Exponential Power

توانی بحث نمودند. متغیر تصادفی T دارای توزیع نمایی توانی با پارامتر مقیاس $\alpha > 0$ و پارامتر شکل $\beta > 0$ است، اگر تابع چگالی احتمال آن به صورت

$$f_{SB}(t) = \frac{\beta}{\alpha} \left(\frac{t}{\alpha}\right)^{\beta-1} e^{1 + \left(\frac{t}{\alpha}\right)^{\beta} - e^{\left(\frac{t}{\alpha}\right)^{\beta}}}, \quad t > 0$$

باشد. توابع بقا و مخاطره آن به ترتیب عبارتند از

$$S_{SB}(t) = e^{1 - e^{\left(\frac{t}{\alpha}\right)^{\beta}}}, \quad t > 0$$

$$h_{SB}(t) = \frac{\beta}{\alpha} \left(\frac{t}{\alpha}\right)^{\beta-1} e^{\left(\frac{t}{\alpha}\right)^{\beta}}, \quad t > 0$$

شکل تابع مخاطره $h_{SB}(t)$ به مقدار پارامتر شکل β بستگی دارد، و این تابع برای $\beta \geq 1$ صعودی و برای $\beta < 1$ وان شکل است. طی سال‌های اخیر، اصلاحات جدیدی در مدل نمایی توانی مطرح شده است. چن (۲۰۰۰) یک توزیع جدید با دو پارامتر شکل مطرح کرد که با وجود دو پارامتر، توابع مخاطره وان شکل و صعودی را نتیجه می‌دهد. اما به دلیل نداشتن پارامتر مقیاس، انعطاف پذیری کمتری برای تحلیل داده‌های طول عمر در علوم مختلف را دارد. برای رفع این محدودیت زی و همکاران (۲۰۰۲) توزیع تعمیم‌یافته وایبل را با یک پارامتر شکل اضافه به عنوان تعمیمی از مدل چن، معرفی کردند که انعطاف پذیری بیشتری دارد. علاوه بر این تعدادی از آماردانان توزیع‌های ترکیبی مانند توزیع‌های دو پارامتری نمایی-هندسی (EG) آدامیدیس و لوکاس (۱۹۹۸)، نمایی-پواسن (EP) کاس (۲۰۰۷)، نمایی-لگاریتمی (EL) طهماسبی و رضایی (۲۰۰۸) و سری نمایی-توانی (EPOW) چاهکندی و گنجعلی (۲۰۰۹) با نرخ مخاطره نزولی پیشنهاد کردند. اخیراً توزیع‌های پواسن-نمایی (PED) کاجو و همکاران (۲۰۱۱)، سری نمایی-توانی مکمل (CEPS) فلوراس و همکاران (۲۰۱۱) با نرخ مخاطره صعودی معرفی شدند. همتی و همکاران (۲۰۱۱) توزیع ترکیبی سه پارامتری وایبل-پواسن (WP) را پیشنهاد کردند که دارای توابع مخاطره نزولی، صعودی، تک مدی-وان شکل هستند. در این مقاله، خانواده توزیع ترکیبی سه پارامتری نمایی پواسن توانی^۲ (PEP) با توابع نرخ مخاطره صعودی، نزولی، وان شکل و تک مدی-وان شکل مطرح شده و در پایان با یک مثال کاربردی مزایای این توزیع بررسی می‌شود.

^۲ Poisson Exponential Power

۲ توزیع نمایی پواسن توانی

فرض کنید T_1, \dots, T_N نمونه‌ای تصادفی از توزیع نمایی توانی و N متغیر تصادفی پواسن بریده شده در صفر با تابع جرم احتمال

$$P(N = n; \lambda) = \frac{\lambda^n}{(e^\lambda - 1)n!}, \quad n \in \{1, 2, \dots\}, \lambda \in R^+$$

باشد. اگر متغیرهای تصادفی T و N مستقل باشند، آنگاه متغیر تصادفی جدید $X = \min\{T_1, \dots, T_N\}$ دارای تابع چگالی شرطی به صورت

$$f(x | n; \alpha, \beta) = \frac{n\beta}{\alpha} \left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta-1} e^{(\frac{x}{\alpha})^\beta} [g_{\alpha,\beta}(x)]^n, \quad x > 0$$

است، که در آن $g_{\alpha,\beta}(x) = e^{1-e^{(\frac{x}{\alpha})^\beta}}$. تابع چگالی احتمال حاشیه‌ای X به صورت

$$f_{PEP}(x; \alpha, \beta, \lambda) = \frac{\lambda\beta}{\alpha(e^\lambda - 1)} \left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta-1} e^{(\frac{x}{\alpha})^\beta} g_{\alpha,\beta}(x) e^{\lambda[g_{\alpha,\beta}(x)]}, \quad x > 0 \quad (1)$$

خواهد بود، که توزیع نمایی پواسن توانی نامیده می‌شود. وقتی $\lambda \rightarrow 0$ توزیع PEP به توزیع EP تبدیل می‌شود. زیرا

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda \rightarrow 0} f_{PEP}(x; \alpha, \beta, \lambda) &= \frac{\beta}{\alpha} \left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta-1} e^{(\frac{x}{\alpha})^\beta} g_{\alpha,\beta}(x) \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\lambda e^{\lambda[g_{\alpha,\beta}(x)]}}{e^\lambda - 1} \\ &= \frac{0}{0} : (HOP) \\ &= \frac{\beta}{\alpha} \left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta-1} e^{(\frac{x}{\alpha})^\beta} g_{\alpha,\beta}(x) \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{e^{\lambda[g_{\alpha,\beta}(x)]} + \lambda[g_{\alpha,\beta}(x)]e^{\lambda[g_{\alpha,\beta}(x)]}}{e^\lambda} \\ &= \frac{\beta}{\alpha} \left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta-1} e^{(\frac{x}{\alpha})^\beta} g_{\alpha,\beta}(x) = f_{EP}(x, \alpha, \beta), \end{aligned}$$

در این صورت به ازای $\beta > 1$ تابع چگالی تک مدی و به ازای $\beta \leq 1$ تابع چگالی نزولی است. زیرا

$$\ln(f_{EP}(x; \alpha, \beta)) = 1 + \ln\left(\frac{\beta}{\alpha}\right) + (\beta - 1) \ln\left(\frac{x}{\alpha}\right) + \left(\frac{x}{\alpha}\right)^\beta - e^{(\frac{x}{\alpha})^\beta},$$

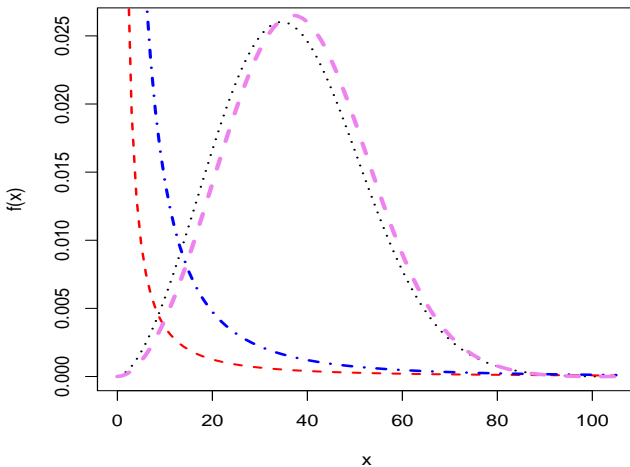
$$\frac{\partial \ln(f_{EP}(x; \alpha, \beta))}{\partial x} = \frac{\beta - 1}{x} + \frac{\beta}{\alpha} \left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta-1} (1 - e^{(\frac{x}{\alpha})^\beta}).$$

از آنجا که به ازای هر $x > 0, \alpha > 0$ و $\beta > 0$ داریم $1 - e^{(\frac{x}{\alpha})^\beta} < 0$ ، در نتیجه به ازای $\beta \leq 1$ مشتق اول لگاریتم طبیعی تابع چگالی نمایی توانی همواره منفی است،

بنابراین شکل تابع چگالی نمایی توانی نزولی است.

$$\frac{\partial^2 \ln(f_{EP}(x; \alpha, \beta))}{\partial x^2} = -\frac{\beta-1}{x^2} + \frac{\beta(\beta-1)}{\alpha^2} \left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta-2} (1 - e^{-(\frac{x}{\alpha})^\beta}) - \frac{\beta^2}{\alpha^2} \left(\frac{x}{\alpha}\right)^{2(\beta-1)} e^{-(\frac{x}{\alpha})^\beta},$$

همچنین به ازای $\beta > 1$ مشتق دوم لگاریتم طبیعی تابع چگالی نمایی توانی همواره منفی است، بنابراین شکل تابع چگالی نمایی توانی تک مدی است. وقتی $x \rightarrow \infty$ تابع چگالی به صفر میل می‌کند. شکل ۱ تابع چگالی PEP را به ازای مقادیر مختلف پارامترها نشان می‌دهد، که در آن مقادیر پارامترهای α و λ به ترتیب ۷۵ و ۵ انتخاب شده‌اند و به ازای مقادیر ۲۵٪ و ۵٪ برای پارامتر β ، شکل تابع چگالی نزولی و به ازای مقادیر ۲/۷ و ۲/۹، شکل تابع چگالی تک مدی است.



شکل ۱: نمودار تابع چگالی توزیع PEP به ازای مقادیر مختلف پارامترها

۳ ویژگی‌های توزیع PEP

تابع توزیع تجمعی PEP به صورت

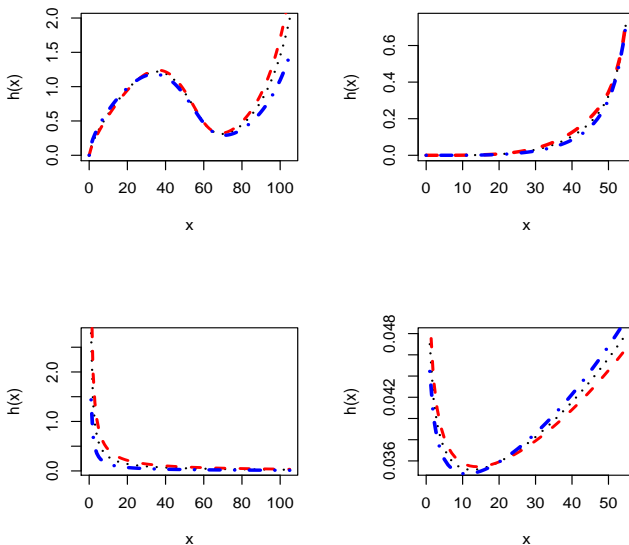
$$F_X(x; \alpha, \beta, \lambda) = (e^\lambda - 1)^{-1} (e^\lambda - e^{\lambda[g_{\alpha,\beta}(x)]}), \quad x > 0$$

و توابع بقا و مخاطره متناظر با آن به ترتیب عبارتند از

$$S_X(x; \alpha, \beta, \lambda) = (e^\lambda - 1)^{-1} (e^{\lambda[g_{\alpha,\beta}(x)]} - 1), \quad x > 0$$

$$h_X(x; \alpha, \beta, \lambda) = \frac{\lambda\beta\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta-1} e^{\left(\frac{x}{\alpha}\right)^\beta} g_{\alpha,\beta}(x)}{\alpha(1 - e^{-\lambda[g_{\alpha,\beta}(x)]})}, \quad x > 0$$

توزیع جدید دارای فرم بسته‌ای از توابع بقا و نرخ مخاطره است و با توجه به شکل ۲ برای داده‌های بقا، بسیار منعطف می‌باشد.



شکل ۲: نمودار تابع نرخ مخاطره توزیع PEP به‌ازای مقادیر مختلف پارامترها

متوسط باقیمانده طول عمر توزیع جدید به‌صورت

$$\begin{aligned} m(x_0; \theta) &= E(X - x_0 | X \geq x_0; \theta) \\ &= (e^{\lambda[g_{\alpha,\beta}(x)]} - 1)^{-1} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda^j}{j!} \int_{x_0}^{\infty} e^{-j(e^{(x/\alpha)^\beta} - 1)} dx \end{aligned}$$

حاصل می‌شود. فرض کنید $X \sim PEP(\alpha, \beta, \lambda)$ و $Y \sim PEP(\alpha, \beta, \gamma)$ به طوری که X و Y دو متغیر تصادفی مستقل باشند، تابع قابلیت به‌صورت

$$P(X < Y) = \int_0^\infty \int_0^x \frac{\lambda\beta}{\alpha(e^\lambda - 1)} \left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta-1} e^{\left(\frac{x}{\alpha}\right)^\beta} g_{\alpha,\beta}(x) e^{\lambda[g_{\alpha,\beta}(y)]}$$

$$\begin{aligned} & \times \frac{\gamma\beta}{\alpha(e^\gamma - 1)} \left(\frac{y}{\alpha}\right)^{\beta-1} e^{(\frac{y}{\alpha})^\beta} g_{\alpha,\beta}(y) e^{\gamma[g_{\alpha,\beta}(y)]} \\ & = \frac{e^\gamma}{e^\gamma - 1} - \frac{\lambda(e^{\lambda+\gamma} - 1)}{(e^\lambda - 1)(e^\gamma - 1)(\lambda + \gamma)} \end{aligned}$$

است که به پارامترهای α و β بستگی ندارد. همچنین میانه توزیع به صورت

$$m = \alpha \left[\ln \left(1 - \ln \left(\frac{\ln(\circ/\Delta(e^\lambda + 1))}{\lambda} \right) \right) \right]^{\frac{1}{\beta}}$$

به دست می آید. می توان نشان داد تابع چگالی آماره ترتیبی i -ام در نمونه تصادفی به اندازه n ، برای $i = 1, \dots, n$ به صورت

$$\begin{aligned} f_{i:n}(x; \alpha, \beta, \lambda) &= \binom{n-1}{i-1} \frac{n\lambda\beta}{\alpha(e^\lambda - 1)^n} \left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta-1} e^{(\frac{x}{\alpha})^\beta} g_{\alpha,\beta}(x) e^{\lambda[g_{\alpha,\beta}(x)]} \\ &\times (e^\lambda - e^{\lambda[g_{\alpha,\beta}(x)]})^{i-1} (e^{\lambda[g_{\alpha,\beta}(x)]} - 1)^{n-i}, \quad x > \circ \end{aligned}$$

است. اکنون فرض کنید X متغیری تصادفی با تابع چگالی احتمال (۱) و $m = \frac{r}{\beta}$ عددی صحیح باشد، آنگاه گشتاور معمولی r -ام به صورت

$$\mu'_r = \frac{\lambda\alpha^r}{(e^\lambda - 1)} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^j}{j!} (-1)^{-m} e^{j+1} E_\circ^m(j+1)$$

است، که در آن $E_\circ^m(j+1) = (-1)^m \int_1^\infty (\log(t))^m e^{-(j+1)t} dt$ ، $m = 1, 2, \dots$

۴ برآورد ماکسیمم درستنمایی پارامترها

فرض کنید X_1, \dots, X_n نمونه‌ای تصادفی با تابع چگالی احتمال (۱) و بردار پارامترهای $\theta = (\alpha, \beta, \lambda)$ باشد. در این صورت لگاریتم تابع درستنمایی به صورت

$$\begin{aligned} \ell(\theta) &= n \left(1 + \ln \frac{\lambda\beta}{\alpha(e^\lambda - 1)} \right) + (\beta - 1) \sum_{i=1}^n \ln \left(\frac{x_i}{\alpha} \right) \\ &+ \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{\alpha} \right)^\beta - \sum_{i=1}^n e^{(\frac{x_i}{\alpha})^\beta} + \lambda \sum_{i=1}^n [g_{\alpha,\beta}(x_i)] \end{aligned}$$

و مشتق‌های جزئی آن نسبت به پارامترها عبارتند از

$$\frac{\partial \ell(\theta)}{\partial \alpha} = -\frac{n\beta}{\alpha} - \frac{\beta}{\alpha} \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{\alpha} \right)^\beta + \frac{\beta}{\alpha} \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{\alpha} \right)^\beta e^{(\frac{x_i}{\alpha})^\beta}$$

$$+ \frac{\lambda\beta}{\alpha} \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{\alpha}\right)^\beta e^{\left(\frac{x_i}{\alpha}\right)^\beta} g_{\alpha,\beta}(x_i),$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ell(\theta)}{\partial \beta} &= \frac{n}{\beta} + \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{\alpha}\right)^\beta \ln\left(\frac{x_i}{\alpha}\right) - \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{\alpha}\right)^\beta \ln\left(\frac{x_i}{\alpha}\right) e^{\left(\frac{x_i}{\alpha}\right)^\beta} \\ &\quad - \lambda \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{\alpha}\right)^\beta \ln\left(\frac{x_i}{\alpha}\right) e^{\left(\frac{x_i}{\alpha}\right)^\beta} g_{\alpha,\beta}(x_i) + \sum_{i=1}^n \ln\left(\frac{x_i}{\alpha}\right), \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \ell(\theta)}{\partial \lambda} = n \left[\frac{(1-\lambda)e^\lambda - 1}{\lambda(e^\lambda - 1)} \right] + \sum_{i=1}^n g_{\alpha,\beta}(x_i),$$

چون معادلات نرمال توابعی غیرخطی از x_i ها و فرم بسته‌ای ندارند، پارامترها با روش‌های عددی توسط برنامه‌های تهیه شده با نرم‌افزار MATLAB برآورد آمده‌اند.

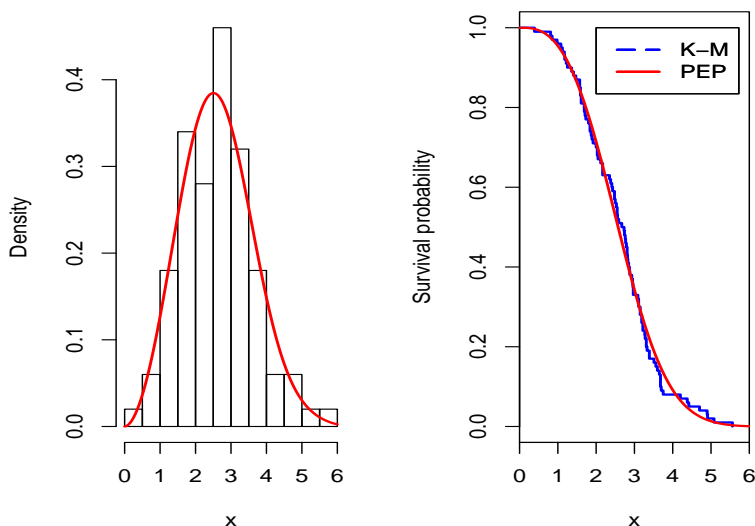
۵ مثال کاربردی

در این بخش، رفتار توزیع جدید، در مورد ۱۰۰ مشاهده روی شکست تنش فیبرهای کربنی بر حسب Gba (نیکولز و پادگت، ۲۰۰۶) مورد تحلیل قرار می‌گیرد.

جدول ۱: برآورد پارامترها و مقادیر لگاریتم درست‌نمایی، $K - S$ و p -مقدار

مدل	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\lambda}$	$\ell(\theta)$	$K - S$	p -مقدار
PEP	۴/۹۵۲	۲/۸۵۷	۴/۴۳۶	-۱۴۱/۱۸۰	۰/۰۵۹	۰/۸۵۱
WP	۰/۲۸۰	۳/۲۲۱	۱/۹۷۳	-۱۴۱/۲۵۲	۰/۰۶۴	۰/۷۹۰
GEP	۰/۰۱۵	۸/۱۱۶	۶۹/۸۲۳	-۱۴۶/۴۸۳	۰/۱۱۳	۰/۱۴۷
EW	۰/۳۷۵	۱/۳۳۰	۲/۳۹۴	-۱۴۱/۲۷۰	۰/۰۶۱	۰/۸۴۳
Wiebull	۰/۰۰۴		۲/۹۴۱	-۱۴۱/۴۸۶	۰/۰۶۰	۰/۸۵۵

جدول ۱ برآورد ماکسیمم درست‌نمایی پارامترها، مقادیر لگاریتم درست‌نمایی، آماره آزمون کولموگروف-اسمیرنوف و مقادیر معنی‌داری برازش مدل‌های نمایی پواسن توانی، وایبل-پواسن (هممتی و همکاران، ۲۰۱۱) نمایی-پواسن تعمیم‌یافته (بارتو سوزا و کریبری نتو، ۲۰۰۹)، نمایی-وایبل (مادهولکر و همکاران، ۱۹۹۵ و ۱۹۹۶) و وایبل را به داده‌های شکست تنش فیبرهای کربنی نشان می‌دهد.



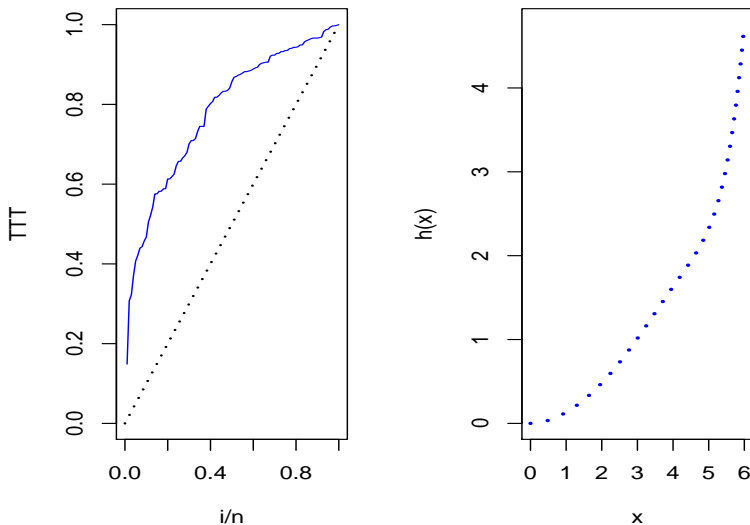
شکل ۳: نمودارهای (راست) کاپلان-مایر و تابع بقای توزیع PEP، (چپ) بافت نگار و تابع چگالی توزیع PEP

در شکل ۳ نمودار بافت نگار، برازش تابع چگالی احتمال توزیع PEP و نمودار کاپلان-مایر (خطوط شکسته) و برازش تابع بقای توزیع PEP به داده‌های شکست تنش فیبرهای کربنی رسم شده است که برازشی مناسب را نشان می‌دهد. در شکل ۴ برازش تابع نرخ مخاطره توزیع PEP (خط چین) و نمودار تجربی TTT ^۳، آراست، (۱۹۸۷)، (خطوط شکسته) به داده‌های شکست تنش فیبرهای کربنی (بر حسب Gba) رسم شده است. همان‌طور که ملاحظه می‌شود تابع نرخ مخاطره صعودی است. شکل ۵ نمودار لگاریتم درست‌نمایی نیم‌رخ توزیع جدید را در برازش به داده‌ها نشان می‌دهد. همان‌طور که ملاحظه می‌شود برآوردهای به دست آمده یکتا هستند.

بحث و نتیجه‌گیری

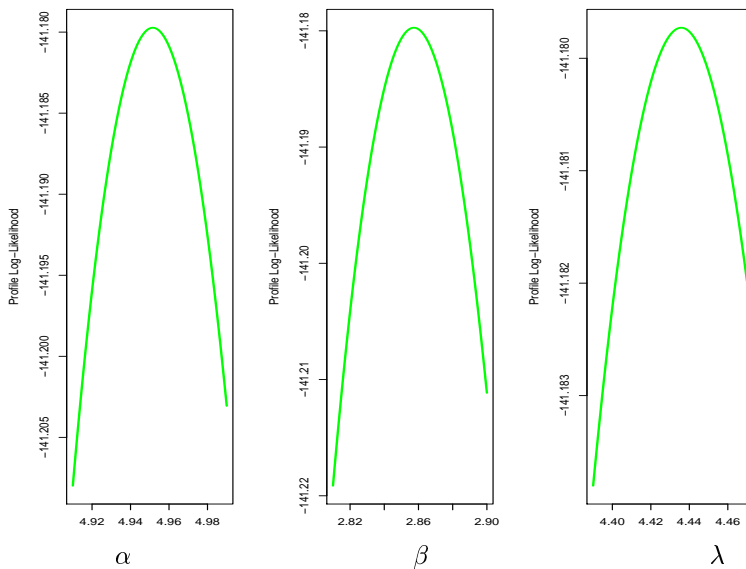
در این مقاله، ضمن معرفی توزیع ترکیبی طول عمر جدید، توزیع نمایی پواسن توانی که تعمیمی از توزیع نمایی توانی است و ویژگی‌های آن بیان شد. چون بیشتر

^۳ Total Time on Test



شکل ۴: (راست) نمودار تابع نرخ مخاطره توزیع جدید و (چپ) نمودار تجربی آراست (۱۹۸۷)

توزیع‌های ترکیبی دارای توابع مخاطره نزولی یا صعودی هستند و داده‌های با نرخ مخاطره‌های وان شکل، تک مدی یا تک مدی-وان شکل را به خوبی برازش نمی‌دهند، به معرفی توزیع ترکیبی جدید پرداخته شد. توزیع جدید دارای نرخ مخاطره‌های صعودی، نزولی، وان شکل و تک مدی-وان شکل و برای داده‌های بقا بسیار منعطف است. با توجه به جدول ۱، توزیع نمایی پواسن توانی در مقایسه با توزیع‌های ترکیبی وایبل-پواسن، نمایی-پواسن تعمیم‌یافته، نمایی-وایبل و وایبل دارای برازش بهتری به داده‌های مربوط به ۱۰۰ مشاهده روی شکست تنش فیبرهای کربنی است. با توجه به اینکه λ پارامتر مکان توزیع جدید است، مشاهده می‌شود که این توزیع به توزیع‌های ارائه شده قبلی دارای انعطاف پذیری بیشتری برای برازش به داده‌های موجود در علوم مختلف است. در ضمن گشتاورهای معمولی، تابع چگالی آماره‌های ترتیبی، متوسط باقیمانده طول عمر، تابع قابلیت، میانه، توابع نرخ مخاطره و بقا، برآوردهای ماکسیمم درست‌نمایی پارامترها و همچنین رفتار حدی و کاربرد توزیع جدید ارائه گردیده است.



شکل ۵: نمودار لگاریتم درست‌نمایی نیم‌رخ‌ی توزیع جدید

تقدیر و تشکر

نویسندگان مقاله کمال تشکر و قدردانی را از داوران، ویراستار و سردبیر محترم نشریه، که با رهنمودهای ارزنده خود باعث بهبود مقاله گردیده‌اند، دارند.

مراجع

Aarset, M. V. (1987), How to Identify a Bathtub Hazard Rate, *IEEE Transactions on Reliability*, **36**, 106-108.

Adamidis, K., Loukas, S. (1998), A Life Time Distribution with Decreasing Failure Rate, *Statistical and Probability Letters*, **39**, 35-42.

Barreto-souza, W., Cribari-Neto, F. (2009), A Generalization of the Exponential-Poisson Distribution, *Statistical and Probability Letters*, **79**, 2493-2500.

- Barriga, D. C., Louzada, F. N. and Cancho, V. G. (2011), The Complementary Exponential Power Lifetime Model, *Computational Statistics and Data Analysis*, **55**, 1250-1259.
- Cancho, V. G., Louzada-Neto, F. and Barriga, G. D. C. (2011), The Poisson Exponential Life time Distribution, *Computational Statistics and Data Analysis*, **55**, 677-686.
- Chahkandi, M. and Ganjali, M. (2009), On Some Life Time Distribution with Decreasing Failure Rate, *Computational Statistics and Data Analysis*, **53**, 4433-4440.
- Chen, Z. (1999), Statistical Inference about the Shape Parameter of the Exponential Power Distribution, *Statistical Papers*, **40**, 459-468.
- Chen, Z. (2000). A New Two-Parameter Lifetime Distribution with Bath-tub Shape or Increasing Failure Rate Function, *Statistical and Probability Letters*, **49**, 155-161.
- Flores J. D., Borges, P., Cancho, V. G. and Louzada., F. (2011), The Complementary Exponential Power Series Distribution, *The Brazilian Journal of Probability and Statistics*
- Hemmati, F., Khorram, E. and Rezakhah, S. (2011), A New Three Parameter Ageing Distribution, *Journal of Statistical of Planning and Inference*, **141**, 2266-2275.
- Kus, C. (2007), A New Life Time Distribution, *Computational Statistics and Data Analysis*, **51**, 4497-4509.
- Leemis, L. M. (1986), Lifetime Distribution Identities, *IEEE Transactions on Reliability*, **35**, 170-174.

- Mudholkar, G. S., Srivastava, D. K. and Friemer, M. (1995), The Exponential Weibull Family: A Reanalysis of the Bus-Motor-Failure Data, *Thechnometrics*, **37**, 436-445.
- Mudholkar, G. S., Srivastava, D. K. and Kollia, G.D. (1996), A Generalization of the Weibull Distribution with Application to the Analysis of Survival Data, *Journal of American Statistical and Assocation*, **91**, 1575-1583
- Nichols, M. D., padgett, W. J. (2006), A Bootstrap Control Chart for the Weibull Percentiles, *Quality an Reliability Engineering International*, **22**, 141-151.
- Rajarshi, S., Rajarshi, M. B. (1988), Bathtub Distribution: A Review, *Communications in Statistics-Theory and Methods*, **17**, 2597-2621.
- Smith, R. M., Bain, L. J. (1975), An Exponential Power Life-Testing Distribution, *Communications in Statistics-Theory and Methods*, **4**, 469-481.
- Tahmasbi, R., Rezaei, S. (2008), A Two-Parameter Lifetime Distribution with Decreasing Failure Rate, *Computational Statistics and Data Analysis*, **52**, 3889-3901.
- Xie, M., Tang, Y. and Goh, T. N. (2002), A Modified Weibull Extension with Bathub-Shape Failure Rate Function, *Reliability Engineering and System Safety*, **76**, 279-285.