مجله علوم آماری، پاییز و زمستان ۱۳۹۰
جلد ۵، شماره ۲، ص ۱۶۱–۱۷۸

تعمیم‌های توزیع‌های گسسته و ویژگی‌های آن‌ها برای اندازه اطلاع

زهرا دستمرد [۱]، غلامرضا محتشمی برزادران [۲]، باقر مقدس‌زاده بزاز [۱]
[۱] گروه آمار، دانشگاه پیام نور مشهد
[۲] گروه آمار، دانشگاه فردوسی مشهد

تاریخ دریافت: ۱۳۸۹/۱۲/۲ تاریخ آخرین بازنگری: ۱۳۹۰/۱۲/۲۵

چکیده : در این مقاله نشان داده شده است برای رده توزیع‌های گسسته با مجموعه مقادیر صحیح، وقتی میانگین و واریانس روی مقادیر اعداد صحیح با تکیه گاه R معلوم باشند، می‌توان قیاسی گسسته از توزیع نرمال را به‌وسیله آنتروپی ماکسیمم مشخصه‌سازی کرد، گشتاورها و آنتروپی‌های شانون و رنی را برای توزیع گسسته متقارن به دست آورد و نشان داد که حالت خاص این اندازه‌ها توزیع‌های نرمال و لاپلاس گسسته را نتیجه می‌دهند. آنگاه شبه اطلاع فیشر برای توزیع‌های نرمال گسسته، توزیع سری‌های توانی چندجمله‌ای، گسسته متقارن و توزیع لگاریتم دوگانه محاسبه شده‌اند. سپس شرایط تک‌مدی بودن هر یک از توزیع‌ها تعیین و گشتاورهای مرکزی و غیرمرکزی، آنتروپی و آنتروپی ماکسیمم توزیع لگاریتم دوگانه مورد بررسی قرار گرفته است.

واژه‌های کلیدی : توزیع‌های لاپلاس گسسته، چوله، سری توانی دوطرفه چندجمله‌ای، لگاریتم دوگانه، آنتروپی و اطلاع فیشر.

آدرس الکترونیک مسئول مقاله:زهرا دستمرد، zahra_dastmard@yahoo.com
کد موضوع‌بندی ریاضی (۲۰۰۰): ۶۵C۰۵

۱ مقدمه و پیش‌نیازها

چارالام‌بدیز (۱۹۷۷) تعمیم‌هایی از توزیع‌های گسسته را معرفی کرد و هاری (۲۰۰۹) آن‌ها را در کتابی با عنوان توزیع‌های گسسته تعمیم‌یافته مورد بحث و بررسی قرار داد. توزیع نرمال نخستین بار توسط آبراهام برای تقریب توزیع دوجمله‌ای برای nهای بزرگ معرفی شد و نتایج او توسط لاپلاس در کتاب آنالیز نظریه احتمال تعمیم یافت. اما اصطلاح توزیع نرمال توسط افرادی مانند چارلز پیرسن، فرانسیس گالتون و ویلهلم لگزیس در حدود سال ۱۸۷۵ به کار رفت. پس از آن لیسمن و وان زویلن (۱۹۷۲) توزیع نرمال گسسته را معرفی کرده و به دنبال آن این موضوع توسط کمپ (۱۹۹۷)، داسگوپتا (۱۹۹۳) و زابلوسکی (۲۰۰۱) پیگیری شد. کمپ (۱۹۹۷) مشخصه سازی‌هایی بر اساس توزیع نرمال گسسته انجام داد که حالت کلی‌تر کارهای داسگوپتا (۱۹۹۳) بودند. کاربردهایی از توزیع نرمال گسسته در هریس و شانکویلر (۲۰۰۱) موجود است. لاپلاس گسسته و لاپلاس گسسته چوله ارتباط نزدیکی با لاپلاس پیوسته دارند و دارای ویژگی‌های مشترک زیادی هستند (کزوبوسکی و ایناسا، ۲۰۰۴). هارتلی (۱۹۲۸) اولین فردی بود که تعاریفی از اطلاع را در مهندسی ارتباطات ارائه داد، اما بی‌شک پدر نظریه اطلاع، شانون (۱۹۴۸) است. او برای اولین بار ارتباط را به عنوان یک مسئله ریاضی در نظر گرفت و به مهندسین ارتباطات، راه تعیین ظرفیت یک کانال ارتباطی را نشان داد. آنتروپی متغیر تصادفی X با تابع چگالی یا جرم احتمال f به‌صورت

$$H(X) = E(-\log f(X)). \qquad (۱)$$

تعریف شده است. رنی (۱۹۶۱) آنتروپی مرتبه α را به‌صورت

$$H_\alpha(X) = \frac{۱}{۱-\alpha} \log \sum_{i=۱}^{k} {p_i}^{\alpha}, \quad \alpha > ۱, \quad \alpha \neq ۱,$$

تعریف کرد. به راحتی می‌توان نشان داد $\lim_{\alpha \to ۱} H_\alpha(X) = H(X)$.

اصل آنتروپی ماکسیمم به این موضوع اشاره دارد که در بین تمام توزیع‌هایی که برخی محدودیت‌ها در آن‌ها وجود دارد، باید آن توزیعی که دارای بیشترین آنتروپی

است را انتخاب کرد (ژاینز، ۱۹۵۷). این مفهوم به طور موفقیت آمیزی در بسیاری از زمینه‌ها از جمله مکانیک آماری، آمار، آنالیز بازار سرمایه گذاری و نظریه صف‌بندی کار شده است. به خوبی مشهود است که توزیع لاپلاس آنتروپی را در میان تمام توزیع‌های پیوسته روی R بامعلوم بودن $E|X|$ ماکسیمم می کند. برای اطلاعات بیشتر کاپور (۱۹۹۳) و کاگن و همکاران (۱۹۷۳) را ببنید. لیسمن و وان زویلن (۱۹۷۲) نشان دادند که در میان تمام توزیع‌های گسسته با معلوم بودن میانگین و واریانس، توزیع نرمال گسسته دارای آنتروپی ماکسیمم است.

در این مقاله ابتدا به یاد آوری توزیع لاپلاس گسسته چوله، لاپلاس گسسته متقارن و توزیع نرمال گسسته و برخی از ویژگی‌های آن ها از جمله تابع توزیع، تابع مشخصه، گشتاورها، آنتروپی شانون، آنتروپی رنی پرداخته می‌شود. آنگاه توزیع گسسته متقارن معرفی و ویژگی‌های آن را به دست آورده و نشان داده می‌شود که این نتایج، حالت کلی‌تر روابط به دست آمده برای توزیع لاپلاس گسسته متقارن و نرمال گسسته هستند. سپس با محاسبه شبه اطلاع فیشر برای توزیع‌های نرمال گسسته، توزیع سری‌های توانی چندجمله‌ای، گسسته متقارن و توزیع لگاریتم دوگانه به مطالعه شرایطی پرداخته می شود که تحت آن‌ها هر یک از این توزیع‌ها، تک مدی خواهند بود. هم‌چنین نشان داده می‌شود که توزیع سری توانی چندجمله‌ای دوطرفه تحت شرط میانگین و گشتاور فاکتوریل مرتبه kام دارای توزیع ماکسیمم آنتروپی روی Z است. در بخش پایانی، گشتاورهای مرکزی و غیرمرکزی، آنتروپی و آنتروپی ماکسیمم توزیع لگاریتم دوگانه مورد بررسی قرار می‌گیرد.

نامساوی کرامر رائو اشاره بر این دارد که واریانس هر برآوردگر نااریب T از $\tau(\theta)$ در نامساوی

$$Var_\theta(T(\underline{X})) \geq \frac{(\tau'(\theta))^{۲}}{E_\theta\{\frac{-\partial^{۲}\ln f(\underline{X}|\cdot)}{\partial\theta^{۲}}\}},$$

صدق می کند، که در آن $\tau'(\theta)$ مشتق مرتبه اول τ است و مخرج کسر اطلاع فیشر نامیده می‌شود. رائو (۱۹۵۸) قیاسی از نامساوی کرامر رائو معرفی کرد او نشان داد

$$Var_\theta(g(X)) \geq \frac{\{E(g'(X))\}^{۲}}{I^*_X},$$

که در آن g تابعی حقیقی مقدار و I_X^* به‌صورت

$$I_X^* = E\{(\frac{\partial \ln f(X|\cdot)}{\partial X})^{۲}\} = -E(\frac{\partial^{۲} \ln f(X|\cdot)}{\partial X^{۲}}),$$

است. از طرفی جانستون و مک گیبون (۱۹۸۴) قیاسی از اطلاع فیشر به‌صورت

$$I_X^* = \sum_{\{x, p_x > ۰\}} \frac{(p_x - p_{x-۱})^{۲}}{p_x},$$

معرفی کردند که در آن $p_۱ = ۰$ و $p_x = P(X = x)$ است و برای خانواده‌های مکانی همان اطلاع فیشر است. این مقادیر برای توزیع‌های معرفی شده روی اعداد صحیح بررسی می‌شود.

۲ ویژگی‌های توزیع لاپلاس گسسته چوله و لاپلاس گسسته متقارن

هر توزیع پیوسته روی R با تابع چگالی احتمال f را توسط رابطه

$$P(Y = k) = \frac{f(k)}{\sum\limits_{j=-\infty}^{\infty} f(j)}, \qquad k = ۰, \pm ۱, \pm ۲, \ldots, \qquad (۲)$$

می‌توان به یک توزیع گسسته با تکیه‌گاه $Z = \{۰, \pm ۱, \pm ۲, \ldots, \}$ تبدیل کرد. اگر به جای f مندرج در (۲)، تابع چگالی احتمال لاپلاس چوله با پارامتر مقیاس $\sigma > ۰$ و پارامتر چولگی k به فرم

$$f(x) = \frac{۱}{\sigma} \frac{k}{۱ + k^{۲}} \begin{cases} e^{-kx/\sigma} & x \geq ۰ \\ e^{x/k\sigma} & x < ۰, \end{cases}$$

قرار داده شود، یک توزیع گسسته روی Z حاصل می شود (کتز و همکاران ۲۰۰۱). در حالت متقارن ($k = ۱$) این توزیع به قیاس گسسته‌ای از توزیع لاپلاس کلاسیک تبدیل می‌شود. با توجه به اینانسا و کوزوبوسکی (۲۰۰۴) متغیر تصادفی Y دارای توزیع لاپلاس گسسته با پارامترهای $p \in (۰, ۱)$ و $q \in (۰, ۱)$ است که با $DL(p, q)$ نشان داده می شود. اگر

$$f(k\,|p, q\,) = \frac{(۱ - p)(۱ - q)}{۱ - pq} \begin{cases} p^k & k \in Z_+ = \{۰, ۱, \ldots, \} \\ q^{|k|} & k \in Z_- = \{۰, -۱, \ldots, \}, \end{cases} \qquad (۳)$$

آنگاه تابع توزیع تجمعی و تابع مشخصه Y به ترتیب به‌صورت

$$F(x\,|p,q\,) = \begin{cases} \frac{(1-p)q^{-[x]}}{1-pq}, & x < 0 \\ 1 - \frac{(1-p)p^{[x]+1}}{1-pq}, & x \geq 0 \end{cases}$$

و

$$\phi(t\,|p,q\,) = \frac{(1-p)(1-q)}{(1-e^{it}p)(1-e^{-it}q)}, \quad t \in R$$

هستند. اگر p و q به صفر میل کنند حالت خاص یکطرفه $Y \sim DL(p,0)$ و $Y \sim DL(0,q)$ به دست می‌آیند. با استفاده از (۳) داریم

$$E|Y|^n = \frac{(1-p)(1-q)}{1-pq}(\sum_{k=1}^{\infty} k^n p^k + \sum_{k=1}^{\infty} k^n q^k),$$

$$EY^n = \frac{(1-p)(1-q)}{1-pq}(\sum_{k=1}^{\infty} k^n p^k - \sum_{k=1}^{\infty} k^n q^k),$$

در حالت خاص $n = 1$،

$$EY = \frac{p-q}{(1-p)(1-q)},$$

$$E\,|Y| = \frac{q(1-p)^2 + p(1-q)^2}{(1-pq)(1-q)(1-p)},$$

و

$$VarY = \frac{1}{(1-p)^2(1-q)^2}[\frac{q(1-p)^3(1+q) + p(1-q)^3(1+p)}{1-pq} - (p-q)^2].$$

وقتی $EX = c_1 \in \Re$ و $E\,|X| = c_2 > 0$ معلوم باشند، آنتروپی (۱) بوسیله توزیع $DL(p,q)$ ماکسیمم می‌شود. وقتی $c_1 \geq 0$، آنگاه

$$q = \frac{(c_2 - c_1)(1 + c_1)}{1 + (c_2 - c_1)c_1 + \sqrt{(c_2 - c_1)(c_2 + c_1)}}, \quad p = \frac{q + c_1(1-q)}{1 + c_1(1-q)},$$

وقتی $c_1 \leq 0$، آنگاه

$$p = \frac{(c_2 + c_1)(1 + c_1)}{1 - (c_2 + c_1) + \sqrt{1 + (c_2 - c_1)(c_2 + c_1)}}, \quad q = \frac{p - c_1(1-p)}{1 - c_1(1-p)}.$$

در هر صورت

$$\max_{x\in C} H(X)=H(Y)$$
$$=-\log\frac{(۱-p)(۱-q)}{۱-pq}-\frac{(۱-p)(۱-q)}{۱-pq}\Big[\frac{p\log p}{(۱-p)^۲}+\frac{q\log q}{(۱-q)^۲}\Big].$$

اگر در توزیع (۳)، $p=q$ توزیع لاپلاس گسسته متقارن با تابع جرم احتمال

$$f(k\,|p)=\frac{۱-p}{۱+p}p^{|k|},\qquad k\in Z, \tag{۴}$$

به دست می‌آید که با $DL(p)$ نشان داده می‌شود. اگر Y توزیع لاپلاس گسسته باشد، آنگاه

$$Y\stackrel{d}{=}X_۱-X_۲,$$

که در آن $X_۱$ و $X_۲$ متغیرهای تصادفی مستقل و هم‌توزیع هندسی با پارامتر $q=۱-p$ هستند. یادآوری می‌شود که توزیع لاپلاس کلاسیک به‌صورت تفاضل دو متغیر تصادفی مستقل نمایی رخ می‌دهد. چون توزیع هندسی یک قیاس گسسته از توزیع نمایی است طبیعی است که توزیع لاپلاس گسسته به‌صورت تفاضل دو متغیر هندسی در نظر گرفته شود.

ویژگی‌های قابل مقایسه دو توزیع عبارتند از:

• یک متغیر تصادفی لاپلاس توزیعی مشابه توزیع تفاضل دو متغیر تصادفی مستقل و هم توزیع نمایی دارد. یک متغیر لاپلاس گسسته نمایشی مشابه تفاضل دو متغیر تصادفی مستقل و هم توزیع هندسی دارد.

• هر کدام از توزیع‌ها آنتروپی را در رده خودشان با معلوم بودن $E|X|$، که یا پیوسته با تکیه‌گاه R یا گسسته با تکیه گاه Z هستند، ماکسیمم می‌کند.

• هر دو توزیع متقارن و تک مدی بوده و تابع چگالی‌ها، تابع توزیع‌ها، تابع مشخصه‌ها و گشتاورهای آن‌ها دارای فرم بسته هستند.

تابع توزیع تجمعی (c.d.f) و تابع مشخصه (c.h.f) متناظر با توزیع $\mathrm{DL}(p)$ با استفاده از فرمول سری‌های هندسی به‌صورت

$$F_p(x)=P(Y\le x)=\begin{cases}\frac{p^{-[x]}}{۱+p} & x<۰\\ ۱-\frac{p^{[x]+۱}}{۱+p} & x\ge ۰,\end{cases}$$

به دست می‌آیند، که در آن $[\cdot]$ تابع جز صحیح است.

$$\phi_p(t) = Ee^{itY} = \frac{(1-p)^2}{(1-e^{it}p)\,(1-e^{-}itp)}, \quad t \in R.$$

به آسانی می‌توان دید وقتی $p \to 0^+$، آن‌گاه $X_p \sim DL(p)$ در توزیع به صفر همگراست، در حالی که وقتی $p \to 1^-$ توزیع آن نامعلوم است. اگر $Y \sim DL(p)$ آن‌گاه

$$E\,|Y|^n = 2\frac{1-p}{1+p}\sum_{k=1}^{\infty} k^n p^k, \quad n = 1, 2, \ldots$$

که با استفاده از اتحاد ترکیباتی

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^n p^k = \sum_{k=1}^{n} s(n,k)\frac{k!p^k}{(1-p)^{k+1}},$$

و

$$s(n,k) = \frac{1}{k!}\sum_{i=0}^{k-1}(-1)^i \left(\begin{array}{c} k \\ i \end{array}\right)(k-i)^n, \tag{۵}$$

به دست می‌آید. علاوه بر این، EY^n برای nهای زوج با طرف راست عبارت (۵) برابر است، و برای nهای فرد برابر صفر است. به ویژه داریم

$$EY = 0,\ VarY = \frac{2p}{(1-p)^2}$$

و

$$E\,|Y| = \frac{2p}{(1-p)(1+p)},\ Var(|Y|) = \frac{2p(1+p)^2 - 4p^2}{(1+p)^2(1-p)^2}.$$

توزیع $DL(p)$ آنتروپی را تحت برخی از شرایط در میان تمام توزیع‌های گسسته روی اعداد صحیح ماکسیمم می‌کند. با در نظر گرفتن توزیع لاپلاس گسسته و با توجه به تعریف آنتروپی و امید ریاضی توزیع نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned} H(X) &= \sum_{k\in Z} -(\log\frac{1-p}{1+p} + |k|\log p)f(k) \\ &= -\log\frac{1-p}{1+p} - \log p\frac{2p}{1-p^2}. \end{aligned}$$

با ماکسیمم کردن $H(X)$ تحت محدودیت‌های $\sum_k f(k) = ۱$ و $\sum_k |k| f(k) = a$، $E|K| =$ حال داریم $p_a = \frac{a}{۱+\sqrt{۱+a^۲}}$. با قرار دادن p_a در آنتروپی شانون، آنتروپی ماکسیمم برای متغیر لاپلاس گسسته به‌صورت

$$\max_{Y \in C} H(Y) = -\log(\frac{۱-p_a}{۱+p_a}) - \frac{۲p_a}{۱-{p_a}^۲} \log p_a.$$

به دست می‌آید که در آن C اشاره به رده توزیع‌های گسسته دارد. از طرفی آنتروپی رنی برای توزیع لاپلاس گسسته به فرم

$$\begin{aligned} H_\alpha(K) &= \frac{۱}{۱-\alpha} \log \sum {p_i}^\alpha \\ &= \frac{\alpha}{۱-\alpha} \log \frac{۱-p}{۱+p} + \frac{۱}{۱-\alpha} \log(۱ + ۲\frac{p^\alpha}{۱-p^\alpha}), \end{aligned}$$

است. هم‌چنین ماتریس اطلاع فیشر برای توزیع $\mathrm{DL}(p,q)$ به‌صورت

$$I(p,q) = \begin{bmatrix} \frac{(۱-q)(۱-qp^۲)}{p(۱-p)^۲} & -۱ \\ -۱ & \frac{(۱-p)(۱-pq^۲)}{q(۱-q)^۲} \end{bmatrix},$$

است. اطلاع فیشر و شبه اطلاع فیشر برای توزیع لاپلاس گسسته متقارن عبارتند از

$$I_K(p) = \frac{۲(۱+p^۲)}{p(۱-p)^۲(۱+p)^۲}, \quad I^*(p) = \frac{(۱-p)^۲}{p}.$$

که در آن $I_K(p)$ تابعی صعودی برای $p > ۰/۵۱۱$ و $I^*(p)$ برای $p < ۰/۷۲۱$ تابعی صعودی است.

۳ توزیع نرمال گسسته

یک دیدگاه به منظور تعریف متغیر نرمال گسسته Y به‌صورت

$$P(Y=j) = P(j - ۱/۲ < X \le j + ۱/۲), \quad j \in Z,$$

است، که در آن X دارای توزیع نرمال پیوسته است. اما عبارت بالا واضح نیست. یک تقریب دیگر می‌تواند به‌صورت

$$p_r \sim e^{-\frac{r^۲}{۲}} \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}}, \; r \in Z$$

باشد، که در آن $\frac{p_r}{p_{r-1}} = e^{\frac{1}{2}-r}$. هم‌چنین توزیع نرمال گسسته به عنوان توزیع تفاضل $X_1 - X_2$ مشخصه‌سازی می‌شود، که در آن X_1 و X_2 مستقل و دارای توزیع به‌صورت

$$P(X_1 = i) = p_0^* \frac{\lambda^i q^{\frac{i(i-1)}{2}}}{(1-q)(1-q^2)\dots(1-q^i)},$$
$$P(X_2 = j) = p_0^o \frac{(q/\lambda) q^{\frac{j(j-1)}{2}}}{(1-q)(1-q^2)\dots(1-q^j)}$$

هستند، که در آن $i, j = 0, 1, \dots$، $\lambda > 0$ و $0 < q < 1$. مدل به دست آمده توسط کمپ (۱۹۹۷) عبارت است از

$$f(x) = \frac{\lambda^x q^{\frac{x(x-1)}{2}}}{\sum_{x \in Z} \lambda^x q^{\frac{x(x-1)}{2}}}, \quad x \in Z,\ \lambda > 0,\ 0 < q < 1,$$

نتایج داسگوپتا (۱۹۹۳) با قرار دادن $\lambda = \sqrt{q}$ به دست می‌آید. اگر $\lambda = q^{\frac{1}{2}-\alpha}$ آنگاه

$$f(x) = \frac{q^{\frac{(x-\alpha)^2}{2}}}{\sum_{x \in Z} q^{\frac{(x-\alpha)^2}{2}}}, \quad x \in Z,\ \alpha \in R,\ 0 < q < 1.$$

با توجه به برابری‌ها و تعاریف ذکر شده در عبارات

$$\sum_{x \in Z} q^{\frac{(x-\alpha)^2}{2}} I(\alpha, q), \quad J(q) = \sqrt{\frac{2\pi}{\ln q - 1}},$$
$$U(\alpha, q) = 1 + 2 \sum_{k \geq 1} \exp\left\{\frac{2\pi^2 k^2}{\ln q - 1}\right\} \cos(2\pi k \alpha),$$

زابلوسکی (۲۰۰۱) نشان داد $J(q)U(\alpha, q) = I(\alpha, q)$. حال تحت محدودیت‌های

$$\mu = E[X] = \frac{\sum_{x=-\infty}^{\infty} x \lambda^x q^{x(x-1)/2}}{\sum_{x=-\infty}^{\infty} \lambda^x q^{x(x-1)/2}},$$
$$\sigma^2 = E[(X-\mu)^2] = \frac{\sum_{x=-\infty}^{\infty} x^2 \lambda^x q^{x(x-1)/2}}{\sum_{x=-\infty}^{\infty} \lambda^x q^{x(x-1)/2}} - \mu^2,$$

توزیع نرمال گسسته به عنوان توزیع آنتروپی ماکسیمم شناخته می‌شود. برای این منظور تابع لاگرانژ به‌صورت

$$L(p, c_۱, c_۲, c_۳) = - \sum_{x=-\infty}^{\infty} p_x \ln p_x - c_۱[\sum_{x=-\infty}^{\infty} p_x - ۱] - c_۲[\sum_{x=-\infty}^{\infty} x p_x - \mu] - c_۳[\sum_{x=-\infty}^{\infty} (x-\mu)^۲ p_x - \mu],$$

است و با مشتق‌گیری از آن نسبت به p_x داریم $p_x = A\lambda^x q^{x(x-۱)/۲}$، که در آن

$$\lambda = e^{۲c_۳\mu - c_۲ - c_۳}, \quad q = e^{-۲c_۳}, \quad A = e^{-۱-c_۱-c_۲\mu} = \frac{۱}{\sum_{x=-\infty}^{\infty} \lambda^x q^{x(x-۱)/۲}},$$

از طرفی نسبت $\frac{p_{x+۱}}{p_x} = \lambda q^x$ یک تابع نزولی بر حسب x است. پس توزیع وقتی دارای یک مد در x است که $\lambda q^x < ۱ < \lambda q^{x-۱}$ و وقتی $\lambda q^x < ۱ = \lambda q^{x-۱}$ توزیع دارای دو مد در $x - ۱$ و x است. هم‌چنین چون $\frac{p_{x+۲}p_x}{p_{x+۱}^۲} = q < ۱$، پس توزیع نرمال گسسته همانند توزیع نرمال پیوسته لگ مقعر است.

در مدل کمپ (۱۹۹۷) با قرار دادن $A(\lambda, q) = \sum_{x\in Z} \lambda^x q^{x(x-۱)/۲}$، ماتریس اطلاع فیشر برای این توزیع به‌صورت زیر خواهد شد.

$$I = \begin{bmatrix} \frac{Var(X)}{\lambda^۲} & ۰ \\ ۰ & \frac{Var(X(X-۱))}{۴q^۲} \end{bmatrix},$$

۴ توزیع گسسته متقارن

مساله تقارن در توزیع‌های گسسته و پیوسته حائز اهمیت خاصی است، در این رابطه توزیع گسسته

$$f(k) = \frac{۱}{۱ + ۲S(p)} p^{|k|^m}, \; k \in Z, \qquad S(p) = \sum_{k=۱}^{\infty} p^{|k|^m}, \; m = ۱, ۲, \ldots, \quad (۶)$$

را توزیع گسسته متقارن می نامند. به ازای $m = ۱$ ، توزیع (۴) و به ازای $m = ۲$، توزیع نرمال گسسته با $\lambda = \sqrt{q}$ حاصل می‌شود. اکنون با استفاده از مشتق‌گیری،

فرمول کلی گشتاور مرتبه m این توزیع را به دست می‌آوریم. برای تابع احتمال (۶) چون $\sum_{k} f(k) = ۱$ در نتیجه $\sum_{k\in Z} p^{|k|^m} = ۱ + ۲S(p)$ با مشتق‌گیری از طرفین عبارت نسبت به p، $\sum_{k\in Z} |k|^m p^{|k|^m} = ۲pS'(p)$ و اگر عمل مشتق‌گیری j بار تکرار شود و طرفین بر $۱ + ۲S(p)$ تقسیم شوند داریم

$$\frac{\sum_{k\in Z} |k|^m[|k|^m - ۱]\ldots[|k|^m - j + ۱]p^{|k|^m} - j}{۱ + ۲S(p)} = \frac{۲p^j S^{(j)}(p)}{۱ + ۲S(p)}, \qquad (۷)$$

که در آن $S^{(j)}$ نشان‌دهنده مشتق مرتبه j است. چون سمت چپ عبارت (۷) امید ریاضی $|Y|_j^m$ است، در نتیجه $E(|Y|_j^m) = \frac{۲p^j S^{(j)}(p)}{۱+۲S(p)}$. به ازای $j = ۱$ گشتاور مرتبه mام حاصل می‌شود:

$$E(|Y|^m) = \frac{۲pS'(p)}{۱ + ۲S(p)},$$

و به ازای $j = ۲$،

$$E(|Y|^{۲m}) = \frac{۲p^۲ S''(p)}{۱ + ۲S(p)} + \frac{۲pS'(p)}{۱ + ۲S(p)} = \frac{۲p(S'(p) + pS''(p))}{۱ + ۲S(p)},$$

بنابراین

$$Var(|Y|^m) = \frac{۲p(S'(p) + pS''(p))}{۱ + ۲S(p)} - (\frac{۲pS'(p)}{۱ + ۲S(p)})^۲,$$

در صورتی که در امید ریاضی و واریانس به دست آمده به ترتیب $m = ۱$ و $m = ۲$ قرار داده شوند جواب‌های حاصل منطبق بر نتایج به دست آمده به روش مستقیم در حالت توزیع لاپلاس گسسته و نرمال گسسته خواهند بود.

قابل توجه است که نسبت $\frac{f(k+۱)}{f(k)} = q^{|k+۱|^m - |k|^m}$ برای $k < ۰$ صعودی است و از این رو برای اینکه تابع $f(k)$ دارای مد باشد باید: $\frac{f(k)}{f(k-۱)} > ۱$ و $\frac{f(k)}{f(k+۱)} > ۱$، یعنی $q^{|k|^m - |k-۱|^m} > ۱ > q^{|k+۱|^m - |k|^m}$. همچنین اطلاع فیشر عبارتست از

$$I_X(q) = \frac{۱}{q^۲} Var(|X|^m) = \frac{۲qS'(q)}{(۱ + ۲S(q))^۲} + ۲q[S'(q) + qS''(q)].$$

با قرار دادن $m = ۱$ و $m = ۲$ در آنتروپی شانون

$$\begin{aligned} H(X) &= E(\log(۱ + ۲S(p)) - |k|^m \ln p) f(k) \\ &= \log(۱ + ۲S(p)) - \ln p \frac{۲pS'(p)}{۱ + ۲S(p)}, \end{aligned}$$

به‌ترتیب آنتروپی توزیع لاپلاس گسسته و آنتروپی توزیع نرمال گسسته حاصل می‌شود که منطبق بر آنتروپی حاصل از روش مستقیم است. همچنین آنتروپی رنی توزیع گسسته متقارن عبارتست از

$$H_\alpha(K) = \frac{-\alpha}{1-\alpha}\log(1+2S(p)) + \frac{1}{1-\alpha}\log\sum_{k=1}^{\infty} p^{|k|^{m\alpha}},$$

که اگر در آن مقدار m برابر ۱ یا ۲ اختیار شود آنتروپی رنی توزیع لاپلاس گسسته و نرمال گسسته به دست خواهد آمد. برای به دست آوردن توزیع آنتروپی ماکسیمم تحت محدودیت‌های

$$p_k = p_{-k} \geq 0 \;\; k \in Z, \quad \sum p_k = 1, \; \sum |k|^m p_k = \sigma^2, \tag{8}$$

تابع لاگرانژ

$$L(p,a,b) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} p_k \log p_k + a(\sum_{k=-\infty}^{\infty} p_k - 1) + b(\sum_{k=-\infty}^{\infty} |k|^m q_k - \sigma^2),$$

را تشکیل داده و با مشتق‌گیری نسبت به p_k داریم

$$p_k = e^{a-1}\left(e^b\right)^{|k|^m}, \; k \in Z,$$

از طرفی بنابه تقارن توزیع

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} p_k = p_0 + 2\sum_{k=-\infty}^{\infty} p_k = e^{a-1}(1 + 2\sum_{k=-\infty}^{\infty} (e^b)^{|k|^m}) = 1,$$

فرض کنید $q = e^b < 1$ از این رو $S(q) = \sum_{k=1}^{\infty} q^{|k|^m} < \infty$ و $qS'(q) = \sum_{k=1}^{\infty} |k|\, q^{|k|^m}$ پس $e^{1-a} = 1 + 2S(q)$ از طرفی

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |k|^m p_k = 2\sum_{k=1}^{\infty} |k|^m p_k = 2e^{a-1} qS'(q) = \sigma^2,$$

برای σ داده شده و $m > 1$ می‌توان q را با روش‌های عددی محاسبه کرد. برای تعیین توزیع ماکسیمم رنی، تابع لاگرانژ را تحت محدودیت‌های (۸) به‌صورت

$$\frac{1}{1-\alpha}\log\sum_{k=-\infty}^{\infty} p_k^\alpha - \alpha(\sum_{k=-\infty}^{\infty} p_k - 1) - b(\sum_{k=-\infty}^{\infty} |k|^m p_k - \sigma^2),$$

تشکیل داده و با مشتق‌گیری نسبت به p_k داریم $a = \frac{\alpha}{1-\alpha} - b\sigma^2$. بنابراین

$$p_k = (\sum p_k^{\alpha})^{\frac{1}{1-\alpha}}\{1 - b(\frac{1-\alpha}{\alpha})[|k|^m + \sigma^2]\}^{\frac{1}{1-\alpha}},$$

با توجه به دومین محدودیت

$$(\sum p_k^{\alpha})^{\frac{1}{1-\alpha}}[1 - b(\frac{1-\alpha}{\alpha})\sigma^2]^{\frac{1}{1-\alpha}} + 2(1-b)(\frac{1-\alpha}{\alpha})^{\frac{1}{1-\alpha}}\sum_{k=1}^{\infty}[k^m + \sigma^2]^{\frac{1}{1-\alpha}} = 1,$$

که با روش‌های عددی، برای $m > 1$ می‌توان به دست آورد.

۵ توزیع سری‌های توانی چندجمله‌ای دوطرفه

در این بخش گشتاورها و آنتروپی توزیع سری‌های توانی چندجمله‌ای دوطرفه را محاسبه می‌کنیم و سپس شرایطی را پیدا می‌کنیم که تحت آن‌ها این توزیع دارای مد باشد. تابع جرم احتمال متغیر تصادفی X به‌صورت

$$p_x = c(\lambda, q)\lambda^x q x(x-1)\ldots(x-k+1)/k,\ k \in Z,\ \lambda > 0,\ 0 < q < 1,$$

را در نظر بگیرید، که در آن k زوج و

$$\frac{1}{c(\lambda, q)} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \lambda^j q^{j(j-1)\ldots(j-k+1)}/k,$$

در این حالت $p_{x+1} = \lambda q^{x(x-1)\ldots(x-k+2)} p_x$، که به ازای $k = 4$، توزیع گسسته چهارتایی و به ازای $k = 2$، توزیع نرمال گسسته است (محتشمی برزادران، ۲۰۰۱).
برای به دست آوردن گشتاورهای توزیع با مشتق‌گیری از

$$\sum_{x \in Z} \lambda^x q^{x(x-1)\ldots(x-k+1)/k} = \frac{1}{c(\lambda, q)},$$

نسبت به λ و q داریم

$$E(X) = -\lambda \frac{\frac{\partial c(\lambda,q)}{\partial \lambda}}{c(\lambda, q)},$$

$$E[X(X-1)\ldots(X-k+1)] = -k\frac{\frac{\partial c(\lambda,q)}{\partial q}}{c(\lambda, q)},$$

حال آنتروپی توزیع سری توانی چندجمله‌ای عبارت است از

$$H(X) = \log c(\lambda, q) \sum f_X + \log \lambda E(X) + \frac{\log q}{k} E[X(X-1)\dots(X-k+1)]$$

که با قرار دادن مقادیر $E(X)$ و $E[X(X-1)\dots(X-k+1)]$ آنتروپی شانون توزیع حاصل می‌شود. از طرفی خانواده سری توانی چند جمله‌ای دو طرفه به عنوان چگالی احتمالی آنتروپی ماکسیمم تحت محدودیت‌های $E(X) = \mu$ و $E(X(X-1)\dots(X-k+1)) = \alpha_k$ مشخصه‌سازی می‌شود، که در آن k زوج و $X \in Z$. حال با مشتق‌گیری از تابع لاگرانژ

$$\begin{aligned} L(q, \lambda, a, b, c) &= -\sum_{x \in Z} p_x \log p_x + a(\sum_{x \in Z} p_x - 1) + b(\sum_{x \in Z} x p_x - \mu) \\ &+ c(\sum_{x \in Z} x(x-1)\dots(x-k+1) p_x - \alpha_k), \end{aligned}$$

نسبت به p_x داریم

$$a = 1 - \log c(\lambda), \quad b = \log \frac{1}{\lambda}, \quad c = \frac{1}{k} \log \frac{1}{q},$$

عبارت $\frac{f(x+1)}{f(x)} = \lambda q^{x(x-1)(x-2)\dots(x-k+2)}$ یک تابع نزولی بر حسب x است و برای اینکه توزیع دارای مد باشد باید $\frac{f(x+1)}{f(x)} < 1$ و $\frac{f(x)}{f(x-1)} > 1$ باشد، یعنی

$$\lambda q^{x(x-1)(x-2)\dots(x-k+2)} < 1 < \lambda q^{(x-1)(x-2)\dots(x-k+1)},$$

هم‌چنین ماتریس اطلاع فیشر و شبه اطلاع فیشر عبارتند از

$$I = \begin{bmatrix} \frac{Var(X)}{\lambda^2} & 0 \\ 0 & \frac{Var(X_k)}{k^2 q^2} \end{bmatrix}, \quad I^*(p) = \frac{1 - \lambda q}{\lambda q}.$$

۶ توزیع لگاریتم دوگانه

توزیعی دیگر با تکیه‌گاه Z، توزیع لگاریتم دوگانه با تابع جرم احتمال

$$f(k) = \frac{1}{-2 \ln(1-p)} \frac{p^{|k|}}{|k|}, \qquad k \in Z - \{0\},$$

است، که گشتاور فاکتوریل مرتبه nام، تابع مولد گشتاور و تابع مولد احتمال آن به ترتیب عبارتند از

$$E\,|K|^n = \sum_{k\in Z-\{0\}} |k|^n \frac{1}{-2\ln(1-p)} \frac{p^{|k|}}{|k|} = \frac{-1}{\ln(1-p)} \sum_{k=1}^{n-1} k!S(n-1,k),$$

$$M_K(t) = E(e^{tK}) = \frac{-1}{2\ln(1-p)} \sum_k e^{tk} \frac{p^{|k|}}{|k|} = \frac{\ln(1-pe^t)}{\ln(1-p)},$$

$$\psi_K(t) = E(t^K) = \frac{-1}{2\ln(1-p)} \sum_k t^k \frac{p^{|k|}}{|k|} = \frac{\ln(1-pt)}{\ln(1-p)}.$$

بنابراین

$$E|K| = \frac{1}{\ln(1-p)} \frac{p}{1-p},$$

$$Var(K) = \frac{1}{(\ln(1-p))^2} \frac{p^2}{(1-p)^2}.$$

از طرفی نسبت $\frac{f(k+1)}{f(k)}$ یک تابع نزولی بر حسب p است. لذا در صورتی این توزیع دارای مد است که

$$\frac{f(k)}{f(k+1)} < 1 < \frac{f(k)}{f(k-1)},$$

یعنی

$$|\frac{k+1}{k}|p^{|k|-|k+1|} < 1 < |\frac{k-1}{k}|p^{|k|-|k-1|},$$

اکنون اطلاع فیشر و قیاسی از اطلاع فیشر به ترتیب عبارتند از

$$I_p(K) = \frac{-1-\ln(1-p)}{(1-p)^2} - \frac{1}{p(1-p)\ln(1-p)},$$

$$I_K^* = \frac{-p(\frac{p^2}{4}-p+1)}{2ln(1-p)} + 4 + \ln p.$$

از آن جا که $\sum_k f(k) = 1$، $\sum_k |k|\, f(k) = E\,|k|$ و $\sum_k \log|k|\, f(k) = E\log|k|$ آنتروپی این توزیع عبارتست از

$$\begin{aligned} H(X) &= -\log(2\ln(1-p)) \sum_k f(k) + \log p \sum_k |k|\, f(k) - \sum_k \log|k|\, f(k) \\ &= \log \frac{1}{2\ln(1-p)} + \frac{p\log p}{(1-p)\ln(1-p)} - \frac{1}{2(1-p)\ln(1-p)}. \end{aligned}$$

بحث و نتیجه‌گیری

در این مقاله ویژگی‌های توزیع‌های لاپلاس چوله گسسته، لاپلاس متقارن گسسته و نرمال گسسته بررسی شدند. سپس توزیع گسسته متقارن را به عنوان فرم کلی این توزیع‌ها معرفی نموده و نشان داده شد که ویژگی‌های این توزیع حالت کلی‌تر نتایج به دست آمده برای توزیع لاپلاس گسسته متقارن ($m = ۱$) و نرمال گسسته ($m = ۲$) هستند. هم‌چنین نشان داده شد توزیع سری توانی چندجمله‌ای دوطرفه تحت شرط میانگین و گشتاور فاکتوریل مرتبه kام دارای توزیع آنتروپی ماکسیمم روی Z است که حالت خاص آن نیز می تواند مورد توجه باشد. در نهایت توزیع لگاریتم نمایی دوگانه و برخی ویژگی‌های آن مانند گشتاورهای مرکزی وغیر مرکزی، آنتروپی و آنتروپی ماکسسیم معرفی شدند.

تقدیر و تشکر

نویسندگان مقاله از نظرات و پیشنهادات داوران محترم که در بهبود کیفیت مقاله تاثیر به سزایی داشته است و همچنین از حمایت قطب علمی داده‌های ترتیبی و فضایی دانشگاه فردوسی مشهد تقدیر و تشکر می‌نمایند.

مراجع

Chralambides, Ch. A. (1977), On the Generalized Discrete Distributions and the Bell Polynomials, *Sankhya: The Indian Journal of Statistics*, Series B, **39**, No. 1, 36-44.

Dasgupta, R. (1993), Cauchy Equation on Discrete Domain Characterization Theorems, *Theory of Probability and its Applications*, **38**, 520-524.

Harris, T. R. and Shonkwiler, J. S. (2001), Application of Discrete Normal Distribution for Dynamic Rural Retial Sector Analysis, *Selected Paper at AAEA Meeting*, Chicago Illinois.

Harry, H. P. (2009), Generalized Discrete Distributions, *John Wiley & Sons*

Hartley, R. V. L. (1928), Transmission of Information, *Bell System Technical Journal*, **1**, 535-563.

Inusah, S. and Kozobowski, T. J. (2004), A Discrete Analogue of the Laplace Distribution, *Journal of Statistical Planning Inference*, **136**, 1090-1102.

Jonstone, I. and MacGibbon, B. (1984), An Information Measure for Poisson Characterization, *Mathematical Science Research Institute*, 74-83, Berkeley, California.

Jaynes, E. T. (1957), Information Theory and Statistical Mechanics, *Physical Review.* **106**, 620-630.

Kagan, A. M., Linnik, Y. V. and Rao, C. R. (1973), Characterization Problems in Mathematical Statistics, Wiley, New York.

Kapur, J. N. (1993), Maximum-Entropy Models in Science and Engineering, *Revised Edition.* Wiley, New York.

Kemp, A. W. (1997), Characterizations of a Discrete Normal Distribution, *Journal of Statistical Planning Inference*, **63**, 223-229.

Kotz, S., Kozubowski, T. J. and Podgorski, K. (2001), The Laplace Distribution and Generalizations: A Revisit with Applications to Communications, Economics, Engineering, and Finance,*Birkhauser*, Boston.

Kozubowski, T. J. and Inusah S. (2004), A Skew Laplace Distributions on Integer, *Technical Report*, **64** Department of Mathematics, University of Nevada RENO.

Lisman, J. H. C. and van Zuylen, M. C. A. (1972), Note on the Generation of Most Probable Frequency Distributions, *Statisica Neerlandica*, **26**, 19-23.

Mohtashami Borzadaran, G. R. (2001), Characterization of Pearsonian and Bilateral Power Series Distributions via Maximum Entropies, *Bayesian Infrence and Maximum Entropy Method in Science and Engineering*, 145-150.

Rao, B. R. (1958), On an Analogue of Cramer-Rao Inequality, *Skand Aktuar*, **41**, 57-67.

Renyi, A. (1961), On Measuers of Entropy and Information, Proceeding of the Fourth Berkely Symopsium, UC Press, Berkely, **1**, 561-574.

Shannon, C. E. (1948), A Mathematical Theory of Communication, *Bell System Technical Journal*, **27**, 370-426.

Szablowski, P. J. (2001), Discrete Normal Distribution and its Relationship with Jacobi Theta Function, *Statistics and Probability Letters*, **52**, 289-299.