مجله علوم آماری، پاییز و زمستان ۱۳۹۰
جلد ۵، شماره ۲، ص ۲۰۳-۲۱۷

رهیافتی برای تعیین برآوردگرهای هم‌وردا

مهدی شمس، مهدی عمادی، ناصررضا ارقامی
گروه آمار، دانشگاه فردوسی مشهد

تاریخ دریافت: ۱۳۹۰/۸/۲ تاریخ آخرین بازنگری: ۱۳۹۰/۱۲/۲۲

چکیده : در این مقاله ردهٔ تمام توابع هم‌وردا مشخص می‌شود و دو شرط برای اثبات وجود برآوردگرهای هم‌وردا ارائه می‌گردد. روش لهمن که ردهٔ تمام توابع هم‌وردا را در خانواده مکان و مقیاس برحسب یک تابع هم‌وردای داده شده و یک تابع ناوردا بیان شده است برای گروهی دلخواه تعمیم داده می‌شود. این روش تعمیم یافته کاربردهایی در ریاضی دارد، اما برای این که در آمار مفید باشد با یک تابع مناسب ترکیب می‌شود تا یک برآوردگر هم‌وردا ساخته شود. این روش برای گروه‌های به طور یکتا انتقالی مورد استفاده قرار می‌گیرد، اما خوشبختانه اکثر مثال‌های آماری به این فرم است و برای گروه‌های دیگر برآوردگر هم‌وردا به‌طور مستقیم به دست آورده می‌شود.

واژه‌های کلیدی : گروه‌های توپولوژیکی، عمل گروه، فضای همگن، به طور یکتا انتقالی بودن، ناوردایی، هم‌وردایی، تک‌وردایی.

آدرس الکترونیک مسئول مقاله: مهدی شمس، shams.mehdi@gmail.com
کد موضوع‌بندی ریاضی (۲۰۱۰): ۵۴H۱۱ و ۶۲F۱۰

۱ مقدمه

چون تصمیم‌های آماری نباید تحت گروه تبدیل‌ها روی داده‌ها تغییر کنند نظریه ناوردایی[۱] شکل گرفت. توابع هموردا[۲] برای پارامتر مکان و مقیاس به پیتمن (۱۹۳۸) بر می‌گردد و اولین تعمیم کلی آن توسط پساکف (۱۹۵۰) و کیفر (۱۹۵۷) مطرح شد. همچنین هال و همکاران نظریه ناوردایی را توسعه دادند. در این مقاله (۱۹۶۵) با استفاده از گروه‌های توپولوژیکی ردهٔ تمام توابع هموردا پیدا می‌شود سپس به برآوردگرهای هموردا گسترش داده خواهد شد. لهمن و کسلا (۱۹۸۳) برای خانواده مکان و مقیاس این رده را پیدا کردند. در اینجا روش آن‌ها برای هر گروه دلخواه گسترش داده می‌شود. محدودیت برآوردگر بودن باعث می‌شود که مجموعه پایان یک گروه نباشد و این تنها دلیلی می‌باشد که لهمن و کسلا (۱۹۹۸) توانستند تنها برای گروه‌های جمعی و ضربی که در حقیقت در مدل‌های آماری با پارامتر مکان و مقیاس مورد استفاده قرار می‌گیرند، ردهٔ برآوردگرهای G-هموردا را پیدا کنند. در این مقاله محدودیت برداشته می‌شود و در حالت کلی برای یک گروه دلخواه روش ساختن توابع G-هموردا مطرح شده و سپس با ترکیب یک همریختی G-همورددای مناسب با این توابع، رده برآوردگرهای G-هموردا مشخص خواهد شد.

تعریف ۱ (فولند، ۱۹۹۵): گروه توپولوژیکی[۳] یک گروه مثل G به همراه یک توپولوژی روی مجموعهٔ G است، به طوری که تابع $(g_1, g_2) \longmapsto g_1{}^{-1}g_2$ از $G \times G$ به G پیوسته باشد.

گروه جمعی $(R, +)$ و $(R^+, \times)$ مثال‌های ساده‌ای از گروه‌های توپولوژیکی هستند.

تعریف ۲ (دیتمار و اچترهوف، ۲۰۰۹): گروه توپولوژیکی G روی فضای X عمل می‌کند اگر تابع $(g, x) \longmapsto gx$ از $G \times X$ به X در شرایط $g_1(g_2x) = (g_1g_2)x$ و

[۱] Invarince

[۲] Equivariant

[۳] Topological group

$ex = x$ به ازای هر $g_۱, g_۲ \in G$ و $x \in X$ صدق کند، که در آن e عضو همانی گروه G است. در این حالت X را G-فضا[۴] می‌نامند.

تعریف ۳ (بردون، ۱۹۷۲): اگر X یک G-فضا و $x \in X$، آنگاه $Gx = \{gx : g \in G\}$ مدار[۵] G در x و $G_x = \{g : gx = x\}$ پایدارساز[۶] G در x نامیده‌می‌شود.

تعریف ۴ (ایتون، ۱۹۸۳): اگر G و H دو گروه باشند، تابع $\psi : G \to H$ همریختی[۷] نامیده می‌شود هرگاه برای هر $g_۱, g_۲ \in G$، $\psi(g_۱ g_۲) = \psi(g_۱)\psi(g_۲)$. همچنین H تصویر همریخت G [۸] نام دارد و با نماد $\overline{G} = H$ نشان داده می‌شود. در این حالت $\overline{g_۱ g_۲} = \overline{g_۱}\ \overline{g_۲}$ و $\overline{g^{-۱}} = \overline{g}^{-۱}$. همچنین اگر e عضو همانی در G باشد، $\overline{e}$ عضو همانی در $\overline{G}$ خواهد بود. همریختی یک به یک و پوشا یکریختی[۹] نامیده می‌شود.

تعریف ۵ (بردون، ۱۹۷۲): اگر X یک G-فضا باشد، عمل G روی X آزاد[۱۰] نامیده می‌شود، هرگاه برای هر $x \in X$، $G_x = \{e\}$ و آن را انتقالی[۱۱] نامند هرگاه برای یک (و بنابراین برای تمام) $x \in X$، $X = Gx$.

در حالت اخیر X یک فضای همگن[۱۲] برای G است و برای هر $x, x' \in X$ یک $g \in G$ وجود دارد به طوری که $x' = gx$. اگر این g یکتا باشد G به طور یکتا انتقالی[۱۳] نامیده می‌شود.

اگر $\sigma(X)$ و $\sigma(Y)$ به ترتیب دو σ-جبر روی دو فضای X و Y باشند، زوج‌های $(X, \sigma(X))$ و $(Y, \sigma(Y))$ فضای اندازه‌پذیر هستند و تابع $f : X \to Y$ اندازه‌پذیر

[۴] G-space
[۵] Orbit
[۶] Stabilizer
[۷] Homomorphism
[۸] Homomorphic image
[۹] Isomorphism
[۱۰] Free
[۱۱] Transitive
[۱۲] Homogeneous space
[۱۳] Sharply transitive

است هرگاه برای هر $A \in \sigma(Y)$، $f^{-1}(A) \in \sigma(X)$ (فولند، ۱۹۹۹). در این مقاله چند تابع اندازه‌پذیر که در ذیل تعریف شده‌اند مورد نیاز هستند.

تعریف ۶ (لهمن و رومانو، ۲۰۰۵): فرض کنید X و Y دو G-فضا و $f : X \to Y$ تابعی اندازه‌پذیر باشد در این صورت:

۱) f یک تابع G-هموردا[۱۴] است اگر برای هر $g \in G$ و $x \in X$، $f(gx) = gf(x)$.

۲) f یک تابع G-ناوردا[۱۵] است اگر برای هر $g \in G$ و $x \in X$، $f(gx) = f(x)$.

۳) تابع G-ناوردای f ناوردای ماکسیمال[۱۶] است اگر $f(x_1) = f(x_2)$ نتیجه دهد برای یک $g \in G$، $x_2 = gx_1$.

۴) f تک‌وردا[۱۷] است اگر برای هر $x \in X$، $G_x = G_{f(x)}$.

توجه شود که عمل G روی دو فضای X و Y می تواند متفاوت باشد. همچنین یک تابع ناوردا روی هر مدار ثابت است و یک تابع ناوردای ماکسیمال علاوه برآن برای هر مدار مقدار متفاوتی را اختیار می کند. در متن‌های آماری G را ردهٔ تبدیلات یک به یک و پوشا روی X در نظر می‌گیرند به طوری که برای هر $g_1, g_2 \in G$، $g_1 \circ g_2 \in G$ و $g_1^{-1} \in G$. در این حالت تابع هموردای $f : X \to Y$ برای هر $g \in G$ و $x \in X$ در شرط $f(g(x)) = \overline{g}(f(x))$ صدق می‌کند. این مفهوم با آن چه در تعریف ۶ بیان شد یکسان است، ولی دو دیدگاه متفاوت است. به طور واضح‌تر در متن‌های آماری اکثراً با دو گروه G و $\overline{G}$ کار می‌شود، ولی در تعریف ۶ گروه G ثابت بوده و اعمال روی دو فضا تغییر می‌کند.

مثال ۱ : فرض کنید $X = L_{n,p}$ فضای برداری ماتریس‌های حقیقی $n \times p$، $Y = S_p$ فضای ماتریس‌های حقیقی متقارن $p \times p$ و $G = GL_p$ گروه ماتریس‌های

---
[۱۴] G-equivariant
[۱۵] G-invariant
[۱۶] Maximal invariant
[۱۷] Isovariant

وارون‌پذیر $p \times p$ باشد و G روی X و Y برای هر $x \in X$، $y \in Y$ و $g \in G$ به ترتیب به صورت $gx = xg^t$ و $gy = gyg^t$ عمل کند، که در آن g^t ترانهاده ماتریس g است. تابع $f : X \to Y$ با ضابطهٔ $f(x) = x^t Bx$ را در نظر بگیرید که در آن $B \in S_n$. در این صورت

$$f(gx) = f(xg^t) = gx^t Bxg^t = gf(x)g^t = gf(x).$$

در نتیجه f یک تابع G-هم‌وردا است.

لم ۱ (بردون، ۱۹۷۲): اگر f یک تابع G-هم‌وردا بین G-فضاهای X و Y باشد در این صورت

الف) برای هر $x \in X$، $G_x \subseteq G_{f(x)}$.

ب) f تک‌وردا است اگر و تنها اگر تابعی یک به یک روی مدار باشد.

برهان :

الف) اگر $g \in G_x$ آنگاه $gx = x$. با توجه به این که f یک تابع G-هم‌وردا است داریم $f(x) = f(gx) = gf(x)$ یعنی $g \in G_{f(x)}$. در نتیجه برای هر $x \in X$، $G_x \subseteq G_{f(x)}$.

ب) اگر f تک‌وردا باشد برای هر $x \in X$ داریم $G_x = G_{f(x)}$ و برای $x \in X$ و $g_1, g_2 \in G$ داریم

$$\begin{aligned} f(g_1 x) = f(g_2 x) \quad &\Rightarrow \quad g_1 f(x) = g_2 f(x) \\ &\Rightarrow \quad f(x) = {g_1}^{-1} g_2 f(x) \\ &\Rightarrow \quad {g_1}^{-1} g_2 \in G_{f(x)} = G_x \\ &\Rightarrow \quad {g_1}^{-1} g_2 x = x \\ &\Rightarrow \quad g_1 x = g_2 x \end{aligned}$$

بنابراین f روی مدار Gx یک به یک است. برعکس فرض کنید f روی مدار Gx برای هر $x \in X$ یک به یک باشد، در این صورت:

$$g \in G_x \Leftrightarrow gx = x \Leftrightarrow f(gx) = f(x) \Leftrightarrow gf(x) = f(x) \Leftrightarrow g \in G_{f(x)}.$$

بنابراین $G_x = G_{f(x)}$، در نتیجه f تک‌وردا است.

مثال ۲ : برای گروه ماتریس‌های وارون‌پذیر $p \times p$ یعنی $G = GL_p$ دو G-فضای $X = (R^p - \{\circ\}) \times S_p^+$ و $Y = \{(u,s) : u \in R^p, s \in S_p^+, u^t s^{-۱} u = ۱\}$ را در نظر بگیرید، که در آن S_p^+ فضای ماتریس‌های حقیقی متقارن همیشه مثبت $p \times p$ است. برای عمل یکسان گروه G روی دو G- فضای X و Y که برای هر $g \in G$، $(r,s) \in X$ و $(u,s) \in Y$ به ترتیب به صورت $g \times (r,s) = (gr, gsg^t)$ و $g \times (u,s) = (gu, gsg^t)$ تعریف می‌شود، G-فضای جدید $Z = Y \times (\circ, \infty)$ که برای هر $g \in G$، $r \in R^+$ و $(u,s) \in Y$ به صورت $g \otimes ((u,s), r) \times (g \times (u,s), r)$ است را در نظر بگیرید. در این صورت تابع

$$f(r,s) = ((r/(r^t s^{-۱} r)^{۱/۲}, s), r^t s^{-۱} r)$$

هم‌ورداست، زیرا برای هر $g \in G$ و $(r,s) \in X$،

$$f(g \times (r,s)) = f(gr, gsg^t) = ((gr/(r^t s^{-۱} r)^{۱/۲}, gsg^t), r^t s^{-۱} r) = g \otimes f(r,s).$$

همچنین به راحتی ثابت می‌شود تابع f یک به یک و در پی آن یک به یک روی مدار است. بنابراین با توجه به لم ۱ تابع f تک‌وردا است.

۲ شرط وجود برآوردگرهای هم‌وردا

در حالتی که G روی فضای Y بدیهی باشد، یعنی برای هر $g \in G$ و $y \in Y$، $gy = y$ تمام توابع هم‌وردا، ناوردا نیز هستند. از این رو به صورت توابعی از تابع ناوردای ماکسیمال روی X هستند. به جز این حالت خاص توصیف توابع هم‌وردا مشکل

است. برک (۱۹۶۷) یک شرط لازم و کافی برای وجود برآوردگرهای هم‌وردا ارائه کرد که در قضیه زیر به آن اشاره می‌شود.

قضیه ۱ (برک، ۱۹۶۷): شرط لازم و کافی برای وجود برآوردگرهای G-هم‌وردای $\delta : X \to \Theta$ این است که برای هر $x \in X$،

$$\Theta_x = \{\theta : G_x\theta = \{g\theta : gx = x\} = \{\theta\}\} \neq \emptyset.$$

توجه شود که تمام برآوردگرهای هم‌وردا روی X توسط تشکیل برآوردگرهای هم‌وردا روی مدارها به دست می‌آیند. به این صورت که اگر $X_i = Gx_i$ مدار متناظر با نقطه ثابت $x_i \in X_i$ باشد و $\Theta_{x_i} = \{\theta : G_{x_i}\theta = \{\theta\}\}$ یک برآوردگر هم‌وردای $\delta_i : X_i \to \Theta$ توسط

$$\delta_i(x_i) \in \Theta_{x_i} : \delta_i(gx_i) = g\delta_i(x_i)$$

تعیین می‌شود و اگر δ روی X_i برابر با δ_i تعریف شود δ یک برآوردگر هم‌وردا خواهد بود.

مثال ۳ : فرض کنید $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ یک بردار تصادفی از توزیع $N(\mu\mathbf{1}, \sigma^{۲}\mathbf{I})$ باشد که $\Theta = R \times R^+$. فضای عمل را به صورت $A = \{۰, ۱\}$ در نظر گرفته و تابع زیان $L((\mu, \sigma), a)$ را برای $\mu > ۰$ برابر با $a - ۱$ و برای $\mu \leq ۰$ برابر a تعریف می‌کنیم که $a = ۰, ۱$. این تابع زیان برای آزمون فرضیهٔ $H_۰ : \mu \leq ۰$ در مقابل $H_۱ : \mu > ۰$ مورد استفاده قرار می‌گیرد. در این حالت هنگامی که $a = ۰$، $H_۰$ پذیرفته می‌شود و در حالتی که $a = ۱$، $H_۱$ پذیرفته خواهد شد. اگر $G = R^+$ روی X به صورت $g\mathbf{x}$ عمل کند برای ناوردایی مدل و تابع زیان باید G روی Θ و A به ترتیب به صورت $g(\mu, \sigma) = (g\mu, g\sigma)$ و $ga = a$ عمل کند. اما برای هر $\mathbf{x} \in X$،

$$A_x = \{a : G_xa = \{a\}\} = \{a : \{ga : gx = x\} = \{a\}\} = A \neq \emptyset$$

بنابر قضیهٔ ۱ برآوردگرهای هم‌وردای $\delta : X \to A$ وجود دارند که در رابطه $\delta(g\mathbf{x}) = \delta(\mathbf{x})$ صدق می‌کنند. توجه شود که در این مثال خاص این برآوردگرها، ناوردا نیز هستند.

نتیجه ۱ : اگر G روی X به طور آزاد عمل کند برآوردگرهای G-هموردا $\delta : X \to \Theta$ وجود دارند.

برهان : طبق فرض $G_x = \{e\}$، بنابراین برای هر $x \in X$، $\{\theta : G_x\theta = \{\theta\}\} = \Theta \neq \emptyset$. بنابراین طبق قضیه ۱ برآوردگرهای هموردا وجود دارند.

برای دیدن کاربرد نتیجه ۱ می‌توان مثال ۳ را دوباره بررسی کرد. در این مثال همان طور که مشاهده می‌شود برای هر $x \in X$، $G_x = \{e\}$. بنابراین طبق نتیجهٔ ۱ وجود توابع هموردا مورد تأیید قرار می‌گیرد. مثال زیر کاربردی از قضیه ۱ برای اثبات عدم وجود توابع هموردا در یک مدل ناوردا را ارائه می‌دهد.

مثال ۴ : فرض کنید $x, y \in X = (N \cup \{۰\}) \times (N \cup \{۰\})$ متغیرهای تصادفی مستقل از توزیع پواسون با میانگین‌های $\theta_۱, \theta_۲ \in \Theta = R^+ \times R^+$ باشند. گروه G شامل تبدیلات یک به یک و پوشا روی $R^۲$ که روی X برای هر $g \in G$ و $x, y \in X$ به صورت $g(x, y) = (y, x)$ عمل می‌کند را در نظر بگیرید. این گروه روی فضای پارامتر Θ برای هر $\theta_۱, \theta_۲ \in \Theta$ یک گروه به فرم $g(\theta_۱, \theta_۲) = (\theta_۲, \theta_۱)$ القا می‌کند. حال اگر عمل G روی فضای عمل $A = \{۰, ۱\}$ به صورت $ga = ۱ - a$ باشد، تابع زیان $L((\theta_۱, \theta_۲), a)$ که برای $\theta_۱ < \theta_۲$ به صورت $۱ - a$، برای $\theta_۱ > \theta_۲$ برابر با a و برای $\theta_۱ = \theta_۲$ برابر با صفر تعریف شده است، ناوردا خواهد بود، زیرا برای هر $g \in G$، $\theta_۱, \theta_۲ \in \Theta$ و $a \in A$،

$$L(g(\theta_۱, \theta_۲), ga) = L((\theta_۲, \theta_۱), ۱ - a) = L((\theta_۱, \theta_۲), a).$$

تحت شرایط ذکر شده در بالا مدل تحت گروه G ناورداست. برای هر $x, y \in R^+$ که $x \neq y$ زیرگروه پایدارساز در نقطه (x, y) عبارت است از

$$G_{(x,y)} = \{g : g(x, y) = (y, x) = (x, y)\} = \emptyset$$

در صورتی که زیرگروه پایدارساز در نقطه (x, x) به صورت

$$G_{(x,x)} = \{g : g(x, x) = (x, x)\} = \{e\}$$

است، که در آن e تابع همانی و عضو خنثی در گروه G است. بنابراین برای $x, y \in R^+$ که $x \neq y$،

$$A_{(x,y)} = \{a : G_{(x,y)}a = \{a\}\} = \{a : \{ga : g \in G_{(x,y)}\} = \{a\}\} = \emptyset.$$

با توجه به قضیهٔ ۱ برآوردگرهای هم‌وردا از X به A وجود ندارند. توجه شود که این حقیقت را می‌توان به طور مستقیم نیز نتیجه گرفت. برای این منظور فرض کنید برآوردگر هم‌وردای $\delta : X \to A$ وجود داشته باشد. بنابراین طبق تعریف ۶ برای هر $g \in G$ و $x, y \in X$ داریم

$$\delta(g(x,y)) = \delta(y,x) = g\delta(x,y) = ۱ - \delta(x,y)$$

با اختیار کردن $x = y \in R^+$ نتیجه می‌شود که $\delta(x,x) = ۱ - \delta(x,x)$ و در پی آن $\delta(x,x) = ۱/۲ \notin A$ که تناقض است. بنابراین در این مدل ناوردا برآوردگرهای هم‌وردا وجود ندارند.

ایتون (۱۹۸۹) برای حالتی که G روی X انتقالی باشد یک شرط دیگر برای اثبات وجود برآوردگرهای هم‌وردا ارائه داد.

قضیه ۲ (ایتون، ۱۹۸۹): فرض کنید G روی X به طور انتقالی عمل کند. نقطه ثابت $x_۰ \in X$ و $y_۰ \in Y$ را در نظر بگیرید. شرط لازم و کافی برای وجود یک تابع G-هم‌وردا $\phi : X \to Y$ به طوری که $\phi(x_۰) = y_۰$ آن است که $G_{x_۰} \subseteq G_{y_۰}$.

بنابراین برای تعیین توابع هم‌وردا کافی است مقادیر ممکن $\phi(x_۰)$ برای یک مقدار $x_۰ \in X$ تعیین شود. می‌توان نشان داد در حالتی که G روی X انتقالی است قضیهٔ ۱ معادل قضیهٔ ۲ است. مثال زیر کاربردی از قضیهٔ ۲ را ارائه می‌کند.

مثال ۵ : فرض کنید $G = GL_p$ روی $X = Y = S_p^+$ به صورت $g.x = gxg^t$ عمل کند، که در آن $g \in GL_p$ و $x \in X$، S_p^+ فضای ماتریس‌های همیشه مثبت حقیقی متقارن باشد. برای تعیین توابع G-هم‌وردا نقطه $x_۰ = I_p \in S_p^+$ را اختیار می‌کنیم. یک تابع G-هم‌وردای $f : X \to Y$ باید برای هر $h \in O_p$ در رابطهٔ

$$f(I_p) = f(hh^t) = f(h.I_p) = h.f(I_p) = hf(I_p)h^t$$

صدق کند که در آن O_p ماتریس‌های متعامد $p \times p$ است. بنابراین برای هر مقدار ثابت $c > ۰$، داریم $f(I_p) = cI_p$. توجه شود که نقاط $x_۰ = I_p$ و $y_۰ = cI_p$ طوری پیدا شدند که $f(x_۰) = y_۰$ و همچنین

$$G_{x_۰} = \{g : g.I_p = gg^t = I_p\} = O_p \subseteq G_{y_۰}.$$

بنابراین طبق قضیهٔ ۲ توابع هموردا به صورت $f(I_p) = cI_p$ وجود دارند که باید در رابطهٔ

$$f(x) = f(x^{\frac{۱}{۲}}x^{\frac{۱}{۲}}) = f(x^{\frac{۱}{۲}}I_p x^{\frac{۱}{۲}}) = f(x^{\frac{۱}{۲}}.I_p) = x^{\frac{۱}{۲}}.f(I_p) = x^{\frac{۱}{۲}}(cI_p)x^{\frac{۱}{۲}} = cx$$

صدق کنند. بنابراین توابع G-هموردا به فرم $f(x) = cx$ هستند، $c > ۰$.

۳ تعیین برآوردگرهای هموردا با استفاده از توابع ناوردا

لهمن و کسلا (۱۹۹۸) روشی برای تولید رده‌ای از توابع هموردای مکان و مقیاس ارائه دادند که برحسب یک تابع هموردای داده شده و یک تابع ناوردا بیان می‌شود. در این روش به ازای برآوردگر G-هموردای مکانی (مقیاسی) داده شده $\delta_۰(x)$ و برآوردگر G-ناوردای مکانی(مقیاسی) دلخواه $u(x)$ ردهٔ برآوردگرهای G-هموردای مکانی (مقیاسی) به فرم $\delta(x) = \delta_۰(x) - u(x)$ $(\delta(x) = \delta(x_۰)/u(x))$ داده می‌شود. مشکل تعمیم این حالت به یک گروه کلی این است که توابع بالا برآوردگر هستند و برد آن‌ها زیرمجموعهٔ فضای پارامتری است. اگر به جای برآوردگر G-هم وردا و G-ناوردا از توابع X به G استفاده شود به نظر می‌رسد که در حالت مکانی $-u(x)$ وارون $u(x)$ نسبت به گروه جمعی و در حالت مقیاسی $\frac{۱}{u(x)}$ وارون $u(x)$ نسبت به گروه ضربی است. بنابراین فعلاً برای توابع G-هموردا و G-ناوردا از توابع X به G روش لهمن و کسلا (۱۹۹۸) تعمیم داده می‌شود، سپس راهکاری برای رفع مشکل و تبدیل توابع G-هموردا به برآوردگرهای G-هموردا ارائه خواهد شد.

قضیه ۳ :اگر $\delta_۰ : X \to G$ تابعی G-هموردا باشد، آنگاه $\delta : X \to G$ یک تابع G-هم وردا است اگر و تنها اگر $\delta(x) = \delta_۰(x)(u(x))^{-۱}$ که در آن $u : X \to G$ یک تابع G-ناورداست.

برهان : فرض کنید یک تابع G-ناوردای $u : X \to G$ به صورت $\delta(x) = \delta_\circ(x)(u(x))^{-1}$ وجود دارد. در این صورت $\delta(gx) = g\delta_\circ(x)(u(x))^{-1} = g\delta(x)$. بنابراین δ یک تابع G-هم وردا است. برعکس اگر δ یک تابع G-هم‌وردا باشد قرار می‌دهیم $u(x) = (\delta(x))^{-1}\delta_\circ(x)$ و در پی آن $u(gx) = (\delta(x))^{-1}g^{-1}g\delta_\circ(x) = u(x)$. بنابراین تابع G-ناوردا به صورت $u(x) = (\delta(x))^{-1}\delta_\circ(x)$ وجود دارد، که در آن $\delta(x) = \delta_\circ(x)(u(x))^{-1}$.

در حالتی که G روی Θ به طور یکتا انتقالی عمل کند، چون $G_\theta = \{e\}$ و $G\theta = \Theta$ در نتیجه تابع $\lambda(g) = g\theta_\circ$ از G به Θ، که در آن $\theta_\circ \in \Theta$ ثابت فرض شده است، یک تابع یک به یک و پوشا است. بنابراین یک تناظر یک به یک بین عناصر گروه G و اعضای فضای پارامتر یعنی Θ وجود دارد. عضو همانی e متناظر با $\theta_\circ$ است زیرا $\lambda(e) = e\theta_\circ = \theta_\circ$. بنابراین $g_\theta \in \Theta$ می‌تواند به عنوان عضو یکتای G، که در آن $g_\theta\theta_\circ = \theta$، تعریف شود. چون $(\Theta, *)$ یک گروه است و $g_\theta g_\omega = g_{\theta*\omega}$، λ می تواند را به صورت $\lambda(g_\theta) = \theta$ بازنویسی شود و همچنین قرار داد $\theta * \omega = g_\theta g_\omega \theta_\circ = \lambda^{-1}(\theta)\lambda^{-1}(\omega)\lambda(e)$. بنابراین $(\Theta, *)$ یک گروه با عضو همانی $\theta_\circ = \lambda(e)$ و عضو وارون $\theta^{-1} = g_\theta{}^{-1}\theta_\circ$ خواهد بود. عمل گروه روی X یک عمل روی Θ القا می کند، به طوری که برای هر $g_\theta \in G$، $g_\theta\omega = \theta * \omega$. همچنین $\lambda : G \to \Theta$ یک تابع G-هم‌ورداست زیرا برای هر $g \in G$ و $\theta \in \Theta$،

$$\lambda(gg_\theta) = gg_\theta\theta_\circ = g\theta = g\lambda(g_\theta).$$

به‌علاوه λ یک همریختی نیز است زیرا

$$\lambda(g_\theta g_\omega) = \lambda(g_{\theta*\omega}) = \theta * \omega = \lambda(g_\theta) * \lambda(g_\omega).$$

بنابراین Θ و G یکریخت نیز هستند.

مشکل قضیهٔ ۳ این است که δ یک تابع G-هم‌وردا است، در حالی که در آمار نیاز به یک برآوردگر G-هم‌وردا است. برای رفع این مشکل با ترکیب تابع $\lambda : G \to \Theta$ و تابع G-هم‌وردای داده شده $\delta : X \to G$ یک برآوردگر G-هم‌وردای $\tau = \lambda o \delta : X \to \Theta$ می‌سازیم. بنا

بر قضیهٔ ۳ می‌توان فرم تمام برآوردگرهای G-هموردا را به صورت $\tau(x) = \lambda(\delta(x)) = \lambda(\delta_\circ(x)(u(x))^{-1}) = \delta_\circ(x)(u(x))^{-1}\theta_\circ$ در نظر گرفت، که در آن $\delta_\circ$ و u به ترتیب توابع G-هموردا و G-ناوردا از X به G هستند.

مثال ۶ : در خانواده مکان داریم

$$g_\theta = \theta - \theta_\circ, \theta * \omega = g_\theta + g_\omega + \theta_\circ = \theta + \omega - \theta_\circ, \lambda(g_\theta) = g_\theta + \theta_\circ.$$

برای تابع G-هموردا مکانی داده شده مثل $\delta_\circ : X \to G$ و تابع ناوردای مکانی $u : X \to G$ تابع $\tau(x) = \lambda(\delta_\circ(x)(u(x))^{-1}) = \delta_\circ(x) - u(x) + \theta_\circ$ یک برآوردگر G-هموردا است که با اختیار کردن $\theta_\circ = \circ$ عضو همانی گروه جمعی نتیجه لهمن و کسلا (۱۹۹۸) حاصل می‌شود. به طور مشابه برای خانواده مقیاس نیز به نتیجه لهمن و کسلا (۱۹۹۸) حاصل می‌شود.

لم زیر روشی برای تعیین کلاس توابع Gـناوردا که تابعی از ناوردای ماکسیمال هستند ارائه می‌کند.

لم ۲ (ایتون، ۱۹۸۹): اگر $\delta_\circ : X \to G$ یک تابع G-هموردا باشدآنگاه تابع $f(x) = (\delta_\circ(x))^{-1}x$ ناوردای ماکسیمال است.

مثال ۷ : فرض کنید $x_1,\ldots,x_n$ نمونه‌ای تصادفی از توزیع گاما با تابع چگالی

$$f_{a,b}(x) = \frac{x^{a-1}e^{\frac{-x}{b}}}{\Gamma(a)b^{a-1}}, \quad x > \circ$$

باشد، که در آن $a > \circ$ معلوم و $b > \circ$ نامعلوم است. اگر $G = R^+$ روی $X = (R^+)^n$ توسط gx عمل کند (ضرب اسکالر حقیقی در بردار) آماره بسنده کامل برای b یعنی $\delta_\circ(x) = \sum_{i=1}^n x_i$، یک برآوردگر Gـهموردا نیز هست. بنا بر لم ۲ تابع $f(x) = (\delta_\circ(x))^{-1}x = (\frac{x_1}{\sum_{i=1}^n x_i}, \ldots, \frac{x_n}{\sum_{i=1}^n x_i})$ ناوردای ماکسیمال است. بنابراین تمام توابع G-ناوردا به صورت تابعی از این آماره هستند. در نتیجه برای تابع دلخواه ψ از X به R توابع G-ناوردا به فرم $u(x) = \psi(\frac{x_1}{\sum_{i=1}^n x_i}, \ldots, \frac{x_n}{\sum_{i=1}^n x_i})$ خواهند بود. چون G روی $\Theta = R$ به طور یکتا انتقالی عمل می‌کند می‌توان g_b را به عنوان عضو

یکتای $g \in G$ در نظر گرفت که $g = b$. در حقیقت عضو متناظر b از فضای پارامتر در گروه G به صورت g_b خواهد بود. بنا بر قضیه ۳ توابع Gـهموردا به صورت

$$\delta(x) = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\psi(\frac{x_1}{\sum_{i=1}^{n} x_i}, \ldots, \frac{x_n}{\sum_{i=1}^{n} x_i})}.$$

خواهند بود. سنجری و ذاکرزاده (۲۰۰۵)، بهترین برآوردگر هموردا برای b را محاسبه کردند.

مثال ۸ : فرض کنید $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$ یک نمونه‌ای تصادفی از تابع چگالی احتمال توأم $(\sigma e^{-\sigma x})(\frac{1}{\sigma} e^{-y/\sigma})$ باشند، که در آن $\sigma > 0$ و $x, y > 0$. این مدل به مساله نیل[18] معروف است که توسط فیشر (۱۹۷۳) مطرح شد. به وضوح $(z_1, z_2) = (\overline{x}, \overline{y})$ یک آماره بسنده مینیمال است. حال اگر $G = R^+$ روی $Z = R^+ \times R^+$ توسط $g(z_1, z_2) = (g^{-1} z_1, g z_2)$ عمل کند، G روی $\Theta = \{(\theta_1, \theta_2) : \theta_2 = {\theta_1}^{-1} = \sigma > 0\}$ به صورت $g(\theta_1, \theta_2) = (g^{-1}\theta_1, g\theta_2)$ عمل خواهد کرد. چون برای هر $(z_1, z_2) \in Z$ داریم $G_{(z_1, z_2)} = \{1\}$، بنابراین G روی Z به طور آزاد عمل می‌کند. برآوردگر G-هموردای $\delta_0 : Z \to G$ به صورت $\delta_0(z_1, z_2) = \sqrt{z_2/z_1}$ را در نظر بگیرید. با استفاده از لم ۲

$$\begin{aligned} f(z_1, z_2) &= (\delta_0(z_1, z_2))^{-1}(z_1, z_2) \\ &= (\sqrt{z_2/z_1} z_1, \sqrt{z_1/z_2} z_2) \\ &= (\sqrt{z_1 z_2}, \sqrt{z_1 z_2}) \end{aligned}$$

و در پی آن $h(z_1, z_2) = \sqrt{z_1 z_2}$ ناوردای ماکسیمال می‌باشند. از طرفی با توجه به این که G روی Θ به طور انتقالی عمل می‌کند می توان $g(\theta_1, \theta_2)$ را به عنوان عضو یکتای $g \in G$ در نظر گرفت که $(\theta_1, \theta_2) = g(1, 1)$. بنابراین $g_{(\theta_1, \theta_2)} = \theta_2 = {\theta_1}^{-1} = \sigma$ و $\lambda(g_{(\theta_1, \theta_2)}) = ({\theta_2}^{-1}, \theta_2)$. همچنین $(\Theta, *)$ گروهی با عمل به صورت

$$(\theta_1, \theta_2) * (\omega_1, \omega_2) = \lambda(g_{(\theta_1, \theta_2)} g_{(\omega_1, \omega_2)}) = \lambda(\theta_2 \omega_2) = (1/\theta_2\omega_2, \theta_2\omega_2)$$

[18] Nile problem

است. بنابراین ردهٔ تمام برآوردگرهای G-هم‌وردا به صورت $\frac{\sqrt{z_2/z_1}}{\psi(\sqrt{z_1 z_2})}$است، که در آن ψ تابعی دلخواه از Z به R است.

بحث و نتیجه‌گیری

در این مقاله روش‌هایی برای اثبات وجود و ساختن توابع هم‌وردا ارائه شد. همچنین روش لهمن و کسلا (۱۹۹۸) که با استفاده از یک برآوردگر هم‌وردا و ناوردا ردهٔ تمام برآوردگرهای هم‌وردا را در خانواده مکان و مقیاس ارائه می‌کرد برای یک گروه کلی تعمیم داده شد. با توجه به این که در بیشتر مثال‌های آماری گروه به طور یکتا انتقالی عمل می‌کند، در این حالت توابع هم‌وردای به دست آمده را می‌توان به برآوردگرهای هم‌وردا تبدیل نمود. برای گروه‌های دیگر باید به طور مستقیم این رده را به دست آورد که تاکنون روشی برای یافتن رده برآوردگرهای هم‌وردا ارائه نشده است.

مراجع

Berk, R. H. (1967), A Special Group Structure and Equivariant Estimation, *Annals of Mathematical Statistics*, **38**, 1436-1445.

Bredon, G. H. (1972), *Introduction to Compact Transformation Groups*, Academic Press, New York.

Deitmar, A. and Echterhoff, S. (2009), *Principles of Harmonic Analysis*, Springer, New York.

Eaton, M. L. (1983), *Multivariate Statistics: A Vector Space Approach.* Wiley, New York.

Eaton, M. L. (1989), *Group Invariance Application in Statistics.* Institute of Mathematical Statistics and American Statistical Association, Hayward, California.

Fisher, R. A. (1973), *Statistical Methods and Scientific Inference*, Hafner, New York.

Folland, G. B. (1995), *A Course in Abstract Harmonic Analysis*, CRC Press, Boca Raton.

Folland, G. B. (1999). Real Analysis: *Modern Techniques and their Applications*, Wiley, New York.

Hall, W. J. Wijsman, R. A. and Ghosh, J. K. (1965), The Relationship Between Sufficiency and Invariance with Applications in Sequential Analysis, *Annals of Mathematical Statistics*, **36**, 575-614.

Keifer, J. (1957), Invariance, Minimax Sequential. Estimation and Continuous Time Processes. *Annals of Mathematical Statistics*, **28**, 253-601.

Lehmann, E. L. and Casella, G. (1998), *Theory of Point Estimation*, 2nd edition, Springer-Verlag, New York.

Lehmann, E. L. and Romano, J. P. (2005), *Testing Statistical Hypotheses*m 3rd edition, Springer, New York.

Peisakoff, M. (1950), *Transformation Parameters*, Thesis, Princetoin University, Princeton, N. J.

Pitman, E. J. G. (1939), The Estimation of Location and Scale Parameters of Continuous Population of any Given Form. *Biometrika*, **39**, 391-421.

Sanjari Farsipour, N. and Zakerzadeh, H. (2005), Estimation of a Gamma Scale Parameter Under Asymmetric Squared-Log Error Loss. *Communication in Statistics, Theory and Methods*, **34**, 1127-1135.