

توزیع طول عمر نمایی تعمیم یافته-لگاریتمی جدید

محمد بابازاده^۱، صادق رضایی^۲، موسی عبدی^۳

^۱ مؤسسه آموزش عالی صنعتی مازندران

^۲ گروه آمار، دانشگاه صنعتی امیرکبیر

^۳ دانشکده ریاضیات و محاسبات نرم، مجتمع آموزش عالی بم

تاریخ دریافت: ۱۳۹۱/۱/۱۲ تاریخ آخرین بازنگری: ۱۳۹۱/۵/۲

چکیده: در این مقاله، یک توزیع جدید سه پارامتری طول عمر با ترکیب کردن توزیع‌های نمایی تعمیم یافته و لگاریتمی معرفی می‌شود. این توزیع به ازای مقادیر مختلف پارامترها دارای نرخ شکست نزولی و صعودی نزولی است. ویژگی‌های این توزیع جدید طول عمر، از جمله تابع چگالی احتمال، تابع توزیع تجمعی، تابع بقا، تابع مخاطره، تابع مولد گشتاور و گشتاورهای آن محاسبه می‌شوند. برآورد ماکسیمم درست‌نمایی پارامترهای این توزیع با استفاده از الگوریتم EM تعیین و ماتریس واریانس-کواریانس مجانبی برآورد پارامترها به دست آورده می‌شوند. سپس با هدف تعیین دقت، با استفاده از شبیه‌سازی مونت کارلو، واریانس و کواریانس‌های برآوردگرهای ماکسیمم درست‌نمایی مورد بررسی قرار می‌گیرند.

واژه‌های کلیدی: نرخ شکست، الگوریتم EM، توزیع نمایی تعمیم یافته، توزیع لگاریتمی، توزیع طول عمر.

آدرس الکترونیک مسئول مقاله: محمد بابازاده، mohamad_babazadeh@yahoo.com
کد موضوع‌بندی ریاضی (۲۰۰۰): ۶۲E۱۵، ۶۲F۰۷، ۶۲E۰۵

مطالعه طول عمر موجودات زنده، دستگاه‌ها و مواد و غیره در علوم زیستی و مهندسی همواره حائز اهمیت فراوان بوده است. چنین مطالعه‌ای منجر به تعریف ریاضی مفهوم نرخ شکست برای طول عمر شده است. به طور کلی انتظار می‌رود طول عمر یک دستگاه با کاهش نرخ شکست همراه باشد هنگامی که رفتار آن در طول زمان با سخت کار کردن (در اصطلاح مهندسی) یا ایمنی (در اصطلاح بیولوژیکی) مشخص شده است.

توزیع‌های طول عمری که دارای نرخ شکست نزولی هستند توسط لوماکس (۱۹۵۴) با مثالی در مورد فناپذیری یا مرگ تجاری ارائه شد. پس از آن نیز در سیستم هوایی هواپیماهای بوئینگ ۷۲۰ و طول عمر ماژول‌های مدار مجتمع توسط پروشان (۱۹۶۳) انجام شد. بارلو و همکاران (۱۹۶۳)، بارلو و مارشال (۱۹۶۴) و (۱۹۶۵)، مارشال و پروشان (۱۹۶۵)، داهیا و گرولند (۱۹۷۲)، سواندرس و ماهیر (۱۹۸۳)، گلسر (۱۹۸۹)، گرولند و ستورامن (۱۹۹۴) و آدامیس و لوماکس (۱۹۹۸) این نوع توزیع‌ها را مورد بررسی قرار دادند. کوش (۲۰۰۷) با ترکیب توزیع‌های نمایی و پواسون، طهماسبی و رضایی (۲۰۰۸) با ترکیب توزیع نمایی و لگاریتمی، توزیع طول عمر برای داده‌های زمین لرزه بم را مدل‌بندی کردند. بکوش و همکاران (۲۰۱۲) توزیع جدیدی را با ترکیب توزیع نمایی تعمیم یافته و توزیع دوجمله‌ای ارائه نموده و برای مدل‌بندی داده‌های طول عمر استفاده کردند و با توزیع‌های معروف دیگر طول عمر مورد مقایسه قرار دادند.

در این مقاله با ترکیب کردن توزیع نمایی تعمیم یافته و توزیع لگاریتمی، توزیع نمایی تعمیم یافته-لگاریتمی معرفی می‌شود، که یک توزیع سه پارامتری جدید است و به ازای مقادیر مختلف پارامتر دارای نرخ شکست نزولی^۱ (DFR) و صعودی نزولی^۲ (IDFR) است. در ادامه ویژگی‌های مختلف این توزیع از جمله تابع توزیع، تابع چگالی، میانه توزیع، گشتاورهای مرتبه r ام، تابع مولد گشتاور، تابع بقا و تابع نرخ شکست و برآورد ماکسیمم درستی پارامترها به دست آورده می‌شوند.

^۱ Decreasing failure rate

^۲ Increasing-Decreasing failure rate

۲ توزیع پیشنهادی

فرض کنیم Y_1, \dots, Y_z نمونه‌ای تصادفی از توزیع نمایی تعمیم‌یافته با تابع چگالی احتمال

$$f_Y(y; \alpha, \beta) = \alpha\beta e^{-\beta y} (1 - e^{-\beta y})^{\alpha-1}; \quad y > 0, \alpha, \beta > 0 \quad (1)$$

باشد، که در آن، z تعداد متغیرهای تصادفی و تحقق متغیر تصادفی Z دارای توزیع لگاریتمی با تابع جرم احتمال

$$p(z; p) = \frac{(1-p)^z}{-z \ln p}; \quad 0 < p < 1, \quad z = 1, 2, \dots \quad (2)$$

است. با فرض اینکه متغیرهای تصادفی Y_i و Z مستقل هستند و قرار داده شود $X = \min\{Y_1, \dots, Y_z\}$ آنگاه

$$f_{X|z}(x|z; \alpha, \beta) = \alpha\beta z e^{-\beta x} (1 - e^{-\beta x})^{\alpha-1} [1 - (1 - e^{-\beta x})^\alpha]^{z-1} \quad (3)$$

بنابراین تابع چگالی کناری X عبارت است از:

$$f_X(x; \alpha, \beta, p) = \frac{\alpha\beta(1-p)}{-\ln p} e^{-\beta x} (1 - e^{-\beta x})^{\alpha-1} \times \{1 - (1-p)[1 - (1 - e^{-\beta x})^\alpha]\}^{-1}; \quad (4)$$

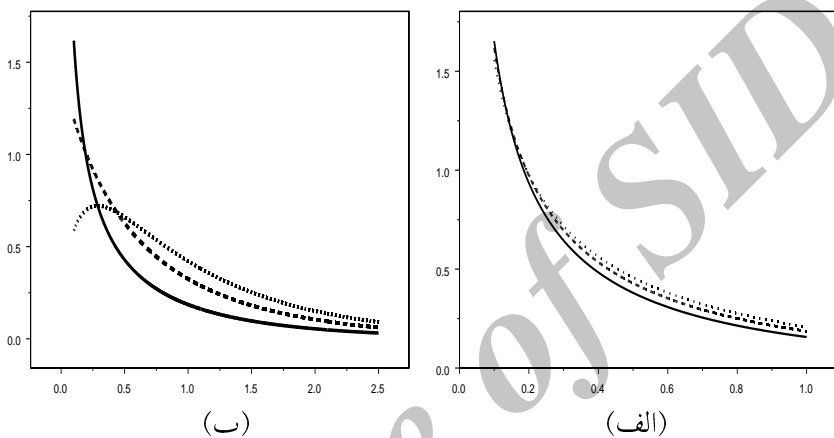
$$x > 0, \alpha > 0, \beta > 0, 0 < p < 1$$

از اینجا به بعد توزیع با تابع چگالی (۴) و بردار پارامتر $\theta = (\alpha, \beta, p)$ توزیع نمایی تعمیم‌یافته-لگاریتمی^۳ (GEL) نامیده می‌شود. شکل ۱ نمودار این تابع چگالی را برای مقادیر مختلف پارامترها نشان می‌دهد. این مدل با مفهوم عدم تجانس جمعیت، از طریق فرآیند ترکیب به دست می‌آید. برای تفسیر مدل ارائه شده به موقعیتی که در آن شکست (به عنوان مثال یک دستگاه) به علت وجود تعداد نامعلومی نقص‌های اولیه Z (تعدادی از نیمه رساناها برگرفته از یک قطعه معیوب) اتفاق می‌افتد. بنابراین طول عمرها توسط Y ها بیان می‌شوند و هر نقص را می‌توان

^۳ Generalized Exponential-Logarithmic Distribution

۴ توزیع طول عمر نمایی تعمیم یافته-لگاریتمی جدید

تنها پس از ایجاد شکست تشخیص داد، که در آن صورت بلافاصله کاملاً تعمیر می شود (آدامیدیس و لوکاس، ۱۹۸۸ و کوش، ۲۰۰۷). بنابراین مفروضات توزیع برای مدل سازی اولین شکست X که قبلاً ارائه شده منجر به ایجاد یا ارائه توزیع جدید GEL می شود.



شکل ۱: نمودار تابع چگالی احتمال توزیع نمایی تعمیم یافته-لگاریتمی، الف: $\alpha = 0.5$ و $\beta = 1$ ، $p = 0.3$ (خط ممتد)، $p = 0.5$ (خط چین) و $p = 0.7$ (نقطه چین)، ب: $\alpha = 1$ و $\beta = 1$ ، $p = 0.5$ (خط ممتد)، $\alpha = 1$ (خط چین) و $\alpha = 1/5$ (نقطه چین)

۳ ویژگی های توزیع

تابع چگالی توزیع GEL مطابق شکل ۱ به ازای $\alpha = 1$ برای $x = 0$ برابر $\frac{-\beta(1-p)}{p \ln p}$ و وقتی $x \rightarrow \infty$ برابر صفر است. یعنی $f(0)$ یک تابع نزولی است. این مدل توسط طهماسبی و رضایی (۲۰۰۷) مطرح شد. وقتی $\alpha < 1$ ، برای $x = 0$ مقدار تابع به سمت ∞ میل می کند و موقعی که $x \rightarrow \infty$ مقدار تابع برابر صفر است. اگر $\alpha > 1$ باشد، برای $x \rightarrow \infty$ مقدار تابع برابر صفر است. تابع چگالی احتمال GEL وقتی $\alpha = 1$ و $p \rightarrow 1$ یک توزیع نمایی با پارامتر β خواهد شد. اگر $p \rightarrow 1$ آنگاه توزیع GEL به توزیع نمایی تعمیم یافته تبدیل می شود.

۱.۳ توزیع

اگر X دارای چگالی (۴) باشد، تابع توزیع تجمعی آن به صورت

$$F_X(x; \theta) = 1 - \frac{1}{\ln p} \times \ln\{1 - (1-p)[1 - (1 - e^{-\beta x})^\alpha]\} \quad (5)$$

است. میانه توزیع عبارت است از:

$$m = -\frac{1}{\beta} \ln\left\{1 - \left(\frac{\sqrt{p}}{1 + \sqrt{p}}\right)^\alpha\right\} \quad (6)$$

گشتاور مرتبه r ام توزیع GEL به صورت

$$E(X^r) = \frac{-r}{\ln p} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^{\alpha k} (-1)^{k+j} \frac{(1-p)^n}{n} \binom{n}{k} \binom{\alpha k}{j} \Gamma(r) (\beta j)^{-r} \quad (7)$$

محاسبه می‌شود، که با قرار دادن $r = 1, 2$ میانگین و واریانس توزیع به دست می‌آیند. تابع مولد گشتاور توزیع GEL به صورت

$$M_X(t) = \frac{\alpha(1-p)}{\ln p} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{r=0}^j (-1)^j j \binom{j}{r} (1-p)^j B\left(\frac{\beta-t}{\beta}, \alpha(r+1)\right) \quad (8)$$

است، که در آن $B(a, b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$

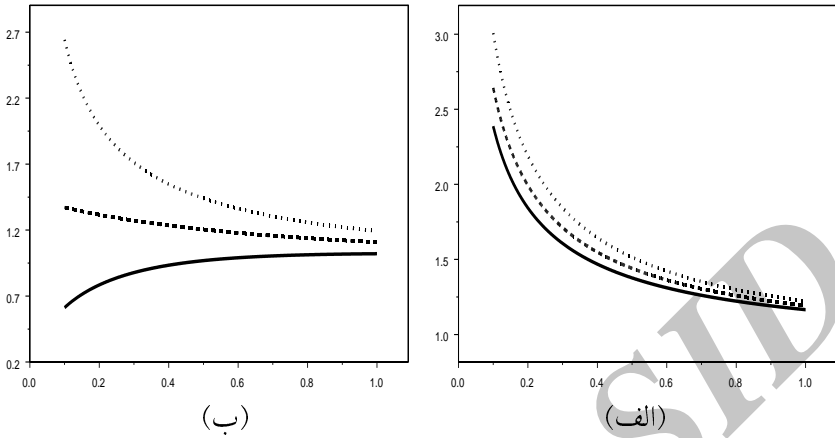
۲.۳ تابع بقای عمر و نرخ شکست

با استفاده از (۴) و (۲) تابع مخاطره (تابع نرخ شکست) برای توزیع نمایی تعمیم یافته-لگاریتمی به صورت

$$h(x; \theta) = \frac{-\alpha\beta(1-p)e^{-\beta x}(1 - e^{-\beta x})^{\alpha-1}}{\ln\{1 - (1-p)[1 - (1 - e^{-\beta x})^\alpha]\}} \times \{1 - (1-p)[1 - (1 - e^{-\beta x})^\alpha]\}^{-1} \quad (9)$$

و تابع بقا (تابع قابلیت اعتماد) آن نیز به صورت

$$S(x; \theta) = \frac{1}{\ln p} \ln\{1 - (1-p)[1 - (1 - e^{-\beta x})^\alpha]\} \quad (10)$$



شکل ۲: نمودار تابع نرخ شکست توزیع نمایی تعمیم یافته-لگاریتمی، الف: $\alpha = 0/5$ و $\beta = 1$ ، $p = 0/3$ (خط ممتد)، $p = 0/5$ (خط چین) و $p = 0/7$ (نقطه چین)، ب: $\alpha = 0/5$ ، $\beta = 1$ و $p = 0/5$ (خط ممتد)، $\alpha = 1$ (خط چین) و $\alpha = 1/5$ (نقطه چین)

است. اگر $\alpha > 1$ ، آنگاه $\lim_{x \rightarrow 0} h(x; \theta) = 0$ و $\lim_{x \rightarrow \infty} h(x; \theta) = \beta$ در نتیجه تابع نرخ شکست همواره صعودی است. اگر $0 < \alpha \leq 1$ ، آنگاه $\lim_{x \rightarrow 0} h(x; \theta) = 0$ و $\lim_{x \rightarrow \infty} h(x; \theta) = \beta$ ، بنابراین تابع نرخ شکست همواره نزولی است. در شکل ۲ رفتار تابع نرخ شکست برای مقادیر مختلف پارامتر نشان داده شده‌اند. البته هر دو تابع $h(x)$ و $S(x)$ شکل ساده‌ای در مقایسه با بعضی از توابع چون توزیع گاما دارند.

۳.۳ تولید نمونه تصادفی از توزیع GEL

برای تولید نمونه‌ای تصادفی از توزیع GEL، ابتدا معکوس تابع توزیع تجمعی محاسبه می‌شود. سپس با استفاده از قضیه انتگرال احتمال یک نمونه تصادفی از آن تولید می‌شود. اگر U دارای توزیع یکنواخت استاندارد باشد، آنگاه متغیر تصادفی

$$X = -\frac{1}{\beta} \ln \left\{ 1 - \left(\frac{p^U - p}{1 - p} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \right\} \quad (11)$$

دارای توزیع GEL با پارامترهای (α, β, p) است.

۴.۳ برآورد پارامترها با استفاده از روش ماکسیمم درستنمایی (MLE)

لگاریتم تابع درستنمایی برای توزیع GEL با قرار دادن $y_{obs} = [x_i; i = 1, \dots, n]$ و $\theta = (\alpha, \beta, p)$ عبارت است از

$$\begin{aligned} \ell(\theta; y_{obs}) &= n \ln\left(\frac{\alpha\beta(p-1)}{\ln p}\right) - \beta \sum_{i=1}^n x_i \\ &+ (\alpha-1) \sum_{i=1}^n \ln(1 - e^{-\beta x_i}) \\ &- \sum_{i=1}^n \ln\{p + (1-p)[1 - e^{-\beta x_i}]^\alpha\} \end{aligned} \quad (12)$$

برای محاسبه MLE پارامتر θ از لگاریتم تابع درستنمایی نسبت به تک تک پارامترها مشتق گرفته و برابر صفر قرار می‌دهیم.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ell(\theta; y_{obs})}{\partial \alpha} &= \frac{n}{\alpha} + \sum_{i=1}^n \ln(1 - e^{-\beta x_i}) \\ &- \sum_{i=1}^n \frac{(1-p)(1 - e^{-\beta x_i}) \ln(1 - e^{-\beta x_i})}{p + (1-p)[1 - e^{-\beta x_i}]^\alpha} = 0 \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ell(\theta; y_{obs})}{\partial \beta} &= \frac{n}{\beta} - \sum_{i=1}^n x_i + (\alpha-1) \sum_{i=1}^n \frac{x_i e^{-\beta x_i}}{1 - e^{-\beta x_i}} \\ &- \sum_{i=1}^n \frac{\alpha(1-p)x_i e^{-\beta x_i} (1 - e^{-\beta x_i})^{\alpha-1}}{p + (1-p)(1 - e^{-\beta x_i})^\alpha} = 0 \end{aligned} \quad (14)$$

$$\frac{\partial \ell(\theta; y_{obs})}{\partial p} = \frac{n}{p-1} - \frac{n}{p \ln p} - \sum_{i=1}^n \frac{1 - [1 - e^{-\beta x_i}]^\alpha}{p + (1-p)(1 - e^{-\beta x_i})^\alpha} = 0 \quad (15)$$

با استفاد از قضایای زیر نشان داده می‌شود که معادلات (۱) تا (۱۵) در چه بازه‌هایی

دارای جواب هستند.

قضیه ۱ : تابع

$$h(\alpha; \beta, p, y_{obs}) = \frac{n}{\alpha} + \sum_{i=1}^n \ln(\lambda - e^{-\beta x_i}) - \sum_{i=1}^n \frac{(\lambda - p)(\lambda - e^{-\beta x_i}) \ln(\lambda - e^{-\beta x_i})}{p + (\lambda - p)[\lambda - e^{-\beta x_i}]^\alpha}$$

که در آن β و p معلوم هستند در بازه

$$\left[-\frac{n}{p} \left(\sum_{i=1}^n \ln(\lambda - e^{-\beta x_i}) \right)^{-1}, -n \sum_{i=1}^n \ln(\lambda - e^{-\beta x_i})^{-1} \right]$$

داری ریشه است.

برهان : تابع

$$S(\alpha; \beta, p, y_{obs}) = -(\lambda - p) \sum_{i=1}^n \frac{(\lambda - e^{-\beta x_i})^\alpha}{p + (\lambda - p)(\lambda - e^{-\beta x_i})^\alpha} \times \ln(\lambda - e^{-\beta x_i})$$

به دلیل اینکه

$$\frac{\partial S(\alpha; \beta, p, y_{obs})}{\partial \alpha} = -(\lambda - p) \sum_{i=1}^n \frac{p(\lambda - e^{-\beta x_i})^\alpha}{(p + (\lambda - p)(\lambda - e^{-\beta x_i})^\alpha)^2} (\ln(\lambda - e^{-\beta x_i}))^2 < 0$$

اکیداً نزولی است بنابراین

$$\begin{aligned} h(\alpha; \beta, p, y_{obs}) &< \frac{n}{\alpha} + \sum_{i=1}^n \ln(\lambda - e^{-\beta x_i}) + \lim_{\alpha \rightarrow 0} S(\alpha; \beta, p, y_{obs}) \\ &= \frac{n}{\alpha} + p \sum_{i=1}^n \ln(\lambda - e^{-\beta x_i}) \end{aligned}$$

و همین طور

$$\begin{aligned} h(\alpha; \beta, p, y_{obs}) &> \frac{n}{\alpha} + \sum_{i=1}^n \ln(\lambda - e^{-\beta x_i}) + \lim_{\alpha \rightarrow \infty} S(\alpha; \beta, p, y_{obs}) \\ &= \frac{n}{\alpha} + \sum_{i=1}^n \ln(\lambda - e^{-\beta x_i}) \end{aligned}$$

اگر $h(\alpha; \beta, p, y_{obs}) < 0$ آنگاه $\alpha > \frac{-n}{p} [\sum_{i=1}^n \ln(\lambda - e^{-\beta x_i})]^{-1}$

اگر $h(\alpha; \beta, p, y_{obs}) > 0$ آنگاه $\alpha < -n [\sum_{i=1}^n \ln(\lambda - e^{-\beta x_i})]^{-1}$

$h(\alpha; \beta, p, y_{obs})$ در بازه

$$\left[-\frac{n}{p} \left(\sum_{i=1}^n \ln(1 - e^{-\beta x_i}) \right)^{-1}, -n \sum_{i=1}^n \ln(1 - e^{-\beta x_i})^{-1} \right]$$

حداقل دارای یک ریشه است.

قضیه ۲ : تابع

$$g(\beta; \alpha, p, y_{obs}) = \frac{n}{\beta} - \sum_{i=1}^n x_i + (\alpha - 1) \sum_{i=1}^n \frac{x_i e^{-\beta x_i}}{1 - e^{-\beta x_i}} - \sum_{i=1}^n \frac{\alpha(1-p)x_i e^{-\beta x_i} (1 - e^{-\beta x_i})^{\alpha-1}}{p + (1-p)(1 - e^{-\beta x_i})^\alpha}$$

را در نظر بگیرید، که در آن α و p معلوم هستند. ریشه معادله $g(\beta; \alpha, p, y_{obs}) = 0$ برای $1 < \alpha \leq 1$ در بازه $0 < \beta < \frac{1}{\bar{x}}$ و برای $\alpha > 1$ در بازه $\beta > \frac{1}{\bar{x}}$ قرار دارد.

برهان : برای توابع T_1 و T_2 که به صورت

$$T_1 = (\alpha - 1) \sum_{i=1}^n \frac{x_i e^{-\beta x_i}}{1 - e^{-\beta x_i}}$$

$$T_2 = -\alpha(1-p) \sum_{i=1}^n \frac{x_i e^{-\beta x_i} (1 - e^{-\beta x_i})^{\alpha-1}}{p + (1-p)(1 - e^{-\beta x_i})^\alpha}$$

تعریف شده‌اند، اگر $0 < \alpha < 1$ ، تابع T_1 اکیداً صعودی است. اگر $\alpha > 1$ ، تابع T_1 اکیداً نزولی است.

حوزه مقادیر α به دو بازه تقسیم می‌شود:

(I) اگر $0 < \alpha < 1$ ، توابع T_1 و T_2 اکیداً صعودی هستند، بیشترین مقدار خود را در انتهای بازه و کمترین مقدار را در ابتدای بازه قبول می‌کنند.

$$g(\beta; \alpha, p, y_{obs}) < \frac{n}{\beta} - \sum_{i=1}^n x_i + \lim_{\beta \rightarrow 0} T_1 + \lim_{\beta \rightarrow 0} T_2$$

$$= \frac{n}{\beta} - \sum_{i=1}^n x_i - \infty = -\infty$$

۱۰. توزیع طول عمر نمایی تعمیم یافته-لگاریتمی جدید

$$\begin{aligned} g(\beta; \alpha, p, y_{obs}) &> \frac{n}{\beta} - \sum_{i=1}^n x_i + \lim_{\beta \rightarrow \infty} T_1 + \lim_{\beta \rightarrow 0} T_2 \\ &= \frac{n}{\beta} - \sum_{i=1}^n x_i + 0 + 0 \\ &= \frac{n}{\beta} - \sum_{i=1}^n x_i \end{aligned}$$

اگر $g(\beta; \alpha, p, y_{obs}) > 0$ ، یعنی $\frac{n}{\beta} - \sum_{i=1}^n x_i > 0$ اگر $\alpha > 1$ (II) توابع T_1 و T_2 اکیداً نزولی هستند، بیشترین مقدار خود را در ابتدای بازه و کمترین مقدار را در انتهای بازه می پذیرند.

$$\begin{aligned} g(\beta; \alpha, p, y_{obs}) &> \frac{n}{\beta} - \sum_{i=1}^n x_i + \lim_{\beta \rightarrow 0} T_1 + \lim_{\beta \rightarrow 0} T_2 \\ &= \frac{n}{\beta} - \sum_{i=1}^n x_i + \infty = \infty \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(\beta; \alpha, p, y_{obs}) &< \frac{n}{\beta} - \sum_{i=1}^n x_i + \lim_{\beta \rightarrow \infty} T_1 + \lim_{\beta \rightarrow \infty} T_2 \\ &= \frac{n}{\beta} - \sum_{i=1}^n x_i \end{aligned}$$

اگر $g(\beta; \alpha, p, y_{obs}) < 0$ ، یعنی $\frac{n}{\beta} - \sum_{i=1}^n x_i < 0$ ، آنگاه $\beta > \frac{1}{x}$

قضیه ۳ : تابع

$$r(p; \alpha, \beta, y_{obs}) = \frac{n}{p-1} - \frac{n}{p \ln p} - \sum_{i=1}^n \frac{1 - [1 - e^{-\beta x_i}]^\alpha}{p + (1-p)(1 - e^{-\beta x_i})^\alpha}$$

وقتی α و β معلوم هستند وقتی دارای ریشه هستند، که $\sum_{i=1}^n (1 - e^{-\beta x_i})^\alpha < \frac{n}{p}$

برهان :

$$\lim_{p \rightarrow 0^+} r(p; \alpha, \beta, y_{obs}) = -n + \infty - \sum_{i=1}^n \frac{1 - (1 - e^{-\beta x_i})^\alpha}{(1 - e^{-\beta x_i})^\alpha} = \infty,$$

$$\lim_{p \rightarrow 1^-} r(p; \alpha, \beta, y_{obs}) = \frac{n}{p} - \sum_{i=1}^n (1 - (1 - e^{-\beta x_i})^\alpha)$$

اگر $\lim_{p \rightarrow 1} r(p; \alpha, \beta, y_{obs}) < 0$ آنگاه تابع $r(p; \alpha, \beta, y_{obs})$ دارای یک ریشه خواهد بود. بنابراین

$$\frac{n}{4} - \sum_{i=1}^n (1 - (1 - e^{-\beta x_i})^\alpha) < 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^n (1 - (1 - e^{-\beta x_i})^\alpha) < \frac{n}{4}.$$

۵.۳ برآورد پارامترها با الگوریتم EM

برآوردگرهای ماکسیمم درست‌نمایی (MLE) پارامترهای α ، β و p را می‌توان با روش‌های عددی از جمله روش نیوتن رافسون به دست آورد. یکی از روش‌های برآورد پارامترها در حالتی که مشاهدات به طور کامل در دسترس باشند روش برآورد ماکسیمم درست‌نمایی است. اما وقتی مشاهدات به طور کامل موجود نباشند یا مقادیر گمشده، سانسور شده یا پنهان شده باشد به دست آوردن MLE کاری بس دشوار است، در این صورت الگوریتم EM یکی از ابزارهای قدرتمند در این زمینه است که توسط آدامیس و لوکاس (۱۹۹۸)، لوکاس (۱۹۹۹)، کوش (۲۰۰۷) و طهماسبی و رضایی (۲۰۰۸) مورد استفاده قرار گرفته است. ابتدا تابع چگالی توأم، موقعی که نمونه کامل است در نظر گرفته می‌شود.

$$f(x, z; \theta) = \frac{\alpha \beta}{-\ln p} (1-p)^z e^{-\beta x} (1 - e^{-\beta x})^{\alpha-1} \times [1 - (1 - e^{-\beta x})^\alpha]^{z-1},$$

$$\alpha, \beta, x > 0, \quad 0 < p < 1, \quad z = 1, 2, \dots$$

گام اول: در مرحله E از الگوریتم EM، عبارت $E(Z|X)$ به دست آورده می‌شود:

$$E(Z|X) = \{1 - (1-p)[1 - (1 - e^{-\beta x})^\alpha]\}^{-1}$$

سپس تابع درست‌نمایی $L(\theta; x_i, z_i) = \prod_{i=1}^n f(x_i, z_i; \theta)$ تعیین می‌شود. گام دوم: در مرحله M از الگوریتم EM، مرحله ماکسیمم سازی تابع درست‌نمایی است، که در آن برآورد بدست آمده به روش ماکسیمم درست‌نمایی بجای Z_i امید

شرطی آن جایگزین می شود:

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}^{(h+1)} &= n \left\{ \sum_{i=1}^n [\{1 - (1 - p^{(h)})\right. \\ &\times [1 - (1 - e^{-\beta^{(h)}} x_i)^{\alpha^{(h)}}]\}^{-1} - 1] \\ &\times \left[\frac{(1 - e^{-\beta^{(h+1)}} x_i)^{\alpha^{(h+1)}} \ln(1 - e^{-\beta^{(h+1)}} x_i)}{1 - (1 - e^{-\beta^{(h+1)}} x_i)^{\alpha^{(h+1)}}} \right] \\ &- \sum_{i=1}^n \ln(1 - e^{-\beta^{(h+1)}} x_i) \}^{-1} \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \hat{\beta}^{(h+1)} &= n \left\{ \sum_{i=1}^n x_i - (\alpha^{(h+1)} - 1) \sum_{i=1}^n \frac{x_i e^{-\beta^{(h+1)}} x_i}{1 - e^{-\beta^{(h+1)}} x_i} \right. \\ &+ \sum_{i=1}^n [\{1 - (1 - p^{(h)}) \\ &\times [1 - (1 - e^{-\beta^{(h)}} x_i)^{\alpha^{(h)}}]\}^{-1} - 1] \\ &\times \left[\frac{x_i \alpha^{(h+1)} e^{-\beta^{(h+1)}} x_i}{1 - (1 - e^{-\beta^{(h+1)}} x_i)^{\alpha^{(h+1)}}} \right] \\ &\times \left. (1 - e^{-\beta^{(h+1)}} x_i)^{(\alpha^{(h+1)} - 1)} \right\}^{-1} \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \hat{p}^{(h+1)} &= 1 - \left\{ \frac{n}{p^{(h+1)} \ln p^{(h+1)}} \right. \\ &\times \left. \sum_{i=1}^n [1 - (1 - p^{(h)}) (1 - (1 - e^{-\beta^{(h)}} x_i)^{\alpha^{(h)}})] \right\}^{-1} \end{aligned} \quad (18)$$

در این روش تکرارها تا رسیدن به همگرایی ادامه می یابد، یعنی تا وقتی که فاصله دو برآورد متوالی به مقدار ناچیز همچون ε نزدیک شود.

۶.۳ واریانس و کوواریانس مجانبی برآوردگرهای ماکسیمم درستنمایی

با انتخاب یک نمونه به اندازه کافی بزرگ از توزیع GEL برآوردگرهای ماکسیمم درستنمایی تقریباً دارای توزیع نرمال با میانگین θ و ماتریس واریانس کوواریانس برابر با معکوس ماتریس اطلاع مورد انتظار یعنی $J(\theta) = E(I; \theta)$ که عناصر

ماتریس اطلاع مشاهده شده $I_{ij} = \frac{-\partial^2 \ell}{\partial \theta_i \partial \theta_j}$ ($i, j = 1, 2, 3$) است، که مقادیر مورد انتظار آنها با توجه به توزیع X حاصل می‌شود.

عناصر ماتریس متقارن یک ماتریس اطلاع مشاهده شده با توجه به روابط (۱) تا (۱۵) با گرفتن مشتق مرتبه دوم عبارت است از:

$$\begin{aligned}
 I_{11} &= \frac{n}{\alpha^2} + \sum_{i=1}^n \frac{p(1-p)(1-e^{-\beta x_i})^\alpha (\ln(1-e^{-\beta x_i}))^2}{(p+(1-p)(1-e^{-\beta x_i})^\alpha)^2} \\
 I_{12} &= \sum_{i=1}^n \frac{(1-p)x_i e^{-\beta x_i} (1-e^{-\beta x_i})^{\alpha-1}}{(p+(1-p)(1-e^{-\beta x_i})^\alpha)^2} \\
 &\quad \times [p + \alpha p \ln(1-e^{-\beta x_i}) + (1-p)(1-e^{-\beta x_i})^\alpha] - \sum_{i=1}^n \frac{x_i e^{-\beta x_i}}{1-e^{-\beta x_i}} \\
 I_{22} &= \frac{n}{\beta^2} + (\alpha-1) \sum_{i=1}^n \frac{x_i^2 e^{-\beta x_i}}{(1-e^{-\beta x_i})^2} \\
 &\quad - \sum_{i=1}^n \frac{\alpha(1-p)x_i^2 e^{-\beta x_i} (1-e^{-\beta x_i})^{\alpha-1}}{p+(1-p)(1-e^{-\beta x_i})^\alpha} \\
 &\quad + \sum_{i=1}^n \frac{\alpha p(\alpha-1)(1-p)x_i^2 e^{-2\beta x_i} (1-e^{-\beta x_i})^{\alpha-2}}{(p+(1-p)(1-e^{-\beta x_i})^\alpha)^2} \\
 &\quad - \sum_{i=1}^n \frac{\alpha(1-p)^2 x_i^2 e^{-2\beta x_i} (1-e^{-\beta x_i})^{2\alpha-2}}{(p+(1-p)(1-e^{-\beta x_i})^\alpha)^2} \\
 I_{13} &= - \sum_{i=1}^n \frac{(1-e^{-\beta x_i})^\alpha \ln(1-e^{-\beta x_i})}{(p+(1-p)(1-e^{-\beta x_i})^\alpha)^2} \\
 I_{23} &= - \sum_{i=1}^n \frac{\alpha \beta e^{-\beta x_i} (1-e^{-\beta x_i})^{\alpha-1}}{(p+(1-p)(1-e^{-\beta x_i})^\alpha)^2} \\
 I_{33} &= \frac{n}{(1-p)^2} - \frac{1+\ln p}{(p \ln p)^2} - \sum_{i=1}^n \frac{(1-(1-e^{-\beta x_i})^\alpha)^2}{(p+(1-p)(1-e^{-\beta x_i})^\alpha)^2}
 \end{aligned}$$

که ماتریس

$$J(\theta) = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} & J_{13} \\ J_{21} & J_{22} & J_{23} \\ J_{31} & J_{32} & J_{33} \end{bmatrix}$$

یک ماتریس اطلاع مورد انتظار با درایه‌های $J_{ij} = E(I_{ij})$ است، که با توجه به توزیع X عبارتند از:

$$J_{11} = \frac{n}{\alpha^{\gamma}} - \frac{n}{\alpha^{\gamma} \ln p} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \left(\frac{1-p}{p}\right)^{j+\gamma} \frac{j+1}{(j+\gamma)^{\gamma}}$$

$$\begin{aligned} J_{1\gamma} &= \frac{n}{\beta \ln p} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j \left(\frac{1-p}{p}\right)^{j+1} \frac{1}{i \left[\left(\frac{i}{\alpha} + j + \gamma\right)^{\gamma} - \frac{1}{\alpha^{\gamma}} \right]} \\ &\quad - \frac{n}{\beta(1-p) \ln p} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \left(\frac{1-p}{p}\right)^{j+\gamma} \frac{(j+\gamma)(j+1)}{\gamma i \left[\left(\frac{i}{\alpha} + j + \gamma\right)^{\gamma} - \frac{1}{\alpha^{\gamma}} \right]} \\ &\quad - \frac{n}{\beta \ln p} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \left(\frac{1-p}{p}\right)^{j+\gamma} \frac{(j+\gamma)(j+1)}{\gamma i \left[\left(\gamma + \frac{i}{\alpha}\right)^{\gamma} - \frac{1}{\alpha^{\gamma}} \right]} \end{aligned}$$

$$J_{1\gamma} = \frac{n}{\gamma \alpha p^{\gamma} \ln p} \left[\frac{1-p}{p} + \ln \left(\frac{p}{(1-p)^{\gamma}} \right) \right]$$

$$\begin{aligned} J_{\gamma\gamma} &= \frac{n}{\beta^{\gamma}} + \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{(-1)^i}{k} \left(\frac{1-p}{p}\right)^{i+1} \frac{\gamma n(\alpha-1)}{\beta^{\gamma} \ln p} \right. \\ &\quad \times \left[\frac{1}{[\alpha(i+1) - \gamma][\alpha(i+1) + k + j - 1]} \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{1}{[\alpha(i+1) - 1][\alpha(i+1) + k + j]} \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{\gamma n \alpha^{\gamma} (1-p)}{\beta^{\gamma} \ln p} \frac{(-1)^j (i+1)}{k} \left(\frac{1-p}{p}\right)^{i+\gamma} \right. \\ &\quad \times \left[\frac{1}{[\alpha(i+\gamma) - 1][\alpha(i+\gamma) + j + k]} \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{1}{(i+\gamma)[\alpha(i+\gamma) + j + k + 1]} \right] \right. \\ &\quad \left. - \frac{\gamma p \alpha (\alpha-1) (-1)^i (i+1)}{k \ln p} \left(\frac{1-p}{p}\right)^{i+\gamma} \right. \\ &\quad \left. \left[\frac{\alpha}{[\alpha(i+\gamma) - \gamma][\alpha(i+\gamma) + j + k - 1]} \right] \right. \\ &\quad \left. - \frac{\gamma \alpha}{[\alpha(i+\gamma) - 1][\alpha(i+\gamma) + j + k - \gamma]} \right\} \end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{(i+2)[\alpha(i+2) + j+k+1]}}] \} \\ J_{22} = \frac{n\alpha\beta}{2(1-p)^2 \ln p} \left[\frac{1-p}{2-p} - \frac{1-p}{p} \right. \\ \left. + \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{(j+2)(j+1)}{j+2+\frac{1}{\alpha}} \left(\frac{1-p}{p}\right)^{j+2} \right] \\ J_{23} = \frac{n}{(1-p)^2} - \frac{1+\ln p}{(p \ln p)^2} + \frac{n}{(1-p)^2} + \frac{n(1-2p)}{2p^2(1-p) \ln p}$$

با معکوس کردن ماتریس اطلاع مورد انتظار، ماتریس مجانبی واریانس کوواریانس برآوردهای ماکسیمم درست‌نمایی حاصل می‌شود.

۴ مطالعه شبیه‌سازی

نتایج شبیه‌سازی براساس قضایای ۱ تا ۳ برای تضمین وجود منحصر به فرد بودن راه حل هر تکرار پارامترها در الگوریتم EM به دست می‌آیند. هیچ محدودیتی در مورد حداکثر تعداد تکرارها مطرح نشده است و همگرایی زمانی در نظر گرفته می‌شود که اختلاف بین هر تکرار متوالی کمتر از 10^{-5} باشد. برای هر مقدار $\theta = (\alpha, \beta, p)$ ، با بکارگیری روابط (۱۶) تا (۱۸) با مقدارهای اولیه متفاوت برآوردهای مورد نظر در جدول ۱ ارائه شده‌اند. با افزایش حجم نمونه با ۱۰۰۰۰ بار تکرار شبیه‌سازی مونت کارلو خطای برآورد پارامترها کاهش می‌یابد.

به منظور ارزیابی دقت تقریب واریانس و کوواریانس MLEها ماتریس‌های اطلاع محاسبه شده است. در جداول ۲ و ۳ مقادیر ماتریس‌های اطلاع مشاهده شده و مورد انتظار محاسبه شده‌اند و مقادیر شبیه‌سازی شده $Var(\hat{\alpha})$ ، $Var(\hat{\beta})$ ، $Var(\hat{p})$ ، $Cov(\hat{\alpha}, \hat{\beta})$ ، $Cov(\hat{\alpha}, \hat{p})$ ، $Cov(\hat{\beta}, \hat{p})$ گزارش شده‌اند. همان‌طور که ملاحظه می‌شود مقادیر تقریبی به دست آمده کاملاً نزدیک به هم می‌باشند و همچنین با افزایش اندازه نمونه خطای برآورد کاهش می‌یابد. به عبارتی برای اندازه نمونه‌های بزرگ دو ماتریس اطلاع مشاهده شده و مورد انتظار تقریباً یکسان و دارای دقت بیشتری برای

برآورد هستند.

جدول ۱: برآورد ماکسیمم درستنمایی پارامترها با الگوریتم EM

\hat{p}	$\hat{\beta}$	$\hat{\alpha}$	(α, β, p)	n
۰/۴۹۵۸	۱/۰۸۸۵	۰/۵۲۵۶	(۰/۵, ۱, ۰/۵)	۵۰
۰/۴۹۵۸	۱/۰۶۰۰	۱/۰۵۵۶	(۱, ۱, ۰/۵)	۵۰
۰/۵۱۰۱	۱/۰۴۶۵	۲/۱۵۳۸	(۲, ۱, ۰/۵)	۵۰
۰/۲۹۹۲	۱/۱۱۴۷	۰/۵۳۳۲	(۰/۵, ۱, ۰/۳)	۵۰
۰/۶۹۴۸	۱/۰۵۴۷	۰/۵۱۵۹	(۰/۵, ۱, ۰/۷)	۵۰
۰/۳۰۵۲	۱/۰۴۲۹	۱/۵۹۰۴	(۱/۵, ۱, ۰/۳)	۵۰
۰/۷۰۳۱	۱/۰۵۴۱	۱/۶۱۷۸	(۱/۵, ۱, ۰/۷)	۵۰
۰/۵۰۲۱	۱/۰۲۱۷	۰/۵۰۹۰	(۰/۵, ۱, ۰/۵)	۲۰۰
۰/۵۰۸۱	۱/۰۱۲۳	۱/۰۱۷۹	(۱, ۱, ۰/۵)	۲۰۰
۰/۵۰۱۲	۱/۰۰۸۷	۲/۰۳۱۴	(۲, ۱, ۰/۵)	۲۰۰
۰/۳۰۲۹	۱/۰۲۹۷	۰/۵۱۱۹	(۰/۵, ۱, ۰/۳)	۲۰۰
۰/۷۰۳۶	۱/۰۱۱۶	۰/۵۰۲۹	(۰/۵, ۱, ۰/۷)	۲۰۰
۰/۳۰۳۵	۱/۰۱۴۷	۱/۵۳۱۰	(۱/۵, ۱, ۰/۳)	۲۰۰
۰/۶۹۷۰	۱/۰۰۸۸	۱/۵۲۳۳	(۱/۵, ۱, ۰/۷)	۲۰۰
۰/۵۰۲۴	۱/۰۰۳۸	۰/۵۰۲۵	(۰/۵, ۱, ۰/۵)	۵۰۰
۰/۵۰۸۲	۱/۰۰۶۵	۱/۰۰۷۳	(۱, ۱, ۰/۵)	۵۰۰
۰/۵۰۶۶	۱/۰۰۴۰	۲/۰۲۱۰	(۲, ۱, ۰/۵)	۵۰۰
۰/۲۹۵۷	۱/۰۰۹۴	۰/۵۰۸۸	(۰/۵, ۱, ۰/۳)	۵۰۰
۰/۷۰۲۴	۱/۰۱۱۷	۰/۵۰۴۸	(۰/۵, ۱, ۰/۷)	۵۰۰
۰/۳۰۰۲	۱/۰۰۵۳	۱/۵۲۰۲	(۱/۵, ۱, ۰/۳)	۵۰۰
۰/۷۰۱۰	۱/۰۰۴۲	۱/۵۰۷۵	(۱/۵, ۱, ۰/۷)	۵۰۰

جدول ۲: واریانس و کوواریانس مجانبی ماتریس اطلاع مشاهده شده

I_{23}	I_{13}	I_{12}	I_{23}	I_{22}	I_{11}	(α, β, p)	n
-۰/۰۰۰۴	-۰/۰۰۰۱	۰/۰۰۰۱	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۴۳	(۰/۵, ۱, ۰/۵)	۵۰
-۰/۰۲۱۵۸	-۰/۰۶۸۳	-۰/۰۱۳۷۰	۰/۰۹۵۱	۰/۴۵۵۸	۰/۰۲۲۷	(۱, ۱, ۰/۵)	۵۰
۰/۰۰۰۳۶	-۰/۰۰۰۰۳	۰/۰۴۶۵	۰/۰۰۰۶۸	۰/۰۲۸۷	۰/۱۵۰۰	(۲, ۱, ۰/۵)	۵۰
-۰/۰۰۰۰۲	۰/۰۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰۱	۰/۰۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰۰	۰/۰۰۰۴۰	(۰/۵, ۱, ۰/۳)	۵۰
-۰/۰۰۰۰۲	۰/۰۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰۰	۰/۰۰۰۴۵	(۰/۵, ۱, ۰/۷)	۵۰
-۰/۰۰۰۸۲	-۰/۰۰۰۴۰	۰/۰۰۲۰۰	۰/۰۰۰۳۳	۰/۰۱۰۵	۰/۰۵۷۷	(۱/۵, ۱, ۰/۳)	۵۰
۰/۰۰۰۰۷	۰/۰۰۰۰۱	۰/۰۰۳۲۶	۰/۰۰۰۱۴	۰/۰۲۸۷	۰/۰۸۰۴	(۱/۵, ۱, ۰/۷)	۵۰
-۰/۰۰۰۰۱	۰/۰۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰۰	۰/۰۰۰۱۱	(۰/۵, ۱, ۰/۵)	۲۰۰
۰/۰۱۴۳	۰/۰۰۰۴۵	۰/۰۱۳۹	۰/۰۰۰۷۰	۰/۰۳۷۹	۰/۰۰۹۷	(۱, ۱, ۰/۵)	۲۰۰
۰/۰۰۰۰۹	-۰/۰۰۰۰۱	۰/۰۱۲۱	۰/۰۰۰۱۸	۰/۰۰۰۷۵	۰/۰۳۸۱	(۲, ۱, ۰/۵)	۲۰۰
۰/۰۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰۰	۰/۰۰۰۱۰	(۰/۵, ۱, ۰/۳)	۲۰۰
-۰/۰۰۰۰۳	۰/۰۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰۲	۰/۰۰۰۱۱	(۰/۵, ۱, ۰/۷)	۲۰۰
-۰/۰۰۰۲۱	-۰/۰۰۰۱۰	۰/۰۰۰۵۳	۰/۰۰۰۰۹	۰/۰۰۰۲۸	۰/۰۱۴۹	(۱/۵, ۱, ۰/۳)	۲۰۰
۰/۰۰۰۰۲	۰/۰۰۰۰۰	۰/۰۰۰۸۴	۰/۰۰۰۰۴	۰/۰۰۰۷۳	۰/۰۰۲۰۰	(۱/۵, ۱, ۰/۷)	۲۰۰
۰/۰۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰۴	(۰/۵, ۱, ۰/۵)	۵۰۰
۰/۰۰۰۶۰	۰/۰۰۰۱۹	۰/۰۰۰۵۷	۰/۰۰۰۲۹	۰/۰۱۵۸	۰/۰۰۰۳۹	(۱, ۱, ۰/۵)	۵۰۰
۰/۰۰۰۰۳	-۰/۰۰۰۰۱	۰/۰۰۰۴۹	۰/۰۰۰۰۷	۰/۰۰۰۳۰	۰/۰۱۵۴	(۲, ۱, ۰/۵)	۵۰۰
۰/۰۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰۴	(۰/۵, ۱, ۰/۳)	۵۰۰
-۰/۰۰۰۰۱	۰/۰۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰۱	۰/۰۰۰۰۵	(۰/۵, ۱, ۰/۷)	۵۰۰
-۰/۰۰۰۰۹	-۰/۰۰۰۰۴	۰/۰۰۰۲۲	۰/۰۰۰۰۴	۰/۰۰۰۱۲	۰/۰۰۰۶۰	(۱/۵, ۱, ۰/۳)	۵۰۰
۰/۰۰۰۰۱	۰/۰۰۰۰۰	۰/۰۰۰۳۴	۰/۰۰۰۰۱	۰/۰۰۰۲۹	۰/۰۰۰۸۰	(۱/۵, ۱, ۰/۷)	۵۰۰

جدول ۳: واریانس و کوواریانس مجانبی ماتریس اطلاع مورد انتظار

$I_{۲۳}$	$I_{۱۳}$	$I_{۱۲}$	$I_{۲۳}$	$I_{۲۲}$	$I_{۱۱}$	(α, β, p)	n
۰/۰۰۳۳	-۰/۰۰۲۳	۰/۰۱۰۴	۰/۰۰۹۳	۰/۰۷۸۹	۰/۰۰۷۵	(۰/۵, ۱, ۰/۵)	۵۰
۰/۰۰۳۰	-۰/۰۰۳۲	۰/۰۳۱۹	۰/۰۰۹۳	۰/۰۵۲۰	۰/۰۴۸۳	(۱, ۱, ۰/۵)	۵۰
۰/۰۰۲۵	-۰/۰۰۴۲	۰/۰۵۳۷	۰/۰۰۹۵	۰/۰۳۱۴	۰/۱۹۴۳	(۲, ۱, ۰/۵)	۵۰
۰/۰۰۵۲	-۰/۰۰۲۸	۰/۰۰۹۴	۰/۰۰۸۹	۰/۱۰۹۴	۰/۰۰۶۸	(۰/۵, ۱, ۰/۳)	۵۰
۰/۰۰۴۵	-۰/۰۰۱۵	۰/۰۱۰۱	۰/۰۰۹۴	۰/۰۶۷۲	۰/۰۰۷۳	(۰/۵, ۱, ۰/۷)	۵۰
۰/۰۰۳۲	-۰/۰۰۸۲	۰/۰۰۴۲	۰/۰۰۹۲	۰/۰۴۱۳	۰/۰۹۸۲	(۱/۵, ۱, ۰/۳)	۵۰
۰/۰۰۲۹	-۰/۰۰۲۹	۰/۰۴۱۴	۰/۰۰۹۵	۰/۰۳۴۰	۰/۱۱۳۹	(۱/۵, ۱, ۰/۷)	۵۰
۰/۰۰۲۸	-۰/۰۰۱۷	۰/۰۰۲۵	۰/۰۰۸۸	۰/۰۱۹۸	۰/۰۰۲۱	(۰/۵, ۱, ۰/۵)	۲۰۰
۰/۰۰۳۰	-۰/۰۰۲۵	۰/۰۰۵۲	۰/۰۰۸۹	۰/۰۱۱۸	۰/۰۰۸۲	(۱, ۱, ۰/۵)	۲۰۰
۰/۰۰۲۳	-۰/۰۰۴۵	۰/۰۱۰۴	۰/۰۰۸۸	۰/۰۰۷۵	۰/۰۰۸۱	(۲, ۱, ۰/۵)	۲۰۰
۰/۰۰۴۳	-۰/۰۰۲۴	۰/۰۰۰۸	۰/۰۰۷۵	۰/۰۲۰۶	۰/۰۰۲۰	(۰/۵, ۱, ۰/۳)	۲۰۰
۰/۰۰۱۷	-۰/۰۰۱۱	۰/۰۰۲۴	۰/۰۰۸۹	۰/۰۱۵۶	۰/۰۰۱۷	(۰/۵, ۱, ۰/۷)	۲۰۰
۰/۰۰۳۳	-۰/۰۰۶۱	۰/۰۰۶۹	۰/۰۰۸۲	۰/۰۱۱۹	۰/۰۰۲۰	(۱/۵, ۱, ۰/۳)	۲۰۰
۰/۰۰۲۱	-۰/۰۰۱۶	۰/۰۰۹۴	۰/۰۰۹۱	۰/۰۰۸۳	۰/۰۲۲۵	(۱/۵, ۱, ۰/۷)	۲۰۰
۰/۰۰۲۰	-۰/۰۰۱۵	۰/۰۰۰۶	۰/۰۰۷۶	۰/۰۰۶۷	۰/۰۰۰۹	(۰/۵, ۱, ۰/۵)	۵۰۰
۰/۰۰۲۱	-۰/۰۰۲۷	۰/۰۰۱۴	۰/۰۰۷۹	۰/۰۰۴۵	۰/۰۰۳۹	(۱, ۱, ۰/۵)	۵۰۰
۰/۰۰۲۱	-۰/۰۰۴۴	۰/۰۰۴۲	۰/۰۰۸۲	۰/۰۰۳۴	۰/۰۱۸۸	(۲, ۱, ۰/۵)	۵۰۰
۰/۰۰۳۱	-۰/۰۰۲۲	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۶۶	۰/۰۰۹۱	۰/۰۰۱۲	(۰/۵, ۱, ۰/۳)	۵۰۰
۰/۰۰۲۸	-۰/۰۰۰۹	۰/۰۰۰۷	۰/۰۰۸۳	۰/۰۰۷۰	۰/۰۰۰۷	(۰/۵, ۱, ۰/۷)	۵۰۰
۰/۰۰۳۴	-۰/۰۰۴۹	۰/۰۰۱۰	۰/۰۰۷۲	۰/۰۰۵۴	۰/۰۱۰۳	(۱/۵, ۱, ۰/۳)	۵۰۰
۰/۰۰۱۷	-۰/۰۰۲۵	۰/۰۰۳۲	۰/۰۰۸۶	۰/۰۰۳۴	۰/۰۰۹۷	(۱/۵, ۱, ۰/۷)	۵۰۰

۵ بحث و نتیجه گیری

در این مقاله توزیع نمایی تعمیم یافته-لگاریتمی به عنوان ترکیبی از دو توزیع مهم و پرکاربرد نمایی تعمیم یافته و لگاریتمی معرفی گردید. این توزیع به دلیل دارا بودن تابع نرخ شکست نزولی و همچنین صعودی-نزولی می تواند کاربردهای مهمی در زمینه های مختلف علوم از جمله صنعت داشته باشد. در این مقاله خواص مهم توزیع مورد بررسی قرار گرفت. برآوردهای ماکسیمم درست‌نمایی از روش الگوریتم EM محاسبه گردید. با محاسبه واریانس و کوواریانس مجانبی برآوردها با استفاده از ماتریس اطلاع مشاهده شده و ماتریس اطلاع مورد انتظار مشاهده شد که با افزایش اندازه نمونه میزان خطای برآوردها کاهش می یابد.

لازم به ذکر است که به ازای $\alpha = 1$ ، توزیع GEL همان توزیع احتمال EL است که توسط طهماسبی و رضایی (۲۰۰۸) بررسی شده و برآورد پارامترها با مدل های

وایبول و گاما با توابع چگالی احتمال

$$f(x; \theta_{EL}) = \frac{-1}{\ln p} \cdot \frac{\beta(1-p)e^{-\beta x}}{1 - (1-p)e^{-\beta x}}; \quad \theta_{EL} = (p, \beta),$$

$$f(x; \theta_{Wei}) = \beta \lambda^\beta x^{\beta-1} e^{-(\lambda x)^\beta}; \quad \theta_{Wei} = (\lambda, \beta),$$

$$f(x; \theta_{Gam}) = \frac{\alpha^\beta}{\Gamma(\beta)} x^{\beta-1} e^{-\alpha x}; \quad \theta_{Gam} = (\alpha, \beta)$$

مقایسه شده‌اند. جدول ۴ شامل آماره کلموگروف-اسمیرنوف (K-S) و p-مقدار است که نشان می‌دهد توزیع EL و به طبع آن توزیع جدید GEL نسبت به توزیع‌های وایبول و گاما بهتر برازش شده است و می‌تواند جایگزین خوبی برای توزیع‌های طول عمر همچون وایبول و گاما باشد.

جدول ۴: مقایسه برازش توزیع‌های EL، وایبول و گاما

p-value	K-S	مقادیر اولیه θ	توزیع	n
۰/۹۸۸۵	۰/۰۸۸۵	(۰/۱۲۶۰, ۰/۰۰۰۴)	EL	۲۴
۰/۹۶۰۶	۰/۱۰۰۳	(۰/۰۰۳۷, ۰/۷۸۵۴)	وایبول	
۰/۸۳۲۸	۰/۱۲۳۵	(۰/۷۱۱۷, ۰/۰۰۰۵)	گاما	
۰/۰۶۷۳۱	۰/۰۴۹۱	(۰/۳۸۷۴, ۰/۰۰۰۸۴)	EL	۲۱۳
۰/۰۶۰۲۵	۰/۰۵۱۹	(۰/۰۱۵۷, ۰/۹۲۴۶)	وایبول	
۰/۰۳۶۶۵	۰/۰۶۲۵	(۰/۹۲۱۶, ۰/۰۰۰۹۹)	گاما	

تشکر و قدردانی

نویسندگان نهایت تشکر و قدردانی را از سردبیر، داوران و ویراستار ارجمند نشریه دارند، که با پیشنهادات ارزنده خویش باعث بهبود نسخه اولیه مقاله شدند.

مراجع

- Adamidis, K., (1999), An EM Algorithm for Estimating Negative Binomial Parameters, *Australian and Newzeland Journal of Statistics*, **41**, 213-221.

- Adamidis, K. and Loukas, S., (1998), A Lifetime Distribution with Decreasing Failure Rate, *Statistics and Probability Letters*, **39**, 35-42.
- Bakouch, H. S., Risti, M. M., Asgharzadeh, A., Esmaily, L. and Al-Zahrani, B. M., (2012), An Exponentiated Exponential Binomial Distribution with Application, *Statistics and Probability Letters*, **82**, 1067-1081.
- Barlow, R. E., Marshall, A. W. and Proschan, P., (1963), Properties of Probability Distributions with Monotone Hazard Rate, *Annual of Mathematical Statistics*, **34**, 375-389.
- Barlow, R. E. and Marshall, A. W., (1964), Bounds for Distribution with Monotone Hazard Rate I and II, *Annual of Mathematical Statistics*, **35**, 1234-1274.
- Barlow, R. E. and Marshall, A. W., (1965), Tables of Bounds for Distribution with Monotone Hazard Rate, *Journal of American Statistical Association*, **60**, 872-890.
- Dahiya, R.C. and Gurland, J., (1972), Goodness of Fit Tests for the Gamma and Exponential Distributions, *Technometrics*, **14**, 791-801.
- Gleser, L. J., (1989), The Gamma Distribution as a Mixture of Exponential Distributions, *American Statistics*, **43**, 115-117.
- Gurland, J. and Sethuraman, J., (1994), Reversal of Increasing Failure Rates When Pooling Failure Data, *Technometrics*, **36**, 416-418.
- Kus, C., (2007), A New Lifetime Distribution, *Computational Statistics & Data Analysis*, **51**, 4497-4509.

Lomax, K. S., (1954), Business Failure: Another Example of the Analysis of Failure Data, *Journal of American Statistical Association*, **49**, 847-852.

Marshall, A.W. and Proschan, F., (1965), Maximum Likelihood Estimates for Distributions with Monotone Failure Rate, *Annals of Mathematical Statistics*, **36**, 69-77.

Proschan, F., (1963), Theoretical Explanation of Observed Decreasing Failure Rate, *Technometrics*, **5**, 375-383.

Saunders, S. C. and Myhre, J.M., (1983), Maximum Likelihood Estimation for Two-Parameter Decreasing Hazard Rate Distributions Using Censored Data, *Journal of American Statistical Association*, **78**, 664-673.

Tahmasbi, R., Rezaei, S., (2008), A Two-Parameter Lifetime Distribution with Decreasing Failure Rate, *Computational Statistics & Data Analysis*, **52**, 3889-3901.