مجله علوم آماری، بهار و تابستان ۱۳۹۱
جلد ۶، شماره ۱، ص ۵۵-۶۷

مقایسه عددی برخی از اندازه‌های فی-واگرا برای مفصل‌های فارلی-گامبل-مورگنسترن تعمیم‌یافته

سمانه خسروی، محمد امینی، غلامرضا محتشمی برزادران
گروه آمار، دانشگاه فردوسی مشهد

تاریخ دریافت: ۱۳۹۱/۱/۱۵ تاریخ آخرین بازنگری: ۱۳۹۱/۶/۱۶

چکیده : این مقاله در جستجوی ملاکی بهینه برای مقایسه برخی از اندازه‌های فی-واگرا است، که در آن میزان وابستگی خانواده مفصل فارلی-گامبل-مورگنسترن تعمیم‌یافته به‌روش عددی محاسبه می‌شود. بر این اساس، اندازه هلینجر به‌عنوان اندازه فی-واگرای بهینه پیشنهاد می‌شود.

واژه‌های کلیدی : ا ندازه فی-واگرا، مفصل‌های فارلی-گامبل-مورگنسترن تعمیم‌یافته.

۱ مقدمه

اندازه‌های وابستگی فی-واگرا (ϕ-واگرا) که توسط سیزر (۱۹۶۳) معرفی شد، برای تعیین درجه وابستگی بین توزیع توأم و حاصل‌ضرب توزیع‌های کناری کاربرد داشته و به‌دلیل خصوصیاتی که دارند، از اهمیت ویژه برخوردارند. صفر شدن این اندازه‌ها بیان‌گر استقلال است. این مطلب، یک ویژگی کاربردی اکثر این اندازه‌ها در بررسی استقلال بین عناصر بردار توأم است. خواص این اندازه‌ها توسط میچز و زاگرافوس (۲۰۰۶) مورد مطالعه قرار گرفت.

فرض کنید $\mathbf{X}=(X_1, X_2)$ یک بردار تصادفی روی فضای اندازه حاصل‌ضربی (χ, A, μ) باشد، که در آن $\chi=(\chi_1, \chi_2)$، $\mu=(\mu_1, \mu_2)$ و $A=(A_1, A_2)$ و برای $i=1,2$، χ_i فضای

آدرس الکترونیک مسئول مقاله: سمانه خسروی، khosravi_s88@yahoo.com
کد موضوع‌بندی ریاضی (۲۰۰۰): 62H20 و 94A17

اقلیدسی، A_i σ-جبر مجموعه‌های بورلی و μ_i اندازه لبگ هستند. فرض کنید $f \equiv f(x_۱, x_۲)$ چگالی توأم $\mathbf{X}$ نسبت به μ باشد و برای $i = ۱, ۲$، $f_i(x_i)$ چگالی کناری x_i نسبت به μ_iباشد، یک رده کلی از اندازه‌های ϕ-واگرا برای اندازه‌گیری وابستگی توأم به‌صورت

$$D_\phi(f \parallel g) = \int_\chi \phi(\frac{f}{g})\ gd\mu = \int_\chi \phi(\frac{f(x_۱, x_۲)}{f_۱(x_۱)f_۲(x_۲)})f_۱(x_۱)f_۲(x_۲)d\mu,$$

معرفی می‌شود، که در آن $g \equiv f_۱(x_۱)f_۲(x_۲)$ و ϕ یک تابع محدب پیوسته حقیقی از R^+ به R است. با انتخاب توابع مختلفی از ϕ، اندازه‌های واگرایی معروف بدست می‌آیند. به‌عنوان مثال $\phi(u) = u\log(u)$ اندازه کولبک-لایبلر، $\phi(u) = (\sqrt{u} - ۱)^۲$ اندازه هلینجر و $\phi(u) = (u - ۱)^۲$ اندازه $\chi^۲$ را نتیجه می‌دهد.

سؤال مطرح این است که با وجود تعداد زیاد اندازه‌های ϕ-واگرا کدام اندازه بهترین است؟ یعنی در اندازه‌گیری ساختار وابستگی روی داده‌ها نسبت به دیگر اندازه‌ها بهتر عمل می‌کند. رنی (**۱۹۶۱**) برای تعیین اهمیت اندازه وابستگی چند متغیره مجموعه‌ای از اصول موضوعه را پیشنهاد کرد. برخی از نویسندگان این فرضیات بدیهی را رد کرده‌اند، در حالی‌که افرادی از قبیل جو (**۱۹۸۹**) و ماری و کوتز (**۲۰۰۴**) این اصول را بسط دادند. یکی از انتقادات مهمی که به این اصول وارد می‌شود، این است که فقط تحت شرایط قوی برقرار هستند. اندازه‌های ϕ-واگرا در همه این اصول با کم‌ترین فرضیات روی تابع محدب ϕ صدق می‌کنند.

تعریف ۱ : فرض کنید $C(u,v)$ یک تابع مفصل پیوسته باشد، آن‌گاه تابع چگالی‌مفصل به‌صورت $c(u,v) = \frac{\partial^۲ C(u,v)}{\partial u \partial v}$ تعریف می‌شود.

قضیه ۱ (محتشمی و امینی، ۲۰۱۰): فرض کنید $(X_۱, X_۲)$ دارای توزیع توأم F و توابع توزیع کناری $F_۱$ و $F_۲$ و چگالی‌مفصل متناظر c باشد، آن‌گاه

$$D_\phi(F \parallel F_۱F_۲) = \int_۰^۱ \int_۰^۱ \phi(c(u,v))dudv$$

۲ مفصل‌های فارلی-گامبل-مورگنسترن و برخی تعمیم‌ها

توزیع فارلی-گامبل-مورگنسترن[۱] (FGM) و ویژگی‌های آن توسط فارلی (۱۹۶۰) و گامبل (۱۹۶۰) مورد بررسی قرار گرفت. تابع مفصل و چگالی مفصل FGM به‌ترتیب عبارتند از

$$C(u,v) = uv[1 + \alpha(1-u)(1-v)],$$

$$c(u,v) = 1 + \alpha(1-2u)(1-2v),$$

که در آن‌ها $-1 \leq \alpha \leq 1$. قابل ذکر است که

- میانگین حسابی دو مفصل FGM، یک مفصل FGM است.
- هر عضو از خانواده مفصل FGM، مطلقاً پیوسته و در شرط $C = \hat{C}$ صدق می‌کند، که $\hat{C}$ مفصل بقا است و به‌صورت $\hat{C}(u,v) = u + v - 1 + C(1-u, 1-v)$ تعریف می‌شود.
- مفصل FGM متعلق به خانواده مفصل‌های ارشمیدسی نیست.
- تابع چگالی مفصل FGM حول نقطه $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ متقارن است.
- استقلال برقرار است اگر و تنها اگر $\alpha = 0$.
- ضرایب همبستگی τ-کندال و ρ-اسپیرمن به‌ترتیب به بازه‌های $[-\frac{2}{9}, \frac{2}{9}]$ و $[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$ تعلق دارند.

علامت‌ساز و ماه‌پیشانیان (۱۳۹۰) مولدهای انعطاف‌پذیر برای مفصل‌های FGM تعمیم‌یافته ارائه داده‌اند. بعلاوه با هدف افزایش دامنه تغییرات ضرایب وابستگی، سارمانوف (۱۹۷۴)، هانگ و کوتز (۱۹۹۹)، ماری و کوتز (۲۰۰۴)، بایراموف و کوتز (۲۰۰۰)، لای و زای (۲۰۰۰) و نلسن (۲۰۰۶) تعمیم‌های مختلفی برای مفصل FGM پیشنهاد کردند. این توابع در جدول ۱ ارائه شده‌اند، که در آن B^+ و B^- توابعی از a و b به‌صورت زیر هستند

$$\begin{aligned} B^+(a,b) &= [\frac{b(a+b-1) + \sqrt{ab(a+b-1)}}{(a+b)(a+b-1)}]^{b-1} \\ &\times[1 - \frac{b(a+b-1) + \sqrt{ab(a+b-1)}}{(a+b)(a+b-1)}]^{a-1} \\ &\times[(a+b)\frac{b(a+b-1) + \sqrt{ab(a+b-1)}}{(a+b)(a+b-1)} - b], \end{aligned}$$

---
[۱] Farlie Gumbel Morgenstern

جدول ۱: تابع مفصل و چگالی‌مفصل FGM تعمیم‌یافته

تعمیم اول هانگ-کوتز	تابع مفصل	$uv[1+\alpha(1-u^p)(1-v^p)]$
	چگالی‌مفصل	$1+\alpha(1-(1+p)u^p)(1-(1+p)v^p)$
	حدود α	$-(\max\{1,p^2\})^{-2}\leq\alpha\leq p^{-1},\ p>0$
تعمیم دوم هانگ-کوتز	تابع مفصل	$uv[1+\alpha(1-u)^p(1-v)^p]$
	چگالی‌مفصل	$1+\alpha(1-u)^{p-1}(1-v)^{p-1}$ $(1-(1+p)u)(1-(1+p)v)$
	حدود α	$-1\leq\alpha\leq(\frac{p+1}{p-1})^{p-1}\ ,p>1$
تعمیم اول بایراموف-کوتز	تابع مفصل	$uv[1+\alpha(1-u^a)^b(1-v^a)^b],\ a,b>0$
	چگالی‌مفصل	$1+\alpha(1-u^a)^{b-1}(1-v^a)^{b-1}$ $[1-u^a(1+ab)][1-v^a(1+ab)]$
	حدود α	$-\min\{1,[\frac{1}{a^b}(\frac{ab+1}{b-1})^{b-1}]^2\}\leq\alpha$ $\leq[\frac{1}{a^b}(\frac{ab+1}{b-1})^{b-1}]$
تعمیم دوم بایراموف-کوتز	تابع مفصل	$u^pv^p[1+\alpha(1-u^q)^n(1-v^q)^n],$ $p,q,n\geq 1$
	چگالی‌مفصل	$u^{p-1}v^{p-1}p^2+\alpha u^{p-1}v^{p-1}$ $(1-u^q)^{n-1}(p-v^q(p+qn))$ $(1-v^q)^{n-1}(p-u^q(p+qn))$
	حدود α	$-\min\{1,\frac{p^2}{q^2}[\frac{p+qn}{q(n-1)}]^{2(n-1)}\}\leq\alpha$ $\leq\frac{p}{q}[\frac{p+qn}{q(n-1)}]^{n-1}$
تعمیم لای-زای	تابع مفصل	$uv+\alpha u^bv^b(1-u)^a(1-v)^a,\ a,b\geq 1$
	چگالی‌مفصل	$1+\alpha(uv)^{b-1}[(1-u)(1-v)]^{a-1}$ $[b-(a+b)u][b-(a+b)v]$
	حدود α	$-\min\{\frac{1}{[B^+(a,b)]^2},\frac{1}{[B^-(a,b)]^2}\}\leq\alpha$ $\leq-\frac{1}{B^+(a,b)B^-(a,b)}$
تعمیم سارمانوف	تابع مفصل	$uv+uv(1-u)(1-v)$ $[3\alpha+5\alpha^2(1-2u)(1-2v)]$
	چگالی‌مفصل	$1+3\alpha(2u-1)(2v-1)$ $+\frac{5}{4}\alpha^2[3(2u-1)-1][3(2v-1)-1]$
	حدود α	$\lvert\alpha\rvert\leq\frac{\sqrt{7}}{5}\approx 0/55$

$$\begin{aligned} B^{-}(a,b) &= [\frac{b(a+b-1-\sqrt{ab(a+b-1)}}{(a+b)(a+b-1)}]^{b-1} \\ &\times[1-\frac{b(a+b-1)-\sqrt{ab(a+b-1)}}{(a+b)(a+b-1)}]^{a-1} \\ &\times[(a+b)\frac{b(a+b-1)-\sqrt{ab(a+b-1)}}{(a+b)(a+b-1)}-b]. \end{aligned}$$

برای تعیین چگونگی تغییرات ضرایب همبستگی در این تعمیم‌ها، توجه خود را به ضریب همبستگی اسپیرمن در تعمیم‌های هانگ-کوتز معطوف می‌کنیم. در مورد تعمیم اول هانگ-کوتز پارامتر وابستگی α می‌باشد و برای p های مختلف با افزایش α یعنی با افزایش درجات وابستگی، ضریب همبستگی زیاد می‌شود، زیرا با توجه به نتایج بیان شده در ماری و کوتز (۲۰۰۴) داریم $\rho = Corr(U,V) = \frac{3\alpha p^2}{(p+2)^2}$. یعنی به‌ازای p ثابت، ضریب همبستگی و پارامتر α رابطه‌ای مستقیم با هم دارند. با توجه به حدود α که در جدول ۱ آمده است، حدود ρ به‌صورت

$$-3(p+2)^{-2}\min\{1,p^2\} \leq \rho \leq \frac{3p}{(p+2)^2}$$

است. بنابراین برای $p=2$، $\rho_{\max}=\frac{3}{8}$ و برای $p=1$، $\rho_{\min}=-\frac{3}{16}$. ماری و کوتز (۲۰۰۴) برای تعمیم دوم نیز رابطهٔ $\rho = 12\alpha(\frac{1}{(p+2)(p+1)})^2$ را بین ضریب همبستگی و α به‌دست آوردند. با توجه به جدول ۱ نامساوی

$$-12(\frac{1}{(p+1)(p+2)})^2 \leq \rho \leq 12\frac{(p-1)^{1-p}(p+1)^{p-3}}{(p+2)^2}$$

برقرار است. برای $p=1/877$، $\rho_{\max}=0/3912$ و $\rho_{\min}=-\frac{1}{3}$ که از حدود مربوط به اولین تعمیم بزرگتر هستند.

۳ نتایج اصلی

اندازه‌های ϕ-واگرا که وابستگی بین تابع توزیع توأم و توابع توزیع کناری را نشان می‌دهند، برای توابع توزیع مختلف قابل محاسبه هستند. بین اندازه‌های کولبک-لایبلر، χ^2 و هلینجر روابط

$$D_{KL}(f\parallel g) \approx \frac{1}{2}D_{\chi^2}(f\parallel g) \qquad (1)$$

$$D_{\chi^2}(f\parallel g) \approx 4D_H(f\parallel g)$$

برقرار هستند، زیرا

$$D_{KL}(f \parallel g) \;=\; \int_{\chi} f \log \frac{f}{g} d\mu = -\int_{\chi} f \log \frac{g}{f} d\mu,$$

از طرفی با استفاده از بسط تیلور داریم

$$\begin{aligned}\log \frac{g}{f} = \log(1 + (\frac{g}{f} - 1)) &= (\frac{g}{f} - 1) - \frac{1}{2}(\frac{g}{f} - 1)^2 + o(\frac{g}{f} - 1)^3 \\ &\approx -\frac{1}{2}(\frac{g}{f} - 1)^2.\end{aligned}$$

که رابطه (۱) را نتیجه می‌دهد. بعلاوه

$$D_{\chi^2}(f \parallel g) = \int_{\chi} \frac{(f-g)^2}{f} d\mu = \int_{\chi} (\sqrt{f} - \sqrt{g})^2 (1 + \sqrt{\frac{g}{f}})^2 d\mu \approx 4 D_H(f \parallel g).$$

بنابراین به‌طور تقریبی $D_{\chi^2}(f \parallel g) \geq D_{KL}(f \parallel g) \geq D_H(f \parallel g)$. در ادامه برقراری این رابطه برای خانواده مفصل FGM تعمیم‌یافته، با محاسبات عددی نشان داده می‌شود. در این بخش بر مبنای مطالعات میچز و زاگرافوس (۲۰۰۶) چند اندازهٔ خاص از اندازه‌های ϕ-واگرا برای برخی از تعمیم‌های FGM بر مبنای اصول زیر با هم مقایسه می‌شوند.

(الف) اگر ماکسیمم مقدار اندازه وابستگی $D_{\phi_0}(F \parallel F_1F_2)$ متناهی باشد، آن‌گاه در بین دیگر اندازه‌ها ترجیح داده می‌شود.

(ب) در ردهٔ اندازه‌های وابستگی، اگر به‌ازای هر $\phi \in \Phi$ داشته باشیم $D_{\phi_0}(F \parallel F_1F_2) \leq D_{\phi}(F \parallel F_1F_2)$، که در آن $D_{\phi_0}(F \parallel F_1F_2) < +\infty$ و Φ کلاس توابع محدب پیوسته حقیقی از R^+ به R هستند، آن‌گاه $D_{\phi_0}(F \parallel F_1F_2)$، اندازه ϕ-واگرای بهینه است.

در اینجا به‌ازای مقادیر مختلف پارامتر(های) توزیع‌های مفصل چند اندازه ϕ-واگرا را برای تعمیم‌های مفصل FGM به‌دست آورده و با هم مقایسه عددی می‌شوند. توجه شود که اعداد جدول‌ها همان انتگرال قضیه ۱ هستند که به‌ازای چگالی‌مفصل‌های مختلف و $\phi(u) = u\log(u)$ (اندازه کولبک-لایبلر)، $\phi(u) = (\sqrt{u} - 1)^2$ (اندازه هلینجر) و $\phi(u) = (u-1)^2$ (اندازه χ^2) محاسبه می‌شوند، هر اندازه با کمترین مقدار، به‌عنوان اندازهٔ بهینه انتخاب می‌شود.

۱.۳ تعمیم‌های هانگ-کوتز

مقادیر اندازه‌های کولبک-لایبلر، $\chi^۲$ و هلینجر برای اولین تعمیم هانگ-کوتز به‌ازای مقادیر $p = ۰/۵$ $(-۱ \le \alpha \le ۲)$، $p = ۱$ $(-۱ \le \alpha \le ۱)$ و $p = ۲$ $(-\frac{۱}{۴} \le \alpha \le \frac{۱}{۲})$ محاسبه و در جدول ۲ ارائه شده‌اند. همان‌طور که ملاحظه می‌شود هر چه مقدار p کمتر باشد، اندازهٔ

جدول ۲: تعمیم اول هانگ-کوتز

p	α	اندازه: کولبک-لایبلر	اندازه: هلینجر	اندازه: $\chi^۲$
	-۱	۰/۰۰۸۰۶۷	۰/۰۰۴۱۳۵	۰/۰۱۵۶۲۵
	۰/۱	۰/۰۰۰۰۰۷	۰/۰۰۰۰۰۴	۰/۰۰۰۱۵۶
۰/۵	۰/۵	۰/۰۰۱۹۴۷	۰/۰۰۰۹۷۳	۰/۰۰۳۹۰۶
	۱	۰/۰۰۷۸۱۷	۰/۰۰۳۹۳۱	۰/۰۱۵۶۲۵
	۲	۰/۰۳۲۲۹۲	۰/۰۱۶۸۴۷	۰/۰۶۲۵
	-۱	۰/۰۵۹۹۹۷	۰/۰۳۲۴۶۸	۰/۱۱۱۱۱۱
	$-۰/۵$	۰/۰۱۰۴۱۱	۰/۰۰۷۱۵۴	۰/۰۲۷۷۷۸
۱	۰/۵	۰/۰۱۰۴۱۱	۰/۰۰۷۱۵۴	۰/۰۲۷۷۷۸
	۱	۰/۰۵۹۹۹۷	۰/۰۳۲۴۶۸	۰/۱۱۱۱۱۱
	$-۰/۲۵$	۰/۰۲۱۵۱۲	۰/۰۱۱۴۵۷	۰/۰۴
	۰/۱	۰/۰۰۳۱۸	۰/۰۰۱۵۸۷	۰/۰۰۶۴
۲	۰/۲۵	۰/۰۲۰۰۰۶	۰/۰۱۰۱۰۲	۰/۰۴
	۰/۵	۰/۰۸۵۶۷	۰/۰۴۷۱۹۳	۰/۱۶

وابستگی کمتر است و در بین آنها، اندازه هلینجر دارای کمترین مقدار است، یعنی اندازهٔ ϕ-واگرای بهینه می‌باشد و نتیجه حاصل مؤید اثبات نظری بیان شده در ابتدای بخش است.

نتایج دومین تعمیم هانگ-کوتز به‌ازای مقادیر $p = ۱/۵$ $(-۱ \le \alpha \le ۲)$، $p = ۲$ $(-۱ \le \alpha \le ۳)$ و $p = ۱۰$ $(-۱ \le \alpha \le ۶)$ در جدول ۳ ارائه شده‌اند. همان‌طور که ملاحظه می‌شود هر چه مقدار p کمتر باشد، اندازهٔ وابستگی کمتر است و در بین سه اندازه، اندازهٔ هلینجر، اندازه ϕ-واگرای بهینه می‌باشد.

۲.۳ تعمیم‌های بایراموف-کوتز

اندازه‌های کولبک-لایبلر، $\chi^۲$ و هلینجر برای تعمیم‌های اول و دوم بایراموف-کوتز محاسبه شده و نتایج اولین تعمیم به‌ازای مقادیر $a = ۱, b = ۲$ $(-۱ \le \alpha \le ۳)$، $a = ۱, b = ۳$ $(-۱ \le \alpha \le ۴)$، $a = ۱, b = ۵$ $(-۱ \le \alpha \le \frac{۸۱}{۱۶})$، $a = ۱, b = ۵۰$ $(-۱ \le \alpha \le ۵)$،

جدول ۳: تعمیم دوم هانگ-کوتز

p	α	اندازه: کولبک-لایبلر	اندازه: هلینجر	اندازه: χ^2
	۱−	۰/۰۱۹۱۲۱	۰/۰۱۰۲۴۷	۰/۰۳۵۱۵۶
	۰/۱	۰/۰۰۰۱۷۵	۰/۰۰۰۰۰۰۹	۰/۰۰۰۳۵۱
۱/۵	۰/۵	۰/۰۰۴۳۴۴	۰/۰۰۲۱۶۴	۰/۰۰۸۷۸۹
	۱	۰/۰۱۷۳۸۶	۰/۰۰۸۷۲۴	۰/۰۳۵۱۵۶
	۲	۰/۰۷۲۵۵۵	۰/۰۵۸۴۹۷	۰/۱۴۰۶۲۵
	۱−	۰/۰۰۹۹۲	۰/۰۰۵۳۸۸	۰/۰۱۷۷۷۸
	۰/۱	۰/۰۰۰۰۰۰۹	۰/۰۰۰۰۰۰۴	۰/۰۰۰۱۷۸
۲	۰/۵	۰/۰۰۲۱۶۹	۰/۰۰۱۰۷۳	۰/۰۰۴۴۴۴
	۱	۰/۰۰۸۵۵۵	۰/۰۰۴۲۲۷	۰/۰۱۷۷۷۸
	۲	۰/۰۳۴۱۳۲	۰/۰۱۷۱۶۵	۰/۰۷۱۱۱۱
	۳	۰/۰۷۹۸۸۴	۰/۰۴۳۰۲۴	۰/۱۶
	۱−	۰/۰۰۰۳۶۹	۰/۰۰۰۲۰۵	۰/۰۰۰۶۳۸
	۰/۱	۰	۰	۰
۱۰	۰/۵	۰/۰۰۰۰۰۷	۰/۰۰۰۰۰۴	۰/۰۰۰۱۵۷
	۱	۰/۰۰۰۲۸۸	۰/۰۰۰۱۳۹	۰/۰۰۰۶۲۸
	۶	۰/۰۰۹۲۷۵	۰/۰۰۴۶	۰/۰۲۳۲۶۸

$a = 2, b = 2$، $(-1 \le \alpha \le \frac{5}{4})$، $a = 3, b = 2$ $(-\frac{49}{81} \le \alpha \le \frac{7}{9})$ و $a = 10, b = 2$، $(-\frac{441}{10000} \le \alpha \le \frac{21}{100})$ در جدول ۴ ارائه شده‌اند. همان‌طور که ملاحظه می‌شود برای مقادیر ثابت a، هر چه مقدار b بیشتر باشد، اندازهٔ وابستگی کمتر است و اگر b ثابت باشد، برای مقادیر بزرگ‌تر a، اندازهٔ وابستگی بیشتر است. هم‌چنین در بین سه اندازه، اندازهٔ هلینجر، اندازه ϕ-واگرای بهینه است.

نتایج دومین تعمیم بایراموف-کوتز به‌ازای مقادیر $p = 1, q = 1, n = 2$، $(-1 \le \alpha \le 3)$، $p = 1, q = 2, n = 2$ $(-1 \le \alpha \le \frac{5}{4})$ و $p = 2, q = 2, n = 2$، $(-1 \le \alpha \le 3)$ در جدول ۵ ارائه شده‌اند. اگر p و n ثابت باشند، هر چه مقادیر پارامتر q کمتر باشد، اندازه وابستگی کمتر است، هم‌چنین اگر q و n ثابت باشند، هر چه مقادیر پارامتر p کمتر باشد، اندازه وابستگی کمتر است واندازه هلینجر، اندازه ϕ-واگرای بهینه است.

جدول ۴: تعمیم اول بایراموف-کوتز

a	b	α	اندازه		
			کولبک -لایبلر	هلینجر	$\chi^{۲}$
		−۱	۰/۰۰۹۹۲۰	۰/۰۰۵۳۸۸	۰/۰۱۷۷۷۸
		۰/۱	۰/۰۰۰۰۰۹	۰/۰۰۰۰۰۴	۰/۰۰۰۱۷۸
		۰/۵	۰/۰۰۲۱۶۰	۰/۰۰۱۰۷۳	۰/۰۰۴۴۴۴
	۲	۱	۰/۰۰۸۵۵۵	۰/۰۰۴۲۲۷	۰/۰۱۷۷۷۸
		۲	۰/۰۳۴۱۳۲	۰/۰۱۷۱۶۵	۰/۰۷۱۱۱۱
		۳	۰/۰۷۹۸۸۳	۰/۰۴۳۰۲۴	۰/۱۶۰۰۰۰
		−۱	۰/۰۰۴۱۹۹	۰/۰۰۲۳۰۸	۰/۰۰۷۳۴۷
		۰/۱	۰/۰۰۰۰۰۴	۰/۰۰۰۰۰۲	۰/۰۰۰۰۰۷
	۳	۰/۵	۰/۰۰۰۸۸۶	۰/۰۰۰۴۳۶	۰/۰۰۱۸۳۷
		۱	۰/۰۰۳۴۵۶	۰/۰۰۱۶۸۶	۰/۰۰۷۳۴۷
۱		۴	۰/۰۵۴۲۸۱	۰/۰۲۸۴۱۰	۰/۱۱۷۵۵۱
		−۱	۰/۰۰۱۴۸۰	۰/۰۰۰۸۲۱	۰/۰۰۲۵۵۱
		۰/۱	۰/۰۰۰۰۰۱	۰	۰/۰۰۰۰۰۲
	۵	۰/۵	۰/۰۰۰۳۰۵	۰/۰۰۰۱۵۰	۰/۰۰۰۶۳۸
		۱	۰/۰۰۱۱۸۱	۰/۰۰۰۵۷۲	۰/۰۰۲۵۵۱
		$\frac{۸۱}{۱۶}$	۰/۰۲۷۹۱۶	۰/۰۱۴۱۹۸	۰/۰۶۵۳۷۳
		−۱	۰/۰۰۰۰۰۱	۰	۰/۰۰۰۰۰۲
		۰/۱	۰	۰	۰
	۵۰	۱	۰/۰۰۰۰۰۱	۰	۰/۰۰۰۰۰۲
		۳	۰/۰۰۰۰۰۹	۰/۰۰۰۰۰۴	۰/۰۰۰۲۲۵
		۵	۰/۰۰۰۲۳۹	۰/۰۰۰۱۱۱	۰/۰۰۰۶۲۵
		−۱	۰/۰۹۱۹۴۶	۰/۰۵۱۷۱۱	۰/۱۶۵۱۲۰
		۰/۱	۰/۰۰۰۸۲۵	۰/۰۰۰۴۱۳	۰/۰۰۱۶۵۱
۲	۲	۰/۵	۰/۰۲۰۸۹۲	۰/۰۱۰۵۷۸	۰/۰۴۱۲۸۰
		۱	۰/۰۸۸۲۷۶	۰/۰۴۷۲۴۶	۰/۱۶۵۱۲۰
		$\frac{۵}{۴}$	۰/۱۴۷۰۷۸	۰/۰۸۵۹۵۳	۰/۲۵۷۹۹۹
		$-\frac{۴۹}{۸۱}$	۰/۱۰۲۸۲۹	۰/۰۵۷۵۶۶	۰/۱۸۵۵۶۲
		۰/۱	۰/۰۰۲۵۳۷	۰/۰۰۱۲۷۰	۰/۰۰۵۰۷۷
۳	۲	۰/۵	۰/۰۶۶۲۵۵	۰/۰۳۴۵۷۷	۰/۱۲۶۷۶۷
		$\frac{۷}{۹}$	۰/۱۷۸۲۹۲	۰/۱۰۶۸۹۵	۰/۳۰۷۶۴۶
		$-\frac{۴۴۱}{۱۰۰۰۰}$	۰/۰۱۰۹۳۸	۰/۰۰۶۵۵۶	۰/۰۱۷۴۷۱
		۰/۰۱	۰/۰۰۰۴۳۸	۰/۰۰۰۲۱۶	۰/۰۰۰۸۹۸
۱۰	۲	۰/۱	۰/۰۳۹۰۸۰	۰/۰۱۸۸۷۱	۰/۰۸۹۸۳۶
		$\frac{۲۱}{۱۰۰}$	۰/۱۸۴۵۱۰	۰/۱۰۶۱۶۰	۰/۳۹۶۱۷۷

جدول ۵: تعمیم دوم بایراموف-کوتز

p	q	n	α	اندازه: کولبک-لایبلر	هلینجر	χ^2
			۱−	۰/۰۰۹۹۲	۰/۰۰۵۳۸۸	۰/۰۱۷۷۷۸
			۰/۱	۰/۰۰۰۰۰۹	۰/۰۰۰۰۰۴	۰/۰۰۰۱۷۸
			۰/۵	۰/۰۰۲۱۶۹	۰/۰۰۱۰۷۳	۰/۰۰۴۴۴۴
۱	۱		۱	۰/۰۰۸۵۵۵	۰/۰۰۴۲۲۷	۰/۰۱۷۷۷۸
			۲	۰/۰۳۴۱۳۲	۰/۰۱۷۱۶۵	۰/۰۷۱۱۱۱
			۳	۰/۰۷۹۸۸۴	۰/۰۴۳۰۲۴	۰/۱۶
			۱−	۰/۰۹۱۹۴۶	۰/۰۵۱۷۱۱	۰/۱۶۵۱۲
۱	۲	۲	۰/۱	۰/۰۰۰۸۲۵	۰/۰۰۰۴۱۳	۰/۰۰۱۶۵۱
			۰/۵	۰/۰۲۰۸۹۲	۰/۰۱۰۵۷۸	۰/۰۴۱۲۸
			۱	۰/۰۸۸۲۷۶	۰/۰۴۷۲۴۷	۰/۱۶۵۱۲
			$\frac{۵}{۴}$	۰/۱۴۷۰۷۸	۰/۰۸۵۹۵۳	۰/۲۵۸
			۱−	–	–	۰/۶۸۰۲۲۴
			۰/۱	۰/۴۶۷۲۳۹	۰/۲۳۲۰۶۷	۰/۸۹۵۰۰۹
۲	۲		۱	۱/۳۵۴۴۷۹	۰/۳۷۹۵۲۳	۲/۸۲۹۴۳
			۳	۳/۹۲۰۰۲۴	۰/۸۷۵۵۹۴	۱۲/۷۹۵۰۳

۳.۳ تعمیم لای-زای

نتایج تعمیم لای-زای، به‌ازای مقادیر $b = 1, a = 1$، $(-1 \le \alpha \le 1)$، $b = 2, a = 1$، $(-1 \le \alpha \le 3)$، $b = 10, a = 1$، $(-1 \le \alpha \le 6)$، $b = 100$، $a = 1$، $(-1 \le \alpha \le 7)$، $b = 2, a = 2$، $(-27 \le \alpha \le 27)$، $b = 2, a = 10$، $(-500 \le \alpha \le 1000)$ و $b = 2, a = 100$، $(-47411 \le \alpha \le 10^5)$ در جدول ۶ ارائه شده‌اند. همان‌طور که ملاحظه می شود برای مقادیر ثابت a، هر چه مقادیر b بیشتر باشد، اندازه وابستگی کمتر است و اگر b ثابت باشد، هر چه مقدار a بیشتر باشد، اندازه وابستگی کمتر است و اندازه هلینجر، اندازه ϕ-واگرای بهینه می‌باشد.

۴.۳ تعمیم سارمانوف

اندازه‌های کولبک-لایبلر، χ^2 و هلینجر برای تعمیم سارمانوف به‌ازای مقادیر مختلف α و در جدول ۷ ارائه شده‌اند، همانطور که ملاحظه می‌شود اندازه هلینجر، که در بین سایر اندازه‌ها به‌ازای مقادیر مختلف α کمترین مقدار را داراست، اندازه مفصل ϕ-واگرای بهینه است.

جدول ۶: تعمیم لای-زای

a	b	α	اندازه: کولبک-لایبلر	اندازه: هلینجر	χ^2
		$-$۱	۰/۰۵۹۹۹۷	۰/۰۳۲۴۶۸	۰/۱۱۱۱۱۱
		$-$۰/۵	۰/۰۱۰۴۱۱	۰/۰۰۷۱۵۴	۰/۰۲۷۷۷۸
	۱	۰/۵	۰/۰۱۰۴۱۱	۰/۰۰۷۱۵۴	۰/۰۲۷۷۷۸
		۱	۰/۰۵۹۹۹۷	۰/۰۳۲۴۶۸	۰/۱۱۱۱۱۱
		$-$۱	۰/۰۰۹۹۲	۰/۰۰۵۳۸۸	۰/۰۱۷۷۷۸
		$-$۰/۵	۰/۰۰۲۳۱۱	۰/۰۰۱۱۸۳	۰/۰۰۴۴۴۴
	۲	۰/۵	۰/۰۰۲۱۶۹	۰/۰۰۱۰۷۳	۰/۰۰۴۴۴۴
		۱	۰/۰۰۸۵۵۵	۰/۰۰۴۲۲۶	۰/۰۱۷۷۷۸
		۳	۰/۰۷۹۸۸۴	۰/۰۴۳۰۲۴	۰/۱۶
۱		$-$۱	۰/۰۰۹۹۲	۰/۰۰۵۳۸۸	۰/۰۱۷۷۷۸
		$-$۰/۵	۰/۰۰۰۳۶۹	۰/۰۰۰۲۰۶	۰/۰۰۶۲۸۱
	۱۰	۰/۵	۰/۰۰۰۰۰۷	۰/۰۰۰۰۰۴	۰/۰۰۰۱۵۷
		۱	۰/۰۰۰۲۸۹	۰/۰۰۰۱۳۹	۰/۰۰۰۶۲۸
		۶	۰/۰۰۹۰۰۷	۰/۰۰۴۴۴	۰/۰۲۲۶۱۳
		$-$۱	۰	۰	۰
		$-$۰/۵	۰	۰	۰
	۱۰۰	۰/۵	۰	۰	۰
		۱	۰	۰	۰
		۷	۰/۰۰۰۱۱۴	۰/۰۰۰۰۰۵	۰/۰۰۰۳۰۶
		$-$۲۷	۰/۱۵۱۹۷۶	۰/۰۸۹۱۱	۰/۲۶۴۴۹
		$-$۰/۵	۰/۰۰۰۰۰۲	۰/۰۰۰۰۰۲	۰/۰۰۰۰۰۹
۲	۲	$-$۰/۱	۰	۰	۰
		۰/۱	۰	۰	۰
		۰/۵	۰/۰۰۰۰۰۴	۰/۰۰۰۰۰۲	۰/۰۰۰۰۰۹
		۲۷	۰/۱۵۱۹۷۶	۰/۰۸۹۱۱	۰/۲۶۴۴۹
		$-$۵۰۰	۰/۰۰۷۰۳	۰/۰۰۴۰۶	۰/۰۱۱۸۷۴
		$-$۰/۵	۰	۰	۰
۱۰	۲	۰/۵	۰	۰	۰
		۱۰۰۰	۰/۰۲۳۶۳۳	۰/۰۱۲۴۹۲	۰/۰۴۷۴۹۶
		$-$۴۷۴۱۱	۰/۰۰۰۰۰۸	۰/۰۰۰۰۰۵	۰/۰۰۰۱۳۶
		$-$۰/۵	۰	۰	۰
۱۰۰	۲	$-$۰/۱	۰	۰	۰
		۰/۱	۰	۰	۰
		۰/۵	۰	۰	۰
		۱۰۰۰۰۰	۰/۰۰۰۵۲۲	۰/۰۰۰۲۸۵	۰/۰۰۱۰۸۶

جدول ۷: تعمیم سارمانوف

α	اندازه: کولبک-لایبلر	اندازه: هلینجر	χ^2
$-$۰/۵۵	–	–	۰/۳۹۴۰۰۶
$-$۰/۵	۰/۱۵۶۲۸۴	۰/۰۸۳۲۲۴	۰/۳۱۲۵
۰/۱	۰/۰۰۵۰۳۷	۰/۰۰۲۵۲۱	۰/۰۱۰۱
۰/۵	۰/۱۵۶۲۸۴	۰/۰۸۳۲۲۴	۰/۳۱۲۵
۰/۵۵	–	–	۰/۳۹۴۰۰۶

بحث و نتیجه‌گیری

در این مقاله اندازه‌های ϕ-واگرا، توزیع مفصل FGM و تعمیم‌های آن معرفی و اندازه ϕ-واگرای بهینه در خانواده توزیع مفصل FGM تعمیم‌یافته تععین شدند و برای هر مورد اندازه هلینجر به‌عنوان اندازه ϕ-واگرای بهینه انتخاب شد. لازم به ذکر است که اندازه‌های χ^2، کولبک-لایبلر و هلینجر برای توزیع‌های مفصل بررسی شده در این مقاله برحسب قدرمطلق α صعودی هستند و می‌توان این ویژگی را برای سایر اندازه‌های ϕ-واگرا نیز نشان داد.

تقدیر و تشکر

نویسندگان مقاله از داوران، ویراستار و سردبیر محترم مجله به خاطر ارائه پیشنهادات ارزنده که سبب بهبود مطالب مقاله گردید، کمال تشکر و قدردانی را دارند.

مراجع

علامت ساز، م. ح. و ماه پیشانیان، ف. (۱۳۹۰)، مولدهای انعطاف پذیر برای مفصل‌های FGM تعمیم‌یافته، مجله علوم آماری، **۵**، ۷۴-۶۱.

Bairamov, I. G. and Kotz, S. (2000), On a New Family of Positive Quadrant Dependent Bivariate Distribution, *Technical Report, The George Washington University.*

Csiszar, I. (1963), Eine Informations Theoretische Ungleichung und ihre Anwendung auf den Beweis der Ergodizitat on Markhoffschen Ketten, *Mathematical Institue of the Hungarian Academy of Sciences*, **8**, 85-105.

Farlie, D. J. G. (1960), The Performance of some Correlation Coefficients for a General Bivariate Distribution, *Biometrika*, **47**, 307-323.

Gumbel, E. J. (1960), Bivariate Exponential Distributions, *Journal of the American Statistical Association*, **55**, 698-707.

Huang, J. S. and Kotz, S. (1999), Modifications of the Farlie-Gumbel-Morgenstern Distributions: A Tough Hill to Climb, *Metrika*, **49**, 307-323.

Joe, H. (1989), Relative Entropy Measures of Multivariate Dependence, *Journal of the American Statistical Association*, **84**, 157-164.

Lai, C. D. and Xie, M. (2000), A New Family of Positive Quadrant Dependent Bivariate Distributions, *Statistics and Probability Letters*, **46**, 359-364.

Mari, D. D. and Kotz, S. (2004). Correlation and Dependence, *Imperial College Press*, 113-138.

Micheas, A. C. and Zografos, K. (2006), Measuring Stochastic Dependence Using Phi-divergence, *Journal of Multivariate Analysis* **97**, 765-784.

Mohtashami, G. R. and Amini, M. (2010), Information Measures via Copula Functions, *Journal of Iranian Statistical Sciences* **7**, 47-60.

Renyi, A. (1961), On Measures of Entropy and Information, *Proceedings of the Fourth Berkeley Symposium Statistics and Probabillity*, **1**, 547-561.

Sarmanov, I. O. (1974), New Forms of Correlation Relationships between Positive Quantities applied in Hydrology, *International Association of Hydrological Sciences*, **100**, 104-109.