

برآورد بیزی پارامترهای توزیع چوله نرمال

محمد غلامی فشارکی^۱، انوشیروان کاظم نژاد^۲، فرید زایری^۲

^۱گروه آمار زیستی، دانشگاه تربیت مدرس

^۲گروه آمار زیستی، دانشگاه علوم پزشکی شهید بهشتی

تاریخ دریافت: ۱۳۹۱/۱/۱۶ تاریخ آخرین بازنگری: ۱۳۹۱/۵/۲۶

چکیده: توزیع چوله نرمال، یکی از توزیع های مهم در تحلیل داده های غیرنرمال است. از آنجایی که تابع چگالی توزیع چوله نرمال حاوی تابع انتگرال است محاسبه تابع چگالی این توزیع در رهیافت بیزی است در این مقاله با استفاده از تعریف شرطی توزیع چوله نرمال روشی برای برآورد بیزی پارامترهای این توزیع ارائه شده است. سپس در مطالعه ای شبیه سازی دقت این روش با روش معمولی مورد مقایسه قرار گرفته است.

واژه های کلیدی: رهیافت بیزی، روش شرطی، توزیع چوله نرمال.

۱ مقدمه

یکی از فرض های اساسی در بسیاری از مدل سازی های آماری، نرمال بودن توزیع مشاهدات است. متأسفانه این فرض در بسیاری از موارد قابل بررسی نبوده یا غیر واقع گرایانه است. به همین دلیل آماردانان به ناچار برای تحلیل داده ها از روش هایی مانند تبدیل داده ها یا روش های ناپارامتری بهره می جویند (بندیویدهای و همکاران، ۲۰۱۰). استفاده از روش های

آدرس الکترونیک مسئول مقاله: انوشیروان کاظم نژاد، Kazem_an@modares.ac.ir

کد موضوع بندی ریاضی (۲۰۰۰): ۶۰E۰۵، ۶۲F۱۵

ناپارامتری علی رغم کاهش اطلاعات از لحاظ اجرایی دارای محدودیت‌های زیادی هستند از طرف دیگر روش تبدیل متغیرها نیز، منجر به مشکلاتی چون تفسیر نامناسب پارامترهای تحت بررسی، احراز نشدن فرض نرمال توام متغیرها در حالات چندمتغیره (تسونگ و لی، ۲۰۰۳؛ لی و همکاران، ۲۰۰۵؛ جارا و همکاران، ۲۰۰۸)، پنهان شدن فرایند تولید داده‌ها (جارا و همکاران، ۲۰۰۸) و یکتا نبودن تبدیل در مطالعات مختلف می‌گردد. روش دیگر برای تحلیل داده‌های غیرنرمال استفاده از توزیع‌هایی است که به لحاظ نظری قادر به تبیین تغییرات مشاهدات بدون استفاده از فرض نرمال هستند. یکی از توزیع‌های معروف در این زمینه، توزیع چوله نرمال است. اما علی‌رغم مزایای این توزیع، به خاطر وجود تابع انتگرال در تابع چگالی این توزیع استفاده از آن در رهیافت بیزی با مشکل مواجه می‌شود. از این رو برخی از محققان برای تعریف توزیع چوله نرمال از یک روش غیرمستقیم و ترکیب خطی دو توزیع نرمال و نیم‌نرمال به این هدف نائل می‌آیند. در این مقاله پس از بررسی خصوصیات توزیع در بخش ۳، در بخش دو و بیان رهیافت بیزی توزیع نرمال چوله با استفاده از نرم‌افزار WinBUGS پرداخته و سپس در بخش پنجم با انجام شبیه‌سازی به بررسی دقت و صحت هر یک از دو روش ارائه شده پرداخته و نهایتاً به بحث و نتیجه‌گیری ارائه شده است.

۲ توزیع چوله نرمال

آزالینی (۱۹۸۵) توزیع چوله نرمال^۱ (SN) با پارامتر چولگی λ رابه صورت

$$f_{\lambda}(x) = \frac{1}{2} \phi(x) \Phi(\lambda x) \quad \lambda \in \mathbb{R} \text{ \& } x \in \mathbb{R} \quad (1)$$

معرفی کرد، که در آن $\phi(\cdot)$ تابع چگالی و $\Phi(\cdot)$ تابع توزیع تجمعی نرمال استاندارد هستند. در این توزیع با در نظر گرفتن λ برابر با صفر، توزیع SN به توزیع نرمال تبدیل می‌شود، همچنین با در نظر گرفتن λ برابر با $\pm\infty$ ، توزیع SN به توزیع نیم نرمال^۲ تبدیل می‌شود (اسپینوسا ۲۰۰۸). آزالینی نشان داده پارامتر چولگی λ در بازه $(-0.995, 0.995)$ تغییر می‌کند (ناداریج و کوتز، ۲۰۰۳). یعنی از توزیع SN در مواقعی می‌توان استفاده کرد که چولگی داده‌ها زیاد نباشد.

^۱ Skew Normal

^۲ Half Normal

اگر X دارای توزیع چوله‌نرمال با پارامتر λ باشد، آنگاه میانگین، واریانس، ضریب چولگی و کشیدگی و تابع مولد گشتاور این توزیع به ترتیب عبارتند از (آزالی، ۱۹۸۵)

$$\begin{aligned} E(X) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \delta \quad \delta = \lambda / \sqrt{1 + \lambda^2} \in [-1, +1] \\ \text{Var}(X) &= 1 - \frac{2}{\pi} \delta^2 \\ \text{Skewness} &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} (4 - \pi) \text{Sign}(\lambda) \left(\frac{\lambda^2}{\frac{\pi}{\pi} + (\frac{\pi}{\pi} - 1) \lambda^2} \right)^{\frac{3}{2}} \\ \text{Kurtosis} &= 2(\pi - 3) \text{Sign}(\lambda) \left(\frac{\lambda^2}{\frac{\pi}{\pi} + (\frac{\pi}{\pi} - 1) \lambda^2} \right)^2 \\ m_X(t) &= 2e^{t^2} 2\Phi(\delta \times t) \end{aligned}$$

برخی از خصوصیات دیگر این توزیع که مشابه توزیع نرمال هستند عبارتند از (گنتون، ۲۰۰۴)

$$-X \sim SN(-\lambda), \quad |X| \sim 2\phi(x)I(x > 0), \quad X^2 \sim \chi^2(1)$$

در حالت کلی Y دارای توزیع چوله‌نرمال با پارامتر مکانی μ ، پارامتر پراکندگی σ^2 و پارامتر چولگی λ است، هرگاه تابع چگالی آن به صورت

$$f(y, \mu, \sigma, \lambda) = \frac{2}{\sigma} \phi\left(\frac{y - \mu}{\sigma}\right) \Phi\left(\lambda \frac{y - \mu}{\sigma}\right)$$

باشد (گنتون، ۲۰۰۴). از طرف دیگر در صورتی که X دارای توزیع چوله‌نرمال استاندارد با پارامتر چولگی λ باشد، هر توزیع چوله‌نرمال را می‌توان از توزیع چوله‌نرمال استاندارد و با استفاده از ترکیب خطی $\mu + \sigma X$ به دست آورد. خصوصیت مهم دیگری که آزالی (۲۰۰۵) ثابت کرد این است که اگر X_1 و X_2 مستقل و دارای توزیع نرمال استاندارد باشند، آنگاه توزیع، متغیر تصادفی

$$Y = \lambda |X_1| + X_2 \quad (2)$$

دارای توزیع چوله‌نرمال استاندارد با پارامتر λ است.

۳ روش انتخاب مدل و تحلیل بیزی

آماردانان در تحلیل داده‌ها از دو رهیافت کلاسیک و بیزی بهره می‌جویند. در رهیافت کلاسیک، پارامتر مورد بررسی ثابت و نامعلوم بوده و بر اساس نمونه‌ای تصادفی در مورد آن

تصمیم‌گیری می‌شود. این در حالی است که در رهیافت بیزی، پارامتر مورد بررسی تحقیقی از یک متغیر تصادفی است که تغییرات آن توسط یک توزیع احتمال، تحت عنوان توزیع پیشین، توصیف می‌شود. این توزیع بر اساس تجربیات قبلی آزمایشگر تعیین شده و بر اساس نمونه تصادفی به روز می‌شود. اصطلاحاً توزیع پیشین اصلاح شده بر اساس مشاهدات جدید را توزیع پسین نامیده و تصمیم‌گیری در مورد پارامترهای مدل بر اساس آن انجام می‌شود (کونگ دان، ۲۰۰۳، بولستند، ۲۰۰۴؛ گلدستین و وف، ۲۰۰۷) فرض کنید $y = (y_1, \dots, y_n)$ بردار مشاهدات نمونه‌ای تصادفی از توزیع $f(y|\theta)$ باشد. توزیع پسین را می‌توان به صورت

$$\pi(\theta|y) = \frac{f(y|\theta)\pi(\theta)}{m(y)} \propto f(y|\theta)\pi(\theta)$$

نوشت، که در آن $m(y) = \int f(y, \theta) d\theta$ توزیع کناری y است. در رهیافت بیزی معمولاً توزیع پیشین از یک خانواده انعطاف‌پذیر که دارای یک یا چند پارامتر است، انتخاب می‌شود. یعنی توزیع پیشین θ به صورت $\pi(\theta|\gamma)$ است، که در آن γ پارامتری با مقدار حقیقی یا برداری است و می‌تواند معلوم یا نامعلوم باشد. در حالتی که نامعلوم باشد می‌تواند ثابت و یا متغیری تصادفی یا یک توزیع خاص باشد. بنابراین در بحث آمار بیزی سه روش بیز با تک پیشین^۳ (در این حالت مقدار γ معلوم است)، بیز سلسله‌مراتبی^۴ (در این حالت γ نامعلوم و متغیری تصادفی است که دارای یک توزیع خاص می‌باشد) و بیز تجربی^۵ (در این حالت γ نامعلوم و ثابت که توسط نمونه و فرم توزیع پیشین برآورد می‌گردد) مطرح می‌شود. تحلیل‌های بیزی دارای مزایایی چون استفاده از تجربیات و اعتقادات پیشین در مورد پارامتر مورد مطالعه، محاسبه توزیع برآورد به جای برآورد نقطه‌ای (کونگدون، ۲۰۰۳؛ بولستند، ۲۰۰۴) حساس نبودن ضرایب به حجم نمونه (کاس رفتی، ۱۹۹۵)، وجود خصوصیت اصل درست‌نمایی^۶ (ساویله، ۲۰۰۸). تعابیر احتمالی درست برای p-value، فواصل اطمینان و استفاده از نقش توابع زیان نسبت به روش کلاسیک هستند (رفتاری، ۱۹۸۶).

۴ توزیع‌های پیشین و توام پسین

برآورد پارامتر مستقیم: چون کار با تابع توزیع به خاطر وجود انتگرال در آن دشوار است، در تعیین چگالی پسین شرطی، به ناچار تخمین تابع توزیع نرمال استفاده می‌شود. علی‌رغم

^۳ Single Prior Bayes

^۴ Hierarchical Bayes

^۵ Empirical Bayes

^۶ Likelihood Principle

تنوع روش‌های متعدد در تخمین تابع تجمعی نرمال (بولینگ و همکاران ۲۰۰۹)، که در همه آنها تابع توزیع نرمال به صورت تقریبی $(f(k_1, \dots, k_p)) \approx k_0 - k_1 \exp(-k_2 \dots - k_p)$ در نظر گرفته می‌شود، به طوری که k_0, k_1, \dots, k_p پارامترهای تعیین‌کننده تابع توزیع نرمال هستند، عملاً استفاده از این تقریب‌ها برای محاسبه چگالی پسین شرطی میسر نیست. از این رو با استفاده از رگرسیون کمترین توان‌های دوم و قرار دادن $\ln(\Phi(x))$ ، به عنوان متغیر پاسخ و استفاده از اسپلاین بهترین تخمین‌گر برای تابع توزیع نرمال محاسبه می‌شود. سپس با محاسبه $\frac{\sum_{i=1}^n |\Phi(x_k) - \Phi(x_{k'})|}{n}$ ، میزان خطای مدل برابر با ۰٫۰۰۸۴ حاصل گردید.

$$\Phi(x) \approx \exp(-0.727z + 0.813zx - 0.243z^2) \tag{3}$$

$$z = \begin{cases} 1 & x \leq 2 \\ 0 & x > 2 \end{cases}$$

با در نظر گرفتن $\theta = (\mu, \sigma, \lambda)$ و انتخاب توزیع‌های پیشین به صورت

$$\mu \sim N(\mu_\mu, \sigma_\mu^2), \quad \lambda \sim N(\mu_\lambda, \sigma_\lambda^2), \quad \sigma^2 \sim IGamma(\alpha_\sigma, \beta_\sigma)$$

می‌توان تابع چگالی پسین را به صورت

$$\begin{aligned} \pi(\theta|y) &\propto f(y|\theta)\pi(\theta) \\ &\propto \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(y_i - \mu)^2\right) \Phi\left(\lambda \frac{(y_i - \mu)}{\sigma}\right) \\ &\times \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\mu} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma_\mu^2}(\mu - \mu_\mu)^2\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\lambda} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma_\lambda^2}(\lambda - \mu_\lambda)^2\right) \\ &\times \frac{\beta_\sigma^{\alpha_\sigma} \left(\frac{1}{\sigma^2}\right)^{\alpha_\sigma+1} \times \exp\left(-\frac{\beta_\sigma}{\sigma^2}\right)}{\Gamma(\alpha_\sigma)} \end{aligned} \tag{4}$$

به دست آورد. حال با جایگذاری (۳) در (۴) داریم

$$\begin{aligned} \pi(\theta|y) &\propto \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{n/2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\mu} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\lambda} \frac{\beta_\sigma^{\alpha_\sigma}}{\Gamma(\alpha_\sigma)} \exp\left(-0.727 \sum_{i=1}^n z_i\right) \left(\frac{1}{\sigma^2}\right)^{\alpha_\sigma + \frac{n}{2} + 1} \\ &\times \exp\left\{-\frac{(-0.5 \sum_{i=1}^n (y_i - \mu)^2 + 0.243 \sum_{i=1}^n z_i (y_i - \mu)^2 \lambda^2)}{\sigma^2}\right\} \\ &+ \frac{(0.813 \lambda \sum_{i=1}^n z_i (y_i - \mu))}{\sigma} - \frac{1}{2\sigma_\mu^2}(\mu - \mu_\mu)^2 \\ &- \frac{1}{2\sigma_\lambda^2}(\lambda - \mu_\lambda)^2 - \frac{\beta_\sigma}{\sigma^2} \end{aligned} \tag{5}$$

چون مقدار $\frac{1}{\sqrt{\pi\sigma_\mu\sigma_\lambda}} \frac{\beta\sigma}{\Gamma(\alpha_\sigma)} \exp(-\sigma/\sqrt{2}\sum_{i=1}^n z_i)$ به θ بستگی ندارد با حذف آن از رابطه (۵) داریم

$$\begin{aligned} \pi(\theta|y) &\propto \left(\frac{1}{\sigma^\gamma}\right)^{\alpha_\sigma + \frac{n}{\gamma} + 1} \\ &\times \exp\left\{-\frac{(\sigma/\sqrt{5}\sum_{i=1}^n (y_i - \mu)^\gamma + \sigma/\sqrt{2}\sum_{i=1}^n z_i (y_i - \mu)^\gamma \lambda^\gamma)}{\sigma^\gamma}\right\} \\ &+ \frac{(\sigma/\sqrt{2}\sum_{i=1}^n z_i (y_i - \mu)^\gamma)}{\sigma} - \frac{1}{\sqrt{2}\sigma_\mu^\gamma} (\mu - \mu_\mu)^\gamma \\ &- \frac{1}{\sqrt{2}\sigma_\lambda^\gamma} (\lambda - \mu_\lambda)^\gamma - \frac{\beta\sigma}{\sigma^\gamma} \end{aligned} \quad (۶)$$

با خلاصه‌سازی (۶) توزیع‌های شرطی کامل به صورت زیر حاصل می‌شوند

$$\begin{aligned} (\lambda|y, \sigma^\gamma, \mu) &\sim N\left(\frac{\frac{\mu_\lambda}{\sigma_\lambda^\gamma} + \sigma/\sqrt{2}\sum_{i=1}^n z_i (y_i - \mu)^\gamma}{\sigma/\sqrt{2}\sum_{i=1}^n z_i (y_i - \mu)^\gamma + \frac{1}{\sigma_\lambda^\gamma}}, \frac{1}{\sigma/\sqrt{2}\sum_{i=1}^n z_i (y_i - \mu)^\gamma + \frac{1}{\sigma_\lambda^\gamma}}\right) \end{aligned} \quad (۷)$$

$$\begin{aligned} (\mu|y, \sigma^\gamma, \lambda) &\sim N\left(\frac{\frac{\mu_\mu}{\sigma_\mu^\gamma} - \sigma/\sqrt{2}\sum_{i=1}^n z_i}{\frac{1 + \sigma/\sqrt{2}\sum_{i=1}^n z_i}{\sigma^\gamma} - (1 + \sigma/\sqrt{2}\sum_{i=1}^n z_i) \frac{\sum_{i=1}^n y_i z_i}{\sigma^\gamma}}}, \frac{1 + \sigma/\sqrt{2}\sum_{i=1}^n z_i}{\sigma^\gamma} + \frac{1}{\sigma_\mu^\gamma}\right) \\ &, \frac{1 + \sigma/\sqrt{2}\sum_{i=1}^n z_i}{\sigma^\gamma} + \frac{1}{\sigma_\mu^\gamma} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{\sigma}|y, \lambda, \mu\right) &\sim \text{Nad}\left(\sqrt{2}\alpha_\sigma + n, \sigma/\sqrt{5}\sum_{i=1}^n (y_i - \mu)^\gamma \right. \\ &\left. + \sigma/\sqrt{2}\sum_{i=1}^n z_i (y_i - \mu)^\gamma \lambda^\gamma + \beta\sigma, \sigma/\sqrt{2}\sum_{i=1}^n z_i (y_i - \mu)^\gamma\right) \end{aligned} \quad (۸)$$

که در آن Nad(a,b,c) بیانگر توزیع ناداراجاه (ناداراجاه، ۲۰۰۸) با تابع چگالی

$$f(x; \alpha, a, b) = Cx^{\alpha-1} \exp(-ax^\gamma - bx) \quad x > 0, a > 0, -\infty < b < +\infty$$

است، به طوری که $C = \int x^{\alpha-1} \exp(-ax^\gamma - bx)$ ضریب نرمال‌ساز است. با استفاده از MCMC می‌توان برآورد بیزی پارامترهای $\theta = (\mu, \sigma^\gamma, \lambda)$ را محاسبه کرد.

برآورد پارامتر غیرمستقیم: در روش غیرمستقیم و با استفاده از

(۲) می توان تابع چگالی چوله نرمال را به فرم دسته معادلات

$$\begin{aligned} f_{\theta}(y|t) &\sim N(y - \mu - \lambda|t|, \sigma^2) \\ f(t) &\sim N(0, \sigma^2) \\ f_{\theta}(y, t) &= f_{\theta}(y|t) \times f(t) \end{aligned} \quad (9)$$

نوشت. همچنین با در نظر گرفتن $\theta = (\mu, \sigma^2, \lambda)$ می توان توزیع پسین را به صورت

$$\begin{aligned} \pi(\theta|y, t) \propto & \left(\frac{1}{\sigma^2}\right)^{\alpha_{\sigma} + n + 1} \exp\left(-\frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \mu - \lambda|t_i|)^2}{2\sigma^2}\right) \\ & - \frac{\sum_{i=1}^n t_i^2}{2\sigma^2} - \frac{(\mu - \mu_{\mu})^2}{2\sigma_{\mu}^2} - \frac{(\lambda - \mu_{\lambda})^2}{2\sigma_{\lambda}^2} - \frac{\beta_{\sigma}}{\sigma^2} \end{aligned} \quad (10)$$

به دست آورد. حال توزیع های شرطی کامل پارامترها عبارتند از

$$(\lambda|y, \sigma^2, \mu, t) \sim N\left(\frac{\frac{\mu_{\lambda}}{\sigma_{\lambda}^2} + \frac{\sum_{i=1}^n |t_i|(y_i - \mu)}{\sigma^2}}{\frac{\sum_{i=1}^n |t_i|}{\sigma^2} + \frac{1}{\sigma_{\lambda}^2}}, \frac{\sum_{i=1}^n |t_i|}{\sigma^2} + \frac{1}{\sigma_{\lambda}^2}\right)$$

$$(\mu|y, \sigma^2, \lambda, t) \sim N\left(\frac{\frac{\mu_{\mu}}{\sigma_{\mu}^2} + \frac{(n\bar{y} - \lambda \sum_{i=1}^n |t_i|)}{\sigma^2}}{\frac{n}{\sigma^2} + \frac{1}{\sigma_{\mu}^2}}, \frac{n}{\sigma^2} + \frac{1}{\sigma_{\mu}^2}\right)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{\sigma^2}|y, \lambda, \mu, t\right) &\sim \text{Gamma}(\alpha_{\sigma} + n + 0.5) \\ &, 0.5 \sum_{i=1}^n (y_i - \mu - \lambda|t_i|)^2 + \sum_{i=1}^n t_i^2 + \beta_{\sigma} \end{aligned}$$

۵ مطالعه شبیه سازی

با استفاده از بسته sn در نرم افزار R از توزیع چوله نرمال در چهار سطح چولگی ۵-، ۲-، ۲، ۴ و ۵ حجم نمونه ۳۰، ۱۰۰، ۲۰۰ و ۵۰۰، دو میانگین ۳ و ۳- و واریانس ۲ شبیه سازی انجام گرفته است. سپس با استفاده از بسته های sn و R2WinBUGS در نرم افزار R و نرم افزار WinBUGS برآوردهای ماکسیمم درستنمایی و بیزی به روش های مستقیم و غیرمستقیم محاسبه می شوند. توزیع پیشین برای μ و λ $N(0, 100)$ و برای σ^2 $IGamma(0.1, 0.1)$ در نظر گرفته شد. پس از ۱۰۰ بار تکرار شبیه سازی نتایج در جداول ۱ تا ۴ ارائه شده اند، که در آن حروف I، D، M به ترتیب نشان دهنده روش های مستقیم، غیرمستقیم و ماکسیمم درستنمایی هستند. برای مقایسه دقت برآورد پارامترهای مدل از معیار متوسط قدر مطلق خطا به صورت $\frac{\sum_{i=1}^n |\hat{\theta}_{ik} - \theta_k|}{n}$ $MAE(\theta_k)$ استفاده می شود، که در آن پارامتر مورد نظر $\hat{\theta}_k$ و

جدول ۱: برآورد پارامترها و میزان خطای آن‌ها با سه روش به ازای $\mu = ۳$

		λ						
		-۲		-۵				
		M	I	D	M	I	D	n
μ	برآورد	۲/۶۴	۲/۰۷	۱/۹۹	۲/۸۸	۲/۳۳	۲/۱۴	۳۰
	خطا	۰/۷۵	۰/۹۹	۱/۰۳	۰/۲۶	۰/۶۸	۰/۸۷	
	درصد	۴۹	۱۱	۷	۴۴	۶	۶	
λ	برآورد	-۱۵۵/۶	-۰/۹۹	-۰/۸۸	-۳۵۶/۹	-۲/۰۸	-۲۶/۳	۱۰۰
	خطا	۱۸۵/۸۸	۱/۴۶	۱/۵۲	۳۵۳/۸۷	۲/۹۹	۲۶/۸۷	
	درصد	۳۹	۷۷	۷۷	۴۰	۱۰۰	۹۲	
σ^2	برآورد	۱/۹۷	۱	۱/۸	۱/۸۷	۰/۷۵	۸/۳۶	۲۰۰
	خطا	۰/۳۴	۱	۰/۳۲	۰/۲۹	۱/۲۵	۷/۱۳	
	درصد	۳۹	۷۷	۷۷	۴۰	۱۰۰	۹۲	
μ	برآورد	۲/۸۶	۲/۴۹	۲/۵۴	۳	۲/۸۶	۲/۹۱	۵۰۰
	خطا	۰/۲۹	۰/۵۵	۰/۵۱	۰/۱۱۳	۰/۱۸	۰/۱۵	
	درصد	۵۱	۴۱	۱۸	۵۶	۲۱۱	۲۷	
λ	برآورد	-۱/۹۶	-۱/۴۷	-۱/۵۷	-۳۷/۳۵	-۳/۸۵	-۴/۴۶	۱۰۰
	خطا	۰/۶۶	۰/۸۵	۰/۸۳	۳۳/۱۸	۱/۲۲	۰/۹۵	
	درصد	۴۶	۷۰	۶۹	۳۹	۹۰	۶۲	
σ^2	برآورد	۱/۹۳	۰/۹۹	۱/۸۷	۲/۰۱	۰/۵۲	۱/۹۳	۲۰۰
	خطا	۰/۲۱	۱/۰۱	۰/۲۳	۰/۱۶	۱/۴۸	۰/۱۷	
	درصد	۴۶	۷۰	۶۹	۳۹	۹۰	۶۲	
μ	برآورد	۲/۹۶	۲/۷۳	۲/۷۹	۲/۹۹	۲/۹۱	۲/۹۵	۵۰۰
	خطا	۰/۲۰	۰/۳۷	۰/۳۴	۰/۰۸	۰/۱	۰/۰۹	
	درصد	۴۹	۳۷	۴۰	۴۴	۱۷	۳۱	
λ	برآورد	-۲/۰۹	-۱/۸۸	-۱/۸۹	-۵/۵۱	-۴/۱۹	-۴/۸۷	۲۰۰
	خطا	۰/۵۲	۰/۶۸	۰/۶۷	۱/۲۵	۰/۹۱	۰/۷۳	
	درصد	۵۰	۵۸	۵۶	۴۳	۸۷	۵۸	
σ^2	برآورد	۱/۹۸	۰/۹۶	۱/۹۳	۲	۰/۴۷	۱/۹۷	۵۰۰
	خطا	۰/۱۳	۱/۰۴	۰/۱۷	۰/۰۹	۱/۵۳	۰/۰۹	
	درصد	۵۰	۵۸	۵۶	۴۳	۸۷	۵۸	
μ	برآورد	۲/۹۶	۲/۹۲	۲/۹۶	۲/۹۹	۲/۹۵	۲/۹۹	۵۰۰
	خطا	۰/۲۰	۰/۱۵	۰/۱۴	۰/۰۸	۰/۰۶	۰/۰۵	
	درصد	۴۹	۳۷	۴۶	۴۴	۲۵	۴۵	
λ	برآورد	-۲/۰۹	-۱/۸۹	-۲/۰۱	-۵/۵۱	-۴/۲۸	-۵/۰۱	۵۰۰
	خطا	۰/۳۲	۰/۳۲	۱/۲۵	۲	۰/۷۷	۰/۶۰	
	درصد	۵۰	۶۱	۴۴	۴۳	۹۳	۵۵	
σ^2	برآورد	۱/۹۸	۰/۹۴	۱/۹۹	۲	۰/۴۵	۱/۹۹	۵۰۰
	خطا	۰/۱۳	۱/۰۶	۰/۱۱	۰/۰۹	۱/۵۵	۰/۰۷	
	درصد	۵۰	۶۱	۴۴	۴۳	۹۳	۵۵	

جدول ۲: برآورد پارامترها و میزان خطای آن‌ها با سه روش به ازای $\mu = ۳$

		λ							
		δ		γ					
		M	I	D	M	I	D	n	
μ	برآورد	۳/۱۲	۳/۳۷	۳/۱۴	۳/۴۵	۳/۴۹	۳/۳۴		
	خطا	۰/۲۷	۰/۳۹	۰/۳۹	۰/۷۹	۰/۵۶	۰/۵۴		
	درصد	۵۵	۸۹۱	۶۵	۵۶	۷۹	۶۹		
λ	برآورد	۴۱۷/۸۷	۲/۷۷	۳/۴۷	۱۵۵/۶	۱/۶۸	۲/۰۶	۳۰	
	خطا	۴۱۴/۱۳	۲/۲۳	۱/۵۴	۲۱۶/۲۶	۰/۹۹	۱/۰۵		
	درصد	۵۸	۰	۲	۵۵	۴۲	۵۷		
σ^2	برآورد	۱/۸۹	۰/۶۸۷	۱/۹۸	۱/۹۶	۰/۹۵	۲/۰۲		
	خطا	۰/۲۵	۱/۸۳۲	۰/۳۴	۰/۳۳	۱/۰۵	۰/۳۰		
	درصد	۵۸	۰	۲	۵۵	۴۲	۵۷		
μ	برآورد	۲/۹۹	۳/۰۸	۳/۰۶	۳/۲۳	۳/۲۵	۳/۳۲		
	خطا	۰/۱۲	۰/۱۲	۰/۱۱	۰/۳۹	۰/۳۹	۰/۴۳		
	درصد	۴۵	۱۷۹	۶۸	۶۰	۶۷	۷۰		
λ	برآورد	۲۳/۰۲	۴/۰۹	۴/۵۸	۱/۹۲	۱/۹۳	۱/۹۶	۱۰۰	
	خطا	۱۱/۰۹	۱/۱۳	۰/۸۹	۰/۹۲	۰/۸۲	۰/۸۶		
	درصد	۶۴	۱۸	۳۶	۴۵	۴۶	۴۲		
σ^2	برآورد	۲/۰۱	۰/۵	۱/۹۵	۱/۹۳	۰/۹۳	۱/۹۳		
	خطا	۰/۱۶۱	۱/۵۰۱	۰/۱۵	۰/۲۴	۱/۰۷	۰/۲۳		
	درصد	۶۴	۱۸	۳۶	۴۵	۴۶	۴۲		
μ	برآورد	۲/۹۹	۳/۰۸	۳/۰۶	۳/۲۳	۳/۱۴	۳/۱۴		
	خطا	۰/۱۲	۰/۱۰	۰/۰۸	۰/۳۹	۳/۲۷	۳/۲۸		
	درصد	۴۵	۸۰	۷۳	۶۰	۵۸	۶۱		
λ	برآورد	۲۳/۲	۴/۱	۴/۷	۱/۹۲۱	۱/۷	۲	۲۰۰	
	خطا	۱۹/۰۹	۱/۰۲	۰/۸۴	۰/۹۲	۰/۵۸	۰/۶۱		
	درصد	۶۴	۱۴	۳۲	۴۵	۵۱	۵۴		
σ^2	برآورد	۲/۰۱	۰/۴۸	۱/۹۶	۱/۹۳	۰/۹۸	۱/۹۶		
	خطا	۰/۱۶	۱/۵۲	۰/۱۰	۰/۲۴	۰/۰۷	۰/۱۸		
	درصد	۶۴	۱۴	۳۲	۴۵	۵۱	۵۴		
μ	برآورد	۲/۹۹	۳/۰۳	۳/۰۲	۳/۲۳	۲/۹۸	۳		
	خطا	۰/۱۲	۰/۰۵	۰/۰۵	۰/۳۹	۰/۱۱	۰/۱۰		
	درصد	۴۵۱	۶۷	۵۸	۶۰	۴۲	۵۲		
λ	برآورد	۲۳/۰۲	۴/۷۷	۵/۰۱	۱/۹۲۱	۲/۱۹	۲/۱۳	۵۰۰	
	خطا	۱۹/۰۹	۰/۵۴	۰/۶۰	۰/۹۲	۰/۳۳	۰/۳۱		
	درصد	۶۴	۳۴	۴۳	۴۵	۷۱	۶۴		
σ^2	برآورد	۲/۰۱	۰/۴۲	۱/۹۹	۱/۹۳	۰/۸۶	۲/۰۲		
	خطا	۰/۱۶	۱/۵۸	۰/۰۶	۰/۲۴	۱/۱۴	۰/۰۹		
	درصد	۶۴	۳۴	۴۳	۴۵	۷۱	۶۴		

جدول ۳: برآورد پارامترها و میزان خطای آن‌ها با سه روش به ازای $\mu = -۳$

		λ							
		-۲			-۵				
		M	I	D	M	I	D	n	
μ	برآورد	-۳	-۳/۰۸	-۳/۰۶	-۳/۰۱	-۳/۰۷	-۳/۰۴		
	خطا	۰/۱۵	۰/۲۰	۰/۲۰	۰/۰۸	۰/۱۰	۰/۰۸		
	درصد	۵۱	۴۵	۴۵	۴۷	۲۲	۳۱		
λ	برآورد	-۲/۱۴	-۲/۰۶	-۲/۱۲	-۳/۸۳	-۴/۲۶	-۴/۸۲		
	خطا	۰/۱۵	۰/۴۹	۰/۵۲	۱۶/۵۹	۰/۹۰	۰/۸۰	۳۰	
	درصد	۴۶	۴۵	۴۴	۴۸	۸۲	۶۱		
σ^2	برآورد	۲	۰/۹۰	۱/۹۹	۱/۹۸	۰/۴۷	۱/۹۶		
	خطا	۰/۱۳	۱/۱۰	۰/۱۴	۰/۱۱	۱/۵۳	۰/۱		
	درصد	۴۶	۴۵	۴۴	۴۸	۸۲	۶۱		
μ	برآورد	-۳/۱۴	-۳/۲۴	-۳/۲۲	-۲/۹۸	-۳/۰۸	-۳/۰۳		
	خطا	۰/۳۲	۰/۳۷	۰/۳۷	۰/۱۱	۰/۱۱	۰/۱۱		
	درصد	۸۰	۳۴	۴۰	۱۰	۲۸	۳۹		
λ	برآورد	-۲/۳۲	-۱/۹۸	-۲/۰۵	-۳۷/۰۷	-۴/۰۸	-۴/۶۸		
	خطا	۱/۱۰	۰/۸۳	۰/۹۰	۳۲/۸۸	۱/۰۵	۰/۱۵	۱۰۰	
	درصد	۴۹	۵۶	۵۰	۳۵	۸۷	۶۳		
σ^2	برآورد	۱/۹۵	۰/۹۲	۱/۹۵	۲/۰۴	۰/۵	۲		
	خطا	۰/۲۴	۱/۰۹	۰/۲۳	۰/۱۵	۱/۵۰	۰/۱۵		
	درصد	۴۹	۵۶	۵۰	۳۵	۸۷	۶۳		
μ	برآورد	-۳/۰۳	-۳/۱۴	-۳/۱۰	-۳/۰۲	-۳/۰۸۱	-۳/۰۵		
	خطا	۰/۱۹	۰/۲۷	۰/۲۵	۰/۰۹	۰/۱۰	۰/۹۰		
	درصد	۵۸	۴۹	۵۴	۴۸	۲۳	۳۲		
λ	برآورد	-۲/۱۲	-۲	-۴/۰۲	-۵/۴۴	۴/-۱۳	-۴/۶۹		
	خطا	۰/۵۸	۰/۶۴	۰/۶۶	۱/۴۵	۰/۹۲	۰/۸۸	۲۰۰	
	درصد	۴۴	۴۶	۴۴	۴۸	۸۵	۶۴		
σ^2	برآورد	۰/۹۹	۰/۹۲	۱/۹۹	۱/۹۸	۰/۴۸	۱/۹۵		
	خطا	۰/۱۵	۱/۰۸	۰/۱۵	۰/۱۱	۱/۵۲	۰/۱		
	درصد	۴۴	۴۶	۴۴	۴۸	۸۵	۶۴		
μ	برآورد	-۳/۰۳	-۳/۰۸	-۳/۰۴	-۳	-۳/۰۴	-۳/۰۱		
	خطا	۰/۱	۰/۱۳	۰/۱۲	۰/۰۵	۰/۰۶	۰/۰۵		
	درصد	۴۹	۳۴	۴۸	۵۴	۲۲	۴۹		
λ	برآورد	-۱/۹۹	-۱/۸۹	-۲	-۵/۰۸	-۴/۲۷	-۴/۹۰		
	خطا	۰/۲۹	۰/۳۲	۰/۳۲	۰/۶۱	۰/۷۴	۰/۵۱	۵۰۰	
	درصد	۵۰	۵۷	۴۷	۴۶	۹۳	۵۵		
σ^2	برآورد	۱/۹۸	۰/۹۳	۱/۹۸	۲	۰/۴۵	۱/۹۹		
	خطا	۰/۰۹	۱/۱۷	۱/۰۹	۰/۰۶	۱/۵۵	۰/۰۶		
	درصد	۵۰	۵۷	۴۷	۴۶	۹۳	۵۵		

جدول ۴: برآورد پارامترها و میزان خطای آن‌ها با سه روش به ازای $\mu = -۳$

		λ						
		۵		۲				
		M	I	D	M	I	D	n
μ	برآورد	-۲/۹۹	-۲/۹۳	-۲/۹۵	-۲/۹۷	-۲/۸۷	-۲/۸۷	۳۰
	خطا	۰/۰۸	۰/۰۹	۰/۰۸	۰/۱۹	۰/۳۳	۰/۳۳	
	درصد	۴۹	۷۶	۶۶	۴۹	۷۰	۶۵	
λ	برآورد	۵/۴۱	۴/۱۸	۴/۹۹	۲/۰۴	۱/۸۱	۱/۸۴	۱۰۰
	خطا	۱/۱۷	۰/۹۴	۰/۷۵	۰/۱۴۷	۰/۶۲	۰/۶۳	
	درصد	۵۲	۱۵	۳۳	۵۱	۴۴	۴۴	
σ^2	برآورد	۱/۹۹	۰/۴۸	۱/۹۶	۱/۹۸	۰/۹۶	۱/۹۳	۲۰۰
	خطا	۰/۱۱	۱/۵۲	۰/۱۱	۰/۱۵	۱/۰۴	۰/۱۷	
	درصد	۵۲	۱۵	۳۳	۵۱	۴۴	۴۴	
μ	برآورد	-۳/۰۱	-۲/۹۰	-۲/۸۹	-۲/۷۸	-۲/۵۶	-۲/۴۹	۳۰۰
	خطا	۰/۱۲	۰/۱۳	۰/۱۶	۰/۴۳	۰/۵۷	۰/۶۱	
	درصد	۴۷	۷۲	۶۱	۵۳	۶۷	۷۴	
λ	برآورد	۳۶/۸۹	۴/۱۴	۱۵/۶۲	۱/۳۹۹	۱/۷۰	۱/۵۸	۵۰۰
	خطا	۳۲/۷۲	۱/۰۵	۱۲/۰۱	۰/۹۱	۱/۰۴	۱/۰۱	
	درصد	۵۹	۱۶	۳۰	۵۴	۳۸	۳۴	
σ^2	برآورد	۲	۰/۵۰	۳/۴۹	۱/۹۵	۰/۹۵	۱/۸۹	۱۰۰۰
	خطا	۰/۱۵	۱/۵۰	۱/۷۰	۱/۲۰	۰/۰۵	۰/۲۲	
	درصد	۵۹	۱۶	۳۰	۵۴	۳۸	۳۴	
μ	برآورد	-۳	-۲/۹۴	-۲/۹۶	-۲/۹۷	-۲/۷۹۱	-۲/۷۸	۳۰۰
	خطا	۰/۰۹	۰/۰۹	۰/۰۸	۰/۱۸	۰/۳۱	۰/۳۳	
	درصد	۴۴	۷۲	۶۲	۵۲	۶۸	۶۶	
λ	برآورد	۶۵/۶۶	۴/۳۷	۴/۸۵	۲/۰۵	۱/۸۳	۱/۸۴	۵۰۰
	خطا	۱/۳	۰/۸۶	۰/۷۴	۰/۴۸	۰/۶۰	۰/۶۴	
	درصد	۵۶	۲۱	۴۶	۵۲	۴۵	۴۶	
σ^2	برآورد	۲	۰/۴۶	۱/۹۷	۱/۹۸	۰/۹۵	۱/۹۳	۱۰۰۰
	خطا	۰/۱	۱/۵۴	۰/۱۰	۰/۱۴	۱/۰۵	۰/۱۶	
	درصد	۵۶	۲۱	۴۶	۵۲	۴۵	۴۶	
μ	برآورد	-۳/۰۱	-۲/۹۸	-۲/۹۹	-۳	-۲/۹۹	-۲/۹۸	۳۰۰
	خطا	۰/۰۵	۰/۰۵	۰/۰۵	۰/۴۳	۰/۴۴	۰/۴۹	
	درصد	۴۶	۴۹	۵۵	۴۳	۴۴	۴۹	
λ	برآورد	۵/۱۸	۴/۷۱	۴/۹۳	۲/۰۶	۲/۰۸	۲/۰۴	۵۰۰
	خطا	۰/۷۳	۰/۵۴	۰/۶۰	۰/۲۸	۰/۳۰	۰/۲۹	
	درصد	۵۳	۳۵	۴۲	۵۷	۶۰	۵۷	
σ^2	برآورد	۲	۰/۴۲	۱/۹۹	۲	۰/۸۹	۱/۹۹	۱۰۰۰
	خطا	۱/۰۶	۱۱/۵۸	۰/۰۶	۰/۰۹	۱/۱۱	۰/۱۰	
	درصد	۵۳	۳۵	۴۲	۵۷	۶۰	۵۷	

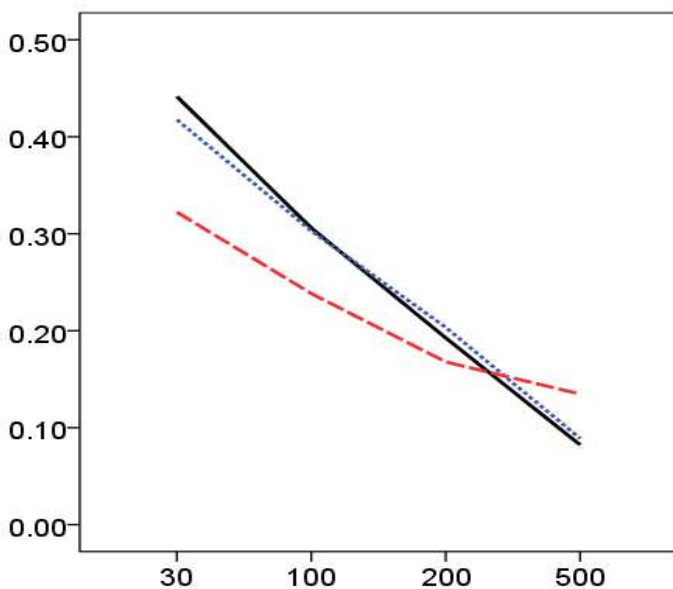
برآورد آن است. همچنین در جداول ۱ تا ۴، درصد بیش برآوردی نیز گزارش شده است. برای مثال در جدول ۱، برای حجم نمونه ۳۰ و ۳- = ۸ میزان بیش برآوردی میانگین ۶٪ گزارش شده است. و این یعنی در هر ۱۰۰ مورد، ۶٪ موارد مقدار برآورد بالاتر از ۳ و ۹۴٪ موارد برآورد کمتر از ۳ حاصل شده‌اند.

۶ بحث و نتیجه گیری

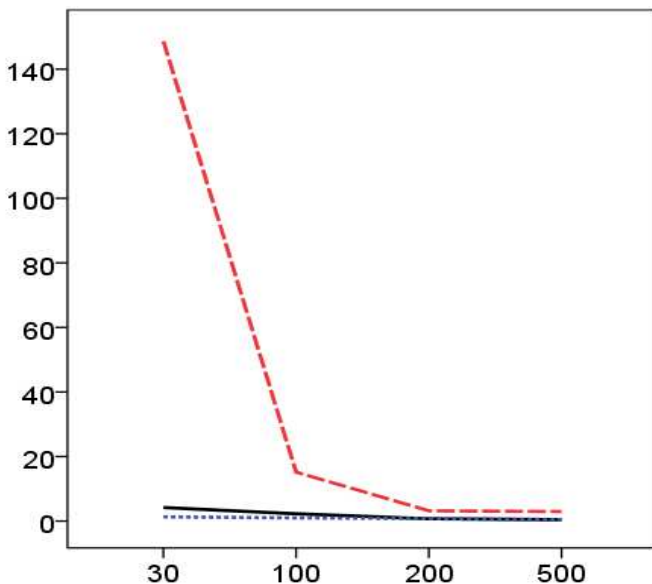
همان‌طور که در جدول‌های ۲ و ۳ ملاحظه می‌شود دقت برآورد روش بیزی غیرمستقیم برای پارامتر میانگین همانند دقت رهیافت بیزی مستقیم است. از این رو در برخی از کاربردها می‌توان از رهیافت بیزی غیرمستقیم به جای رهیافت بیزی مستقیم استفاده نمود. علت بیش برآوردی و کم برآوردی با توجه به رابطه (۲) قابل توجیه است. همان‌گونه که در حالت تعمیم یافته (۲) می‌توان مشاهده کرد $E(X) = \mu + \sqrt{\frac{\gamma}{\pi}} \delta \sigma$ ، بنابراین با مثبت بودن δ در برآورد μ انتظار بیش برآوردی و با منفی بودن آن انتظار کم برآوردی وجود دارد. نتایج بیانگر آنست که وقتی قدر مطلق چولگی بزرگ است برآورد ماکسیمم درست‌نمایی نسبت به رهیافت بیزی دارای خطای بسیار فاحشی است. این نتیجه با مطالعه اسپینوسا (۲۰۰۸) نیز همخوانی دارد. همچنین از لحاظ شهودی شکل‌های ۱ تا ۳ نشان دهنده دقت یکسان برآورد پارامتر چولگی با دو رهیافت بیزی غیرمستقیم و مستقیم است. بعلاوه میزان خطای برآورد، علی‌الخصوص پارامتر چولگی، در حجم نمونه ۲۰۰ و بالاتر کاهش چشمگیری داشته است. برآورد پارامتر پراکندگی در روش بیزی غیرمستقیم دارای کم برآوردی می‌باشد. علت آن را می‌توان به این خاطر دانست که در روش بیزی غیرمستقیم، از دو مولفه تصادفی استفاده شده که این مسئله باعث کاهش برآورد پارامتر پراکندگی در روش بیزی غیرمستقیم و به تناسب آن افزایش واریانس برآوردها و کاهش دقت سایر برآوردها مانند میانگین و پارامتر چولگی می‌گردد (بندیویدهای و همکاران ۲۰۱۰).

تقدیر و تشکر

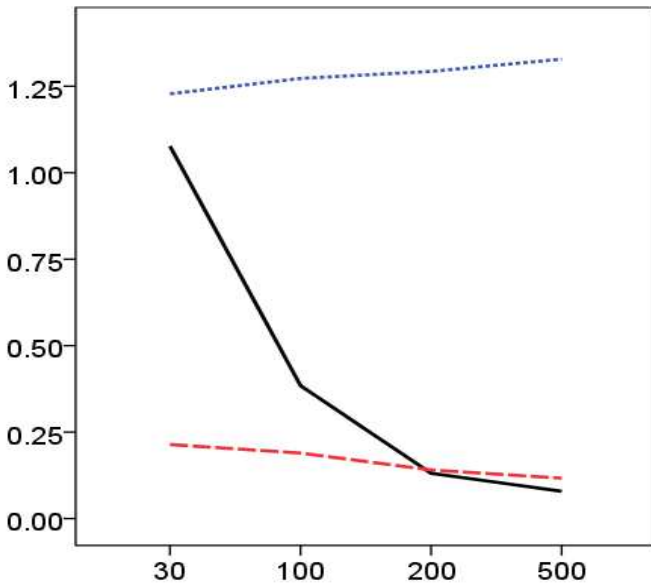
نویسندگان از داوران و ویراستار محترم مجله بخاطر پیشنهادات ارزشمندشان که موجب ارائه بهتر مقاله شد، نهایت تشکر را دارند.



شکل ۱: متوسط خطا برآورد میانگین توزیع چوله نرمال با روش های بیزی مستقیم (خط مستقیم)، غیرمستقیم (خط نقطه چین) و ماکسیمم درستنمایی (خط چین)



شکل ۲: متوسط خطا برآورد پارامتر چولگی چوله نرمال با روش های بیزی مستقیم (خط مستقیم)، غیرمستقیم (خط نقطه چین) و ماکسیمم درستنمایی (خط چین)



شکل ۳: متوسط خطا برآورد واریانس توزیع چوله نرمال با روش‌های بیزی مستقیم (خط مستقیم)، غیرمستقیم (خط نقطه چین) و ماکسیمم درست‌نمایی (خط چین)

مراجع

- Azzalini, A. (1985), A Class of Distributions Which Includes the Normal Ones. *Scandinavian Journal of Statistics, Theory and Applications*, **12**, 171-178.
- Azzalini, A. (2005), The Skew-Normal Distribution and Related Multivariate Families, *Scandinavian Journal of Statistics*, **32**, 159-188.
- Bandyopadhyay, D., Lachos, V. H., Abanatovalle C. A. and Ghosh, P. (2010), *Linear Mixed Models for Skew-Normal Independent Bivariate Responses with an Application to Periodontal Disease*, *Statistics in Medicine*, **29**, 2643-2655.
- Bolstand, W. M. (2004), *Introduction to Bayesian Statistics*, Canada, John Wiley & Sons.

- Bowling, S. R. K., and Mohammad T. (2009), A Logistic Approximation to the Cumulative Normal Distribution, *Journal of Industrial Engineering and Management*, **2**, 114-127.
- Congdon, P. (2003), *Applied Bayesian Modeling*, England, John Wiley & Sons.
- Genton, M. G. (2004), *Skew-Elliptical Distributions and their Applications: A Journey Beyond Normality*, USA, Chapman & Hall/CRC.
- Goldstein, M. and Wooff, D. (2007), *Bayes Linear Statistics Theory and Methods*, England, John Wiley & Sons.
- Jara, A., Quintana, F. and Sanmartin E. (2008), Linear Mixed Models with Skew-Elliptical Distributions: a Bayesian Approach, *Computational Statistics and Data Analysis*, **52**, 5033-5045.
- Kass, R. E. and Raftery, A. E. (1995), Bayes Factors, *Journal of the American Statistical Association*, **90**, 773-795.
- Lee, J. C., Lin, T. I., Lee, K. J and Hsu, Y. L. (2005), Bayesian Analysis of Box-Cox Transformed Linear Mixed Models with ARMA(p,q) Dependence, *Journal of Statistical Planning and Inference*, **133**, 435-451.
- Nadarajah, S. (2008), A New Model for Symmetric and Skewed Data, *Probability in the Engineering and Informatinal Sciences*, **22**, 261-271.
- Nadarajah, S. and Kotz, S. (2003), Skewed Distributions Generated by the Normal kernel, *Statistics and Propability Letters*, **65**, 269-277.
- Raftery, A. E. (1986), Choosing Models for Cross-Classifications, *American Sociological Review*, **51**, 145-146.
- Raftery, A. E. (1993), *Bayesian Model Selection in Structural Equation Models*, In Testing Structural Equation Models, Beverly Hills: Sage.
- Saville, B. R. (2008), *Bayesian Multilevel Models and Medical Applications*. School of Public Health, Chapel Hill, University of North Carolina, PHD of Biostatistics.

Spinosa, J. S. (2008), *Inference for the Multiparameter Skew Normal Distribution*, Applied Statistics, California, University of California Riverside, PHD.

Tsung, I. L. and Lee, J. C. (2003), On Modelling Data From Degradation Sample Paths over Time, *Australian and New Zealand Journal of statistics*, **45**, 257-270.

ضمیمه

کد برنامه برآورد بیزی با روش‌های مستقیم و غیر مستقیم در نرم افزار WinBUGS

کد نویسی مستقیم

```

model
{
for(i in 1:n) {
zeros[i] <- 0
z[i]<-(x[i]-mu)/sigma
logf[i]<--0.5*pow(z[i],2)
w[i]<-lambda*z[i]
logG[i]<-log(phi(w[i]))
logLike[i]<--log(sigma)+logf[i]+logG[i]
phi[i] <- -logLike[i]
zeros[i] ~ dpois(phi[i])
}
mu~dnorm(0,0.1)
tau~dgamma(0.1,0.1)
lambda~dnorm(0,0.1)
sigma <- 1 / sqrt(tau)}
    
```

کد نویسی غیر مستقیم

```

model
{
for(i in 1:n) {
mu2[i]<-mu+lambda*abs(k[i])
x[i]~dnorm(mu2[i],tau)
k[i]~dnorm(0,tau)
}
sigma <- 1 /sqrt(tau)
mu~dnorm(0,0.1)
tau~dgamma(0.1,0.1)
lambda~dnorm(0,0.1)
}
    
```