مجله علوم آماری، پاییز و زمستان ۱۳۹۱

جلد ۶، شماره ۲، ص ۱۳۵-۱۵۰

مقایسه‌های تصادفی فواصل نمونه‌ای آماره‌های مرتب از متغیرهای مستقل نمایی

قباد برمال‌زن[1]، عابدین حیدری[1]، مریم عبداله‌زاده[2]

[1] **گروه آمار، دانشگاه زابل**

[2] **گروه آمار، دانشگاه رازی کرمانشاه**

تاریخ دریافت: ۱۳۹۱/۴/۱ تاریخ آخرین بازنگری: ۱۳۹۱/۱۰/۸

چکیده : فرض کنید دو گروه از متغیرهای تصادفی مستقل نمایی در اختیار است که اولین گروه دارای نرخ خطرهای متفاوت و دیگری دارای نرخ خطرهای مشترک ثابت هستند. در این مقاله، ترتیب‌های تصادفی متفاوتی میان فواصل نمونه‌ای فوق مورد بررسی قرار گرفته و شرایط لازم و کافی برای معادل بودن برخی از این ترتیب‌های تصادفی معرفی شده است. همچنین برای حالت خاص، زمانی‌که حجم نمونه برابر دو باشد نشان داده شده که تابع نرخ خطر دومین فاصله نمونه‌ای، در معکوس بردار نرخ خطرهای آن‌ها شُور-کاو است.

واژه‌های کلیدی : فواصل نمونه‌ای، توزیع نمایی، ترتیب نرخ خطر، ترتیب متوسط مانده عمر، ترتیب صعودی کوژ، بیشاندن.

آدرس الکترونیک مسئول مقاله: قباد برمال زن، Ghbarmalzan@uoz.ac.ir

کد موضوع‌بندی ریاضی (۲۰۰۰): ۶۲N۰۵

۱ مقدمه

فرض کنید $X_{1:n} \leq \ldots \leq X_{n:n}$ آماره های مرتب متناظر با متغیرهای تصادفی $X_1, \ldots, X_n$ باشند. اگر $X_{0:n} \equiv 0$ و برای $i = 1, \ldots, n$ داشته باشیم $D_{i:n} = X_{i:n} - X_{i-1:n}$ آن‌گاه متغیرهای تصادفی $D_{1:n}, \ldots, D_{n:n}$ را فواصل نمونه‌ای آماره‌های مرتب می‌نامند. در ادامه، به منظور سادگی در بیان مطالب، از واژه فواصل نمونه‌ای به جای فواصل نمونه‌ای آماره‌های مرتب استفاده شده است. باید توجه داشت که بسیاری از اندازه‌های پراکندگی مانند دامنه نمونه‌ای، واریانس نمونه‌ای و میانگین جینی[۱]، توابعی از فواصل نمونه‌ای هستند. فواصل نمونه‌ای به‌طور گسترده در آزمون‌های نیکویی برازش، نظریه قابلیت اعتماد، نظریه مزایده[۲] و غیره مورد استفاده قرار گرفته است. در زمینه کاربرد فواصل نمونه‌ای در آزمون‌های نیکویی برازش، می‌توان به بالاکریشنان و رائو (۱۹۸۸a, ۱۹۸۸b) و برای درک جزئیات بیشتر از نقش فواصل نمونه‌ای در نظریه مزایده، می‌توان به پائول و گوتیرز (۲۰۰۴) و لی (۲۰۰۵) مراجعه نمود. قبل از بیان کاربرد فواصل نمونه‌ای در مبحث قابلیت اعتماد، لازم به نظر می‌رسد که سیستم‌های i از n معرفی شوند. یک سیستم متشکل از n مؤلفه را i از n گویند هرگاه برای فعالیت سیستم، فعالیت حداقل i مؤلفه آن لازم باشد. طول عمر یک سیستم i از n متناظر با آماره مرتب $(n-i+1)$ام حاصل از طول عمر مؤلفه‌های آن است. سیستم‌های شناخته شده موازی و سری، حالات خاصی از سیستم‌های i از n به ترتیب متناظر با $i = 1$ و $i = n$ هستند. فرض کنید دو ساختار برای کنار هم قراردادن n مؤلفه وجود دارد. ساختار اول، یک سیستم $(n-i+1)$ از n و ساختار دوم، یک سیستم $(n-i+2)$ از n است. در این شرایط، متغیر تصادفی $D_{i:n}$ نشان‌دهنده تفاوت طول عمر دو سیستم ذکر شده است. همان‌گونه که بالاکریشنان و همکاران (۲۰۱۳) بیان کرده‌اند، فواصل نمونه‌ای را می‌توان به صورت زیر نیز تفسیر نمود: یک سیستم $(n-i+2)$ از n با مؤلفه‌های مستقل و هم‌توزیع را در نظر بگیرید. پس از $(i-1)$امین خرابی، سیستم غیر فعال شده و $(n-i+1)$ مؤلفه هم‌چنان قابل استفاده باقی می‌مانند. اگر

---

۱ Gini's mean

۲ Auction theory

$(n-i+1)$ مؤلفه باقی‌مانده، دوباره در یک ساختار سری کنار هم قرار گیرند آنگاه متغیر تصادفی $D_{i:n}$ نشان دهنده طول عمر این سیستم سری است. برای مطالعه کاربرد فواصل نمونه‌ای در نظریه قابلیت اعتماد، می‌توان به کرمانی (۱۹۹٦)، هو و ژوانگ (۲۰۰۴) و بالاکریشنان و همکاران (۲۰۱۳) مراجعه نمود.

در بخش ۲ این مقاله، تعاریف و مفاهیم مورد نیاز برای بیان و اثبات نتایج اصلی مورد بحث و بررسی قرار گرفته است. ترتیب نرخ خطر میان دومین فاصله نمونه‌ای از متغیرهای تصادفی مستقل نمایی با حجم ۲، در بخش ۳ آورده شده است. سرانجام در بخش ۴، فواصل نمونه‌ای از متغیرهای مستقل و غیر هم‌توزیع نمایی با فواصل نمونه‌ای از متغیرهای مستقل و هم‌توزیع نمایی مقایسه شده و شرایط لازم و کافی برای معادل بودن برخی از ترتیب‌های تصادفی، به‌دست آورده شده است.

۲ تعاریف و نمادها

فرض کنید متغیر تصادفی نامنفی X بیان‌گر طول عمر یک مؤلفه و دارای تابع بقای $\bar{F}$، تابع چگالی f و تابع نرخ خطر $r_X = f/\bar{F}$ باشد. تابع متوسط مانده عمر[۳] مؤلفه در لحظه x عبارت است از:

$$m_X(x) = \frac{1}{\bar{F}(x)} \int_x^\infty \bar{F}(u)\, du.$$

متغیر X را دارای تابع متوسط مانده عمر غیرنزولی[۴] $(IMRL)$ گویند هرگاه $m_X(x)$ تابعی غیرنزولی از x باشد. همچنین متغیر X را دارای تابع نرخ خطر غیرصعودی[۵] (DFR) گویند هرگاه $r_X(x)$ نسبت به x غیرصعودی باشد. جزئیات بیشتر در زمینه خواص مربوط به توابع طول عمر و ارتباط میان آنها را می‌توان در مارشال و الکین (۲۰۰٦) مطالعه نمود.

فرض کنید متغیرهای تصادفی پیوسته و نامنفی X و Y به ترتیب دارای توابع توزیع تجمعی F و G، توابع بقا $\overline{F}$ و $\overline{G}$، توابع معکوس (توابع چندک) از راست

[۳] Mean residual life

[۴] Increasing mean residual Life

[۵] Decreasing hazard rate

پیوسته F^{-1} و G^{-1}، توابع چگالی f و g، توابع متوسط مانده عمر m_X و m_Y، توابع نرخ خطر معکوس $\tilde{r}_X = f/\bar{F}$ و $\tilde{r}_Y = g/\bar{G}$ و توابع نرخ خطر $r_X = f/F$ و $r_Y = g/G$ باشند.

تعریف ۱ : الف) X در ترتیب تصادفی معمولی بزرگتر ا ز Y است ($X \geq_{st} Y$)، هرگاه برای هر $x > 0$، $\overline{F}(x) \geq \overline{G}(x)$.

ب) X در ترتیب متوسط مانده عمر بزرگتر ا ز Y است ($X \geq_{mrl} Y$)، هرگاه به ازای هر $x \geq 0$، $m_X(x) \geq m_Y(x)$.

پ) X در ترتیب نرخ خطر بزرگ‌تر از Y است ($X \geq_{hr} Y$)، هرگاه $\overline{F}(x)/\overline{G}(x)$ نسبت به x غیرنزولی باشد.

ت) X در ترتیب نرخ خطرمعکوس بزرگتر ا ز Y است ($X \geq_{rh} Y$)، هرگاه $F(x)/G(x)$ تابعی غیرنزولی از x باشد.

ث) X در ترتیب نسبت درست‌نمایی بزرگتر ا ز Y است ($X \geq_{lr} Y$)، هرگاه $f(x)/g(x)$ نسبت به x غیرنزولی باشد.

بین ترتیب‌های تصادفی فوق، رابطه

$$X \geq_{lr} Y \Longrightarrow X \geq_{hr} Y (X \geq_{rh} Y) \Longrightarrow X \geq_{st} Y.$$

برقرار است. به‌علاوه، ترتیب نرخ خطر، ترتیب متوسط مانده عمر را نتیجه می‌دهد. در حالت کلی رابطه خاصی میان ترتیب تصادفی معمولی و ترتیب متوسط مانده عمر برقرار نیست و هیچ‌کدام بر دیگری دلالت نمی‌کنند.

تعریف ۲ : الف) متغیر تصادفی X در ترتیب پراکندگی[6] بزرگتر ا ز Y است ($X \geq_{disp} Y$)، هرگاه $F^{-1}(u) - G^{-1}(u)$ تابعی غیرنزولی در $u \in (0,1)$ باشد.

ب) متغیر تصادفی X در ترتیب گسترش از راست[7] بزرگتر ا ز Y است ($X \geq_{RS} Y$)، هرگاه

$$\int_{F^{-1}(u)}^{\infty} \bar{F}(x)\,dx \geq \int_{G^{-1}(u)}^{\infty} \bar{G}(x)\,dx; \qquad u \in (0,1).$$

---

[6] Dispersive Ordering

[7] Right-Spread

پ) متغیر تصادفی X در ترتیب صعودی کوژ[۸] بزرگتر ا ز Y است $(X \geq_{icx} Y)$، هرگاه

$$\int_x^\infty \bar{F}(t)\,dt \geq \int_x^\infty \bar{G}(t)\,dt; \qquad x \geq 0.$$

بین ترتیب‌های تصادفی تعریف فوق نیز، رابطه زیر برقرار است:

$$\begin{array}{ccc} X \geq_{disp} Y \Longrightarrow & X \geq_{RS} Y & \Longrightarrow Var(X) \geq Var(Y) \\ & \Downarrow & \\ & X \geq_{icx} Y & \end{array}$$

مولر و استویان (۲۰۰۲)، شیکد و شانتیکومار (۲۰۰۷) و خالدی (۱۳۸۴) منابع مناسبی برای بررسی و شناخت ترتیب‌های تصادفی مختلف و ارتباط بین آنها هستند.

تعریف ۳ : فرض کنید $x_{1:n} \leq \ldots \leq x_{n:n}$ و $y_{1:n} \leq \ldots \leq y_{n:n}$ به ترتیب نشان‌دهنده مقادیر مرتب شده بردارهای $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ و $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ باشند. گویند $\mathbf{x}$ به معنای بیشاندن از $\mathbf{y}$ بزرگ‌تر است و با $\mathbf{x} \overset{m}{\succeq} \mathbf{y}$ نشان داده می‌شود، هرگاه برای هر $j = 1, \ldots, n-1$، $\sum_{i=1}^{j} x_{i:n} \leq \sum_{i=1}^{j} y_{i:n}$ و $\sum_{i=1}^{n} x_{i:n} = \sum_{i=1}^{n} y_{i:n}$.

تعریف ۴ : تابع $\phi : \Re^n \to \Re$ شُور-کوژ[۹] (شُور-کاو) نامیده می‌شود هرگاه

$$x \overset{m}{\succeq} y \Longrightarrow \phi(x) \geq (\leq) \phi(y).$$

قضیه ۱ : (مارشال و همکاران، ۲۰۱۱) فرض کنید $I \subset \Re$ یک بازه باز و $\phi : I^n \to \Re$ یک تابع پیوسته مشتق‌پذیر باشد. تابع ϕ بر روی I^n شُور-کوژ

[۸] Increasing Convex Ordering

[۹] Schur-convex

(شُور-کاو) است اگر و فقط اگر ϕ روی I^n متقارن باشد و برای هر $i \neq j$ داشته باشیم:

$$(z_i - z_j)\{\frac{\partial \phi}{\partial z_i}(z) - \frac{\partial \phi}{\partial z_j}(z)\} \geq 0 (\leq 0), \qquad z \in I^n,$$

که در آن $\frac{\partial \phi}{\partial z_i}(\mathbf{z})$، نشان‌دهنده مشتق جزیی تابع ϕ نسبت به مولفه iام آن است.

برای جزئیات بیشتر در مورد بیشاندن و ارتباط آن با ترتیب‌های تصادفی، می‌توان به مارشال و همکاران (۲۰۱۱) و خالدی و فارسی‌نژاد (۱۳۸۶) مراجعه نمود.

۳ مقایسه تصادفی فواصل نمونه‌ای با حجم ۲

فرض کنید X_1 و X_2 متغیرهای مستقل نمایی به ترتیب با نرخ خطرهای λ_1 و λ_2 و Y_1 و Y_2 مجموعه دیگری از متغیرهای مستقل نمایی به ترتیب با نرخ خطرهای γ_1 و γ_2 باشند. همچنین فرض کنید $D_{2:2} = X_{2:2} - X_{1:2}$ دومین فاصله نمونه‌ای براساس متغیرهای X_1 و X_2 و $D^*_{2:2} = Y_{2:2} - Y_{1:2}$ دومین فاصله نمونه‌ای براساس متغیرهای Y_1 و Y_2 باشند. کوچار و کوروار (۱۹۹۶) ثابت کردند که

$$(\lambda_1, \lambda_2) \overset{m}{\succeq} (\gamma_1, \gamma_2) \Longrightarrow D_{2:2} \geq_{hr} D^{\star}_{2:2}. \qquad (1)$$

و با یک مثال نشان دادند رابطه (۱) برای حالت کلی، وقتی تعداد متغیرها از ۲ بیشتر باشد، برقرار نیست. کوچار و روهو (۱۹۹۶) رابطه (۱) را از ترتیب نرخ خطر به ترتیب نسبت درست‌نمایی تعمیم دادند. در قضیه بعدی، نتیجه مشابه با آن‌چه که در رابطه (۱) بیان گردیده، اثبات شده است.

قضیه ۲ : فرض کنید X_1 و X_2 متغیرهای مستقل نمایی به ترتیب با نرخ خطرهای λ_1 و λ_2 باشند. همچنین فرض کنید Y_1 و Y_2 مجموعه دیگری از متغیرهای مستقل نمایی به ترتیب با نرخ خطرهای γ_1 و γ_2 باشند. در این صورت داریم

$$(\frac{1}{\lambda_1}, \frac{1}{\lambda_2}) \overset{m}{\succeq} (\frac{1}{\gamma_1}, \frac{1}{\gamma_2}) \Longrightarrow D_{2:2} \geq_{hr} D^{\star}_{2:2}.$$

برهان : کوچار و کوروار (۱۹۹۶) نشان دادند که تابع نرخ خطر $D_{2:2}$ به صورت

$$r(x;\lambda_1,\lambda_2)=\lambda_1\,\lambda_2\,\frac{e^{-\lambda_1 x}+e^{-\lambda_2 x}}{\lambda_2\,e^{-\lambda_1 x}+\lambda_1\,e^{-\lambda_2 x}}.$$

است. با قرار دادن $\lambda_i=\frac{1}{a_i}$ برای $i=1,2$، تابع نرخ خطر $D_{2:2}$ به عنوان تابعی از a_1 و a_2 عبارت است از

$$r_{(a_1,a_2)}(x)=\frac{e^{-\frac{x}{a_1}}+e^{-\frac{x}{a_2}}}{a_1\,e^{-\frac{x}{a_1}}+a_2\,e^{-\frac{x}{a_2}}}.$$

برای به‌دست آوردن نتیجه مورد نظر، کافیست نشان داده شود برای $x>0$، تابع متقارن و مشتق‌پذیر ψ به‌صورت

$$\psi(a_1,\,a_2)=\frac{a_1\,e^{-\frac{x}{a_1}}+a_2\,e^{-\frac{x}{a_2}}}{e^{-\frac{x}{a_1}}+e^{-\frac{x}{a_2}}},$$

در (a_1,a_2) شُور-کوژ است. به‌سادگی می‌توان نشان داد

$$\begin{aligned}\psi(a_1,\,a_2) &= a_1+\frac{(a_2-a_1)\,e^{-\frac{x}{a_2}}}{e^{-\frac{x}{a_1}}+e^{-\frac{x}{a_2}}}\\ &= a_2+\frac{(a_1-a_2)\,e^{-\frac{x}{a_1}}}{e^{-\frac{x}{a_1}}+e^{-\frac{x}{a_2}}}.\end{aligned}$$

مشتقات جزئی $\psi(a_1,\,a_2)$ نسبت به a_1 و a_2، به ترتیب عبارتند از:

$$\frac{\partial\psi(a_1,\,a_2)}{\partial a_1}=1-\frac{e^{\frac{-x}{a_2}}(e^{-\frac{x}{a_1}}+e^{-\frac{x}{a_2}})+\frac{x}{a_1^2}(a_2-a_1)\,e^{-\frac{x}{a_1}-\frac{x}{a_2}}}{(e^{-\frac{x}{a_1}}+e^{-\frac{x}{a_2}})^2},$$

$$\frac{\partial\psi(a_1,\,a_2)}{\partial a_2}=1-\frac{e^{\frac{-x}{a_1}}(e^{-\frac{x}{a_1}}+e^{-\frac{x}{a_2}})+\frac{x}{a_2^2}(a_2-a_1)\,e^{-\frac{x}{a_1}-\frac{x}{a_2}}}{(e^{-\frac{x}{a_1}}+e^{-\frac{x}{a_2}})^2}.$$

اگر Δ بیان‌گر اختلاف میان این مشتقات جزئی باشد، آن‌گاه

$$\Delta=\frac{e^{-\frac{x}{a_1}}-e^{-\frac{x}{a_2}}}{e^{-\frac{x}{a_1}}+e^{-\frac{x}{a_2}}}+\frac{x(a_1-a_2)(\frac{1}{a_1^2}+\frac{1}{a_2^2})e^{-\frac{x}{a_1}-\frac{x}{a_2}}}{(e^{-\frac{x}{a_1}}+e^{-\frac{x}{a_2}})^2}.$$

حال اگر $a_۲ \geq a_۱$ باشد، آن‌گاه $e^{\frac{-x}{a_۱}} \geq e^{\frac{-x}{a_۲}}$ و در نتیجه $\Delta \geq ۰$. اگر $a_۱ \leq a_۲$ مجدداً مثبت بودن $(a_۱ - a_۲)\Delta$ برقرار است. لذا

$$(a_۱ - a_۲)\Delta = (a_۱ - a_۲)\{\frac{\partial\psi(a_۱, a_۲)}{\partial a_۱} - \frac{\partial\psi(a_۱, a_۲)}{\partial a_۲}\} \geq ۰,$$

و بنابر قضیه ۱ تابع $\psi(a_۱, a_۲)$ شُور–کوژ است.

لازم به یادآوری است که هیچ‌کدام از شرایط کافی معرفی شده در رابطه (۱) و قضیه ۲، برای برقراری ترتیب نرخ خطر میان $D_{۲:۲}$ و $D^*_{۲:۲}$، دیگری را نتیجه نمی‌دهند. مثال زیر، تمایز میان قضیه ۲ و رابطه (۱) را نشان می‌دهد.

مثال ۱ : فرض کنید $X_۱$ و $X_۲$ متغیرهای تصادفی مستقل نمایی با نرخ خطرهای $(\lambda_۱, \lambda_۲) = (۱۰, ۱۰/۴)$ و $Y_۱$ و $Y_۲$ مجموعه دیگری از متغیرهای تصادفی مستقل نمایی با نرخ خطرهای $(\gamma_۱, \gamma_۲) = (۵, ۱۰/۳)$ باشند. واضح است که $(\lambda_۱, \lambda_۲) \overset{m}{\ngeq} (\gamma_۱, \gamma_۲)$ و از رابطه (۱) نمی‌توان ترتیب نرخ خطر میان $D_{۲:۲}$ و $D^*_{۲:۲}$ را نتیجه گرفت. اما

$$\left(\frac{۱}{\lambda_۱}, \frac{۱}{\lambda_۲}\right) \overset{m}{\succeq} (\frac{۱}{\gamma_۱}, \frac{۱}{\gamma_۲}),$$

بنابراین طبق قضیه ۲، $D_{۲:۲} \geq_{hr} D^*_{۲:۲}$.

مثال بعدی نشان می‌دهد که قضیه ۲ را نمی‌توان به حالت کلی‌تر، وقتی که حجم نمونه بیشتر از ۲ است تعمیم داد.

مثال ۲ : فرض کنید $X_۱, X_۲, X_۳$ متغیرهای تصادفی مستقل نمایی با نرخ خطرهای $(\lambda_۱, \lambda_۲, \lambda_۳) = (۱, ۱/۵, ۱/۸)$ و $Y_۱, Y_۲, Y_۳$ مجموعه دیگری از متغیرهای تصادفی مستقل نمایی با نرخ خطرهای $(\gamma_۱, \gamma_۲, \gamma_۳) = (۱/۲, ۱/۴, ۱/۸)$ باشند. واضح است که

$$(\frac{۱}{\lambda_۱}, \frac{۱}{\lambda_۲}, \frac{۱}{\lambda_۳}) \overset{m}{\succeq} (\frac{۱}{\gamma_۱}, \frac{۱}{\gamma_۲}, \frac{۱}{\gamma_۳}).$$

اما

$$\bar{F}_{D^*_{۲:۳}}(۰/۵) = ۰/۷۸۰۹۴۸ > ۰/۷۷۹۳۰۱ = \bar{F}_{D_{۲:۳}}(۰/۵).$$

پس $D_{۲:۳} \not\geq_{st} D^{\star}_{۲:۳}$ و در نتیجه $D_{۲:۳} \not\geq_{hr} D^{\star}_{۲:۳}$.

در مثال ۳، نشان داده شده است که قضیه ۲ را نمی‌توان از ترتیب نرخ خطر به ترتیب نسبت درست‌نمایی تعمیم داد.

مثال ۳ : فرض کنید $X_۱$ و $X_۲$ متغیرهای تصادفی مستقل نمایی با نرخ خطرهای $(\lambda_۱, \lambda_۲) = (۱۰, ۱۰/۸)$ و $Y_۱$ و $Y_۲$ مجموعه دیگری از متغیرهای تصادفی مستقل نمایی با نرخ خطرهای $(\gamma_۱, \gamma_۲) = (۱۰/۴, ۲)$ باشند. به‌سادگی می‌توان نشان داد

$$(\frac{۱}{\lambda_۱}, \frac{۱}{\lambda_۲}) \stackrel{m}{\succeq} (\frac{۱}{\gamma_۱}, \frac{۱}{\gamma_۲}).$$

از طرفی داریم

$$\frac{f_{D_{۲:۲}}(۰/۰۵)}{f_{D^*_{۲:۲}}(۰/۰۵)} = ۰/۵۷۴۲۳۷ > ۰/۵۴۷۹۸۶ = \frac{f_{D_{۲:۲}}(۰/۰۷)}{f_{D^*_{۲:۲}}(۰/۰۷)}.$$

بنابراین، $f_{D_{۲:۲}}(x)/f_{D^*_{۲:۲}}(x)$ نسبت به x صعودی نبوده و در نتیجه $D_{۲:۲} \not\geq_{lr} D^{\star}_{۲:۲}$.

۴ مقایسه‌های فواصل متغیرهای غیر هم‌توزیع نمایی و هم‌توزیع نمایی

لم ۱ : فرض کنید X متغیر تصادفی نمایی با نرخ خطر a و Y متغیر تصادفی آمیخته[۱۰] از متغیرهای نمایی با تابع بقای

$$\bar{F}_Y(x) = \sum_{i=۱}^{n} p_i \, e^{-a_i \, x}, \qquad x > ۰,$$

باشد، که در آن $p_i > ۰$، $\sum_{i=۱}^{n} p_i = ۱$. در این صورت روابط زیر معادلند:

الف) $Y \geq_{mrl} X$؛

ب) $Y \geq_{RS} X$؛

ج) $Y \geq_{icx} X$؛

د) $a \geq ۱/(\sum_{i=۱}^{n} \frac{p_i}{a_i})$.

---

۱۰ Mixture

برهان : چون متغیر تصادفی X، $IMRL$ است، بنابراین قضیه ۳.C.٦ در شیکد و شانتیکومار (۲۰۰۷)، بند (الف) بند (ب) را نتیجه می‌دهد. از طرفی طبق نتیجه ۴.A.۳۲ در شیکد و شانتیکومار (۲۰۰۷)، بند (ب) بر بند (ج) دلالت می‌کند. اکنون فرض کنید $Y \geq_{icx} X$، بنابراین $E(Y) \geq E(X)$. اما از طرفی چون $E(X) = ۱/a$ و آن‌که $E(Y) = ۱/(\sum_{i=۱}^{n} \frac{p_i}{a_i})$، لذا بند (ج) بند (د) را نتیجه می‌دهد. بند (د)، بنابر لم ۶.۲ از ژائو و بالاکریشنان (۲۰۰۹) نیز بند (الف) را نتیجه می‌دهد.

لم ۲ : تحت مفروضات لم ۱، روابط زیر معادلند:

الف) $Y \geq_{hr} X$؛

ب) $Y \geq_{disp} X$؛

ج) $Y \geq_{st} X$؛

د) $a \geq \sum_{i=۱}^{n} p_i a_i$.

برهان : از آن جا که آمیخته‌ایی از توزیع‌های DFR باز هم دارای خاصیت DFR است (مارشال و الکین، ۲۰۰۶)، بنابراین متغیر Y نیز DFR است. لذا طبق قضیه ۳.B.۲۰ شیکد و شانتیکومار (۲۰۰۷)، بند (الف) بند (ب) را نتیجه می‌دهد. با استفاده از این حقیقت که برای متغیرهای تصادفی نامنفی، ترتیب پراکندگی، ترتیب تصادفی معمولی را نتیجه می‌دهد، از بند (ب) بند (ج) به‌دست می‌آید. اکنون فرض کنید بند (ج) برقرار باشد. بنابراین برای هر $x > ۰$، $\bar{F}_Y(x) \geq \bar{F}_X(x)$ است. در نتیجه با استفاده از بسط تیلور حول نقطه صفر داریم

$$۱ - (\sum_{i=۱}^{n} p_i a_i)\, x + o(x) \geq ۱ - a\, x + o(x), \qquad x > ۰,$$

که نتیجه می‌دهد $a \geq \sum_{i=۱}^{n} p_i a_i$ و بند (د) به دست می‌آید. برای رسیدن از (د) به (الف)، می‌توان به لم ۱.۲ از پالتانه (۲۰۰۸) مراجعه نمود.

لم ۳ : تحت مفروضات لم ۱، روابط زیر معادلند:

الف) $Y \geq_{lr} X$؛

ب) $Y \geq_{rh} X$؛

ج) $a \geq (\sum_{i=۱}^{n} p_i a_i^۲)\big/\Big(\sum_{i=۱}^{n} p_i a_i\Big)$.

برهان : به‌سادگی از بند (الف) به بند (ب) می‌توان رسید. زیرا ترتیب نسبت درست‌نمایی، ترتیب نرخ خطر معکوس را نتیجه می‌دهد. تابع نرخ خطر معکوس متغیر تصادفی Y برای $x > ۰$ عبارت است از:

$$\tilde{r}_Y(x) = \frac{\sum_{i=۱}^{n} p_i a_i\, e^{-a_i\, x}}{\sum_{i=۱}^{n} p_i a_i\,(۱ - e^{-a_i\, x})}.$$

با استفاده از بسط تیلور حول نقطه صفر، به سادگی می‌توان نشان داد که

$$\begin{aligned}\tilde{r}_Y(x) &= \frac{\sum_{i=۱}^{n} p_i\, a_i\,(۱ - a_i\, x + o(x))}{\sum_{i=۱}^{n} p_i\,(a_i\, x + o(x))}\\ &= \frac{\sum_{i=۱}^{n} p_i\, a_i - (\sum_{i=۱}^{n} p_i\, a_i^۲)\, x + o(x)}{(\sum_{i=۱}^{n} p_i\, a_i)\, x + o(x)}\\ &= \frac{۱}{x} - \frac{\sum_{i=۱}^{n} p_i\, a_i^۲}{\sum_{i=۱}^{n} p_i\, a_i} + o(۱).\end{aligned}$$

به طور مشابه داریم

$$\begin{aligned}\tilde{r}_X(x) &= \frac{a\, e^{-a\, x}}{۱ - e^{-a\, x}}\\ &= \frac{۱}{x} - a + o(۱).\end{aligned}$$

با فرض آن‌که $Y \geq_{rh} X$، برای هر $x > ۰$، $\tilde{r}_Y(x) \geq \tilde{r}_X(x)$ است و می‌توان نتیجه گرفت $a \geq (\sum_{i=۱}^{n} p_i a_i^۲)/(\sum_{i=۱}^{n} p_i a_i)$ و لذا بند (ج) به‌دست می‌آید. برای اثبات اینکه (ج) بند (الف) را نتیجه می‌دهد به لم ۱.۳ از ژائو و همکاران (۲۰۰۹) رجوع شود.

فرض کنید $X_۱, \ldots, X_n$ متغیرهای تصادفی مستقل نمایی به ترتیب با نرخ خطرهای $\lambda_۱, \ldots, \lambda_n$ باشند. همچنین فرض کنید $Y_۱, \ldots, Y_n$ متغیرهای مستقل و

هم‌توزیع نمایی با نرخ خطر مشترک λ باشند. برای $i = ۱,\dots,n$ قرار داده شود $D_{i:n} = X_{i:n} - X_{i-۱:n}$ و $D^{\star}_{i:n} = Y_{i:n} - Y_{i-۱:n}$ به طوری که $X_{\circ:n} \equiv Y_{\circ:n} \equiv \circ$. کوچار و کوروار (۱۹۹۶) نشان دادند که تابع چگالی $D_{i:n}$ برای $i \geq ۲$ به‌صورت

$$f_{D_{i:n}}(x) = \sum_{r\in A} \frac{\prod_{i=۱}^{n} \lambda_i}{\prod_{i=۱}^{n}\sum_{j=i}^{n} \lambda(r_j)} \left(\sum_{j=i}^{n} \lambda(r_j)\right) \exp\{-x \sum_{j=i}^{n} \lambda(r_j)\}, \qquad (۲)$$

است، که در آن $\mathbf{A}$ مجموعه تمام جایگشت‌های $\{۱,\dots,n\}$ و $r = (r_۱,\dots,r_n)$ عضو مجموعه $\mathbf{A}$ است. به عبارت دیگر، توزیع $D_{i:n}$ را می‌توان به‌صورت آمیخته‌ای از توزیع‌های نمایی نوشت. برای $r = (r_۱,\dots,r_n) \in \mathbf{A}$ قرار داده شود

$$\lambda_i(r) = \sum_{j=i}^{n} \lambda(r_j), \quad p_i(r) = \frac{\prod_{i=۱}^{n} \lambda_i}{\prod_{i=۱}^{n}\sum_{j=i}^{n} \lambda(r_j)}.$$

در این صورت با استفاده از رابطه (۱) و روابط فوق، تابع توزیع $D_{i:n}$ برای $x > \circ$ به‌صورت

$$F_{D_{i:n}}(x) = \sum_{r\in A} p_i(r)\left(۱ - e^{-\lambda_i(r)\,x}\right). \qquad (۳)$$

زیر است. از طرفی $D^*_{i:n}$ دارای توزیع نمایی با نرخ خطر $\lambda(n - i + ۱)$ است. لذا از لم‌های ۱، ۲ و ۳ و مباحث فوق، بلافاصله فرع‌های زیر به‌دست می‌آیند.

فرع ۱ : فرض کنید $X_۱,\dots,X_n$ متغیرهای تصادفی مستقل نمایی به ترتیب با نرخ خطرهای $\lambda_۱,\dots,\lambda_n$ و $Y_۱,\dots,Y_n$ متغیرهای مستقل و هم‌توزیع نمایی با نرخ خطر مشترک λ باشند. آن‌گاه برای $i \geq ۲$، روابط زیر معادلند:

الف) $D_{i:n} \geq_{mrl} D^*_{i:n}$؛

ب) $D_{i:n} \geq_{RS} D^*_{i:n}$؛

ج) $D_{i:n} \geq_{ic} D^*_{i:n}$؛

د) $\lambda \geq \lambda_{mrl}$ که

$$\lambda_{mrl} = \frac{1}{n-i+1} \frac{1}{\sum_{r\in A} \frac{\prod_{i=1}^{n} \lambda_i}{\sum_{j=i}^{n} \lambda(r_j) \prod_{i=1}^{n} \sum_{j=i}^{n} \lambda(r_j)}}.$$

فرع ۲ : تحت مفروضات فرع ۱، برای $i \geq 2$، روابط زیر معادلند:

الف) $D_{i:n} \geq_{hr} D^*_{i:n}$؛

ب) $D_{i:n} \geq_{disp} D^*_{i:n}$؛

ج) $D_{i:n} \geq_{st} D^*_{i:n}$؛

د) $\lambda \geq \lambda_{hr}$ که

$$\lambda_{hr} = \frac{1}{n-i+1} \sum_{r\in A} \frac{\prod_{i=1}^{n} \lambda_i}{\prod_{i=1}^{n} \sum_{j=i}^{n} \lambda(r_j)} \sum_{j=i}^{n} \lambda(r_j).$$

فرع ۳ : تحت مفروضات فرع ۱، برای $i \geq 2$، روابط زیر معادلند:

الف) $D_{i:n} \geq_{lr} D^*_{i:n}$؛

ب) $D_{i:n} \geq_{rh} D^*_{i:n}$؛

ج) $\lambda \geq \lambda_{lr}$ که

$$\lambda_{lr} = \frac{1}{n-i+1} \frac{\sum_{r\in A} \frac{\prod_{i=1}^{n} \lambda_i}{\prod_{i=1}^{n} \sum_{j=i}^{n} \lambda(r_j)} \left(\sum_{j=i}^{n} \lambda(r_j)\right)^2}{\sum_{r\in A} \frac{\prod_{i=1}^{n} \lambda_i}{\prod_{i=1}^{n} \sum_{j=i}^{n} \lambda(r_j)} \sum_{j=i}^{n} \lambda(r_j)}.$$

بحث و نتیجه‌گیری

بسیاری از اندازه‌های پراکندگی مانند دامنه نمونه‌ای، واریانس نمونه‌ای و میانگین جینی، توابعی از فواصل نمونه‌ای هستند. از فواصل نمونه‌ایی، به‌طور گسترده در آزمون‌های نیکویی برازش، نظریه قابلیت اعتماد، نظریه مزایده و غیره استفاده می‌شود. در این مقاله، ترتیب‌های تصادفی متفاوتی میان فواصل نمونه‌ای $D_{i:n}$ و

$D^*_{i:n}$ مورد بررسی قرار گرفته و شرایط لازم و کافی برای معادل بودن برخی از این ترتیب‌های تصادفی معرفی گردیده است. همچنین برای حالت خاص $n = ۲$، نشان داده شده که تابع نرخ خطر $D_{۲:۲}$ در $(\frac{۱}{\lambda_۱}, \frac{۱}{\lambda_۲})$ شُور-کاو است.

تقدیر و تشکر

نویسندگان از پیشنهادات ارزنده داوران گرامی و هیئت تحریریه محترم مجله که باعث ارائه بهتر و بهبود مقاله شده است، کمال تشکر را دارند.

مراجع

خالدی، ب.، فارسی نژاد، س. (۱۳۸۶)، مرتب کردن آماره‌های ترتیبی با استفاده از بیشاندن واریانس، مجله پژوهش‌های آماری ایران، جلد **۴**، ۱۵۹-۱۴۹.

خالدی، ب. (۱۳۸۴)، ترتیب پراکندگی و سیستم‌های $k - out - of - n$ ، مجله پژوهش‌های آماری ایران، جلد **۳**، ۳۹-۱۵.

Balakrishnan, N. and Rao, C. R. (Eds), (1998a), *Handbook of Statistics 16–Order Statistics: Theorey and Methods*, North-Holland, Amsterdam.

Balakrishnan, N. and Rao, C. R. (Eds), (1998b), *Handbook of Statistics 17–Order Statistics: Applications*, North-Holland, Amsterdam.

Balakrishnan, N., Barmalzan, G. and Haidari, A. (2013), Stochastic Orderings and Aging Properties of Residual Life-Lengths of Live Components in $(n - k + ۱)$-out-of-n Systems. *Applied Probability*, (in press).

Hu, T. and Zhuang, W. W. (2004), Stochastic Comparisons of m-Spacings, *Statistical Planning*, **136**, 33-42.

Kirmani, S. N. U. A. (1996), On Sample Spacings from IMRL Distributions, *Statistics and Probability Letter*, **29**, 159-166.

Kochar, S. C. and Korwar, R., (1996), Stochastic Orders for Spacings of Heterogeneous Exponential Components, *Multivariate Analysis*, **59**, 272-281.

Kochar, S. C. and Rojo, J. (1996), Some New Results on Stochastic Comparisons of Spacings from Heterogeneous Exponential Disributions. *Multivariate Analysis*, **57**, 69-83.

Li, X. (2005), A Note on Expected Rent in Auction Theory. *Operation Research Letter*, **33**, 531-534.

Marshall, A. W., Olkin, I. and Arnold, B. C. (2011), *Inequalities: Theory of Majorization and Its Applications*, Springer, New York.

Marshall, A. W. and Olkin, I. (2006), *Life Distributions*, Springer, New York.

Müller, A. and Stoyan, D. (2002), *Comparison Methods for Stochastic Models and Risks*, Wiley, Chichester.

Paltanea, E. (2008), On the Comparison in Hazard Rate Ordering of Fail-Safe Systems, *Statistical Planning*, **138**, 1993-1997.

Paul, A. and Gutierrez, G. (2004), Mean Sample Spacings, Sample Size and Variability in Auction-Theoretic Framework, *Operation Research Letter*, **32**, 103-108.

Shaked, M. and Shantikumar, J. G. (2007), *Stochastic Orders*, Springer, New York.

Zhao, P., Li, X. and Balakrishnan, N. (2009), Likelihood Ratio Order of the Second Order Statistic from Independent Heterogeneous Exponential Random Variables, *Multivariate Analysis*, **100**, 952-962.

Zhao, P. and Balakrishnan, N. (2009), Characterization of MRL Order of Fail-Safe Systems with Heterogeneous Exponential Components, *Statistical Planning*, **139**, 3027-3037.