مجله علوم آماری، بهار و تابستان ۱۳۹۲
جلد ۷، شماره ۱، ص ۲۵-۴۴

نتایجی جدید در مقایسه تصادفی سیستم‌های $(n-1)$ از n

قباد برمال‌زن، عابدین حیدری
گروه آمار، دانشگاه زابل

تاریخ دریافت: ۱۳۹۱/۱۱/۲۳ تاریخ آخرین بازنگری: ۱۳۹۲/۶/۱۴

چکیده : فرض کنید دو گروه از متغیرهای تصادفی در اختیارند که اولین گروه متغیرهای تصادفی مستقل و غیر هم‌توزیع و دیگری متغیرهای تصادفی مستقل و هم‌توزیع هستند. در این مقاله، در حالتی که حجم دو نمونه نابرابرند و تمامی متغیرها دارای توزیع نمایی هستند، شرایط لازم و کافی برای برقراری ترتیب متوسط باقی‌مانده عمر، ترتیب نرخ خطر و ترتیب پراکندگی، میان دومین آماره مرتب دو گروه، به دست آورده می‌شود. همچنین هنگامی که متغیرها از توزیع وایبول پیروی می‌کنند، ترتیب نرخ خطر، ترتیب پراکندگی و ترتیب نسبت درست‌نمایی میان دومین آماره مرتب این دو گروه، مورد بررسی قرار می‌گیرد. در انتها نیز بحث و نتیجه گیری ارائه می‌شود.

واژه‌های کلیدی : سیستم $(n-1)$ از n، توزیع نمایی، توزیع وایبول، ترتیب نرخ خطر، ترتیب پراکندگی، ترتیب نسبت درست‌نمایی.

آدرس الکترونیک مسئول مقاله: قباد برمال‌زن، Ghbarmalzan@uoz.ac.ir
کد موضوع‌بندی ریاضی (۲۰۱۰): ۶۲N۰۵

۱ مقدمه

چنانچه برای فعال بودن سیستمی متشکل از n مؤلفه، فعالیت حداقل k مؤلفه لازم باشد، سیستم را k از n می‌نامند. این سیستم‌ها به دلیل کاربرد وسیع، نقش بسیار مهمی را در نظریه قابلیت اعتماد ایفا می‌کنند. فرض کنید $X_۱, \ldots, X_n$ نشان‌دهنده طول عمر مؤلفه‌های یک سیستم باشند. آماره مرتب $(n-k+۱)$ام، $X_{n-k+۱:n}$، بیانگر طول عمر یک سیستم k از n است. بنابراین، بررسی طول عمر سیستم‌های k از n معادل با بررسی آماره‌های مرتب حاصل از طول عمر مؤلفه‌های این سیستم‌ها است. به همین دلیل، بررسی خواص توزیعی آماره‌های مرتب، از اهمیت ویژه‌ایی در نظریه قابلیت اعتماد برخوردار است. حالت‌های خاصی از سیستم‌های k از n، سیستم‌های سری و موازی هستند که به ترتیب متناظر با سیستم‌های n از n و سیستم‌های ۱ از n هستند. حالت مهم دیگر، سیستم‌های $(n-۱)$ از n هستند، که در آن‌ها خرابی یکی از مؤلفه‌ها تاثیری بر فعالیت سیستم نداشته (Safe) اما با از کار افتادن دومین مؤلفه، سیستم نیز از فعالیت باز می‌ماند(Fail). لذا، سیستم‌های $(n-۱)$ از n به سیستم‌های Fail-Safe نیز شهرت دارند (بارلو و پروشان، ۱۹۹۶). همچنین، بارلو و پروشان (۱۹۸۱) منبع مناسبی برای مطالعه بیشتر، در زمینه خواص سیستم‌های k از n و کاربرد آن‌ها در نظریه قابلیت اعتماد است.

مقایسه تصادفی آماره‌های مرتب از متغیرهای مستقل و غیر هم‌توزیع، با آماره‌های متناظر براساس متغیرهای مستقل و هم‌توزیع، برای نخستین بار توسط پلدگر و پروشان (۱۹۷۱) مورد بررسی قرار گرفت. پس از آن، پروشان و ستورامان (۱۹۷۶)، دایکسترا و همکاران (۱۹۹۷)، خالدی و کوچار (۲۰۰۶، ۲۰۱۱)، بن و پالتانه (۲۰۰۶)، پالتانه (۲۰۰۸، ۲۰۱۱)، ژائو و همکاران (۲۰۰۹)، ژائو و بالاکریشنان (۲۰۰۹، ۲۰۱۱) و فانگ و ژانگ (۲۰۱۳) این مساله را مورد مطالعه قرار داده‌اند .

بسیاری از اندازه‌های پراکندگی مانند دامنه نمونه‌ای، واریانس نمونه‌ای و میانگین جینی، توابعی از فواصل نمونه‌ای هستند. فواصل نمونه‌ای به‌طور گسترده در آزمون‌های نیکویی برازش، نظریه قابلیت اعتماد، نظریه مزایده[۱] و غیره مورد استفاده

---
[۱] Auction theory

قرار گرفته است. برمال‌زن و همکاران (۱۳۹۱) به بررسی مقایسه‌های تصادفی فواصل نمونه‌ای آماره‌های مرتب از متغیرهای مستقل نمایی پرداختند و شرایط لازم و کافی برای معادل بودن برخی از این ترتیب‌های تصادفی را معرفی کردند و برای حالت خاص $n = ۲$ نشان دادند که تابع نرخ خطر دومین فاصله نمونه‌ای، در معکوس بردار نرخ خطرهای آن‌ها شُور-کاو است. در این مقاله، مقایسه تصادفی میان سیستم‌های $(n-۱)$ از n مورد بررسی قرار گرفته است.

فرض کنید $X_۱, \ldots, X_n$ متغیرهای تصادفی مستقل نمایی به ترتیب با نرخ خطرهای $\mu_۱, \ldots, \mu_n$ باشند. همچنین فرض کنید $Y_۱, \ldots, Y_n$ یک نمونه تصادفی از توزیع نمایی با نرخ خطر μ باشد. بن و پالتانه (۲۰۰۶) و پالتانه (۲۰۱۱) به ترتیب نشان دادند برای $k = ۱, \ldots, n$ روابط زیر برقرار هستند:

$$X_{k:n} \geq_{st} Y_{k:n} \Longleftrightarrow \mu \geq (\binom{n}{k}^{-۱} \sum_{۱\leq i_۱ < \ldots < i_k \leq n} \mu_{i_۱} \ldots \mu_{i_k})^{۱/k} \qquad (۱)$$

$$X_{k:n} \leq_{st} Y_{k:n} \Longleftrightarrow \mu \leq \frac{\sum_{i=۱}^{n-k+۱} \mu_{(i)}}{n-k+۱}, \qquad (۲)$$

که در آن $\mu_{(۱)} \leq \ldots \leq \mu_{(n)}$ مقادیر مرتب شده متناظر با $\mu_۱, \ldots, \mu_n$ هستند. برای حالت خاص $k = ۲$، یعنی برای سیستم‌های $(n-۱)$ از n، پالتانه (۲۰۰۸) و ژائو و بالاکریشنان (۲۰۱۱) نتایج (۱) و (۲) را به ترتیب نرخ خطر و ترتیب پراکندگی تعمیم داده و ثابت کردند:

$$X_{۲:n} \geq_{hr} (\geq_{disp}) Y_{۲:n} \Longleftrightarrow \mu \geq (\binom{n}{۲}^{-۱} \sum_{۱\leq i < j \leq n} \mu_i \mu_j)^{۱/۲} \qquad (۳)$$

$$X_{۲:n} \leq_{hr} (\leq_{disp}) Y_{۲:n} \Longleftrightarrow \mu \leq \frac{\sum_{i=۱}^{n-۱} \mu_{(i)}}{n-۱}. \qquad (۴)$$

ژائو و همکاران (۲۰۰۹) ترتیب نسبت درست‌نمایی در سیستم‌های $(n-۱)$ از n را مورد بررسی قرار داده و نشان دادند:

$$X_{۲:n} \geq_{lr} Y_{۲:n} \Longleftrightarrow \mu \geq \frac{۱}{۲n-۱} (۲S_۱ + \frac{S_۳ - S_۱ S_۲}{S_۱^۲ - S_۲}) \qquad (۵)$$

$$X_{۲:n} \leq_{lr} Y_{۲:n} \Longleftrightarrow \mu \leq \frac{\sum_{i=۱}^{n-۱} \mu_{(i)}}{n-۱}, \qquad (۶)$$

که در آن برای $k = 1, 2, 3$، $S_k = \sum_{i=1}^{n} \mu_i^k$ است. همچنین ژائو و بالاکریشنان (۲۰۰۹) نشان دادند که روابط

$$X_{2:n} \geq_{mrl} Y_{2:n} \Longleftrightarrow \mu \geq \frac{2n-1}{n(n-1)(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{S(i)} - \frac{n-1}{S_1})} \tag{7}$$

$$X_{2:n} \leq_{mrl} Y_{2:n} \Longleftrightarrow \mu \leq \frac{\sum_{i=1}^{n-1} \mu_{(i)}}{n-1}, \tag{8}$$

برقرار هستند، که در آن $S_1 = \sum_{j=1}^{n} \mu_j$ و $S(i) = S_1 - \mu_i$. در این مقاله، نتایج (۳)، (۴)، (۷) و (۸) هنگامی که تعداد مؤلفه‌های دو سیستم، لزوماً برابر نیستند، مورد بررسی قرار گرفته است. همچنین، برای حالتی که طول عمر مؤلفه‌های دو سیستم، دارای توزیع وایبول است روابط (۱) تا (۶) تعمیم داده شده است.

در بخش ۲، مفاهیم مورد نیاز ارائه شده‌اند. مقایسه تصادفی سیستم‌های $(n-1)$ از n، با حجم نمونه نابرابر، در بخش ۳ آورده شده است. در بخش ۴، سیستم‌های $(n-1)$ از n، متشکل از مؤلفه‌هایی با طول عمر وایبول مورد مقایسه قرار گرفته و شرایط لازم و کافی برای برقراری برخی از ترتیب‌های تصادفی، در این حالت، به‌دست آورده شده است.

۲ تعاریف و نمادها

در این مقاله، واژه‌های صعودی به معنای غیرنزولی و نزولی به معنای غیرصعودی به‌کار برده شده‌اند. فرض کنید متغیرهای تصادفی پیوسته و نامنفی X و Y به ترتیب دارای توابع توزیع F و G، توابع بقا $\overline{F}$ و $\overline{G}$، توابع وارون (توابع چندک[2]) از راست پیوسته F^{-1} و G^{-1} و توابع چگالی f و g باشند.

تعریف ۱ : الف) متغیر تصادفی X در ترتیب تصادفی معمولی[3] کوچک‌تر از Y است ($X \leq_{st} Y$) هرگاه برای هر $x > 0$، $\overline{F}(x) \leq \overline{G}(x)$. به عبارت دیگر، برای هر تابع صعودی $\phi : \Re \to \Re$ و با شرط وجود امیدهای ریاضی، داریم

$$X \leq_{st} Y \Longleftrightarrow E(\phi(X)) \leq E(\phi(Y)).$$

[2] Quantile functions

[3] Usual stochastic ordering

ب) متغیر تصادفی X در ترتیب متوسط مانده عمر[۴] کوچک‌تر از Y است ($X \leq_{mrl} Y$) هرگاه برای هر $x > \circ$، $m_X(x) \leq m_Y(x)$، که در آن $m_X(x) = E(X - x|X > x)$ و $m_Y(x) = E(Y - x|Y > x)$ به ترتیب بیانگر توابع متوسط مانده عمر متغیرهای تصادفی X و Y هستند.

پ) متغیر تصادفی X در ترتیب نرخ خطر[۵] کوچک‌تر از Y است ($X \leq_{hr} Y$) هرگاه $\overline{G}(x)/\overline{F}(x)$ نسبت به x صعودی باشد. در صورتی که r_X و r_Y نشان‌دهنده توابع نرخ خطر متغیرهای X و Y باشند، آن‌گاه $X \leq_{hr} Y$ اگر و فقط اگر برای هر $x > \circ$ $r_X(x) \geq r_Y(x)$ باشد.

ت) متغیر تصادفی X در ترتیب نسبت درست‌نمایی[۶] کوچکتر از Y است ($X \leq_{lr} Y$) هرگاه $g(x)/f(x)$ نسبت به x صعودی باشد.

بین ترتیب‌های تصادفی مختلف رابطه

$$X \leq_{lr} Y \Longrightarrow X \leq_{hr} Y \Longrightarrow X \leq_{st} Y,$$

برقرار است. به‌علاوه ترتیب نرخ خطر، ترتیب متوسط مانده عمر را نتیجه می‌دهد. در حالت کلی رابطه خاصی میان ترتیب تصادفی معمولی و ترتیب متوسط مانده عمر، برقرار نیست و هیچ‌کدام بر دیگری دلالت نمی‌کنند.

تعریف ۲ : متغیر تصادفی X در ترتیب پراکندگی[۷] کوچکتر از Y است ($X \leq_{disp} Y$) هرگاه

$$F^{-1}(v) - F^{-1}(u) \leq G^{-1}(v) - G^{-1}(u); \qquad \circ < u \leq v < 1.$$

ترتیب پراکندگی میان متغیرها، ترتیب میان واریانس‌های آن‌ها را نیز نتیجه می‌دهد. همچنین برای متغیرهای تصادفی نامنفی، ترتیب پراکندگی، ترتیب تصادفی معمولی را نتیجه می‌دهد. مولر و استویان (**۲۰۰۲**)، شیکد و شانتیکومار (**۲۰۰۷**)، خالدی

۴ Mean residual life ordering

۵ Hazard rate ordering

۶ Likelihood ratio ordering

۷ Dispersive ordering

(۱۳۸۴) و خالدی و همکاران (۱۳۸۶) منابع مناسبی برای بررسی و شناخت ترتیب‌های تصادفی مختلف و ارتباط بین آنها هستند.

۳ مقایسه تصادفی سیستم‌های $(n-1)$ از n متشکل از مؤلفه‌های نمایی در حالت دو نمونه‌ای

دو سیستم را در نظر بگیرید، که اولی یک سیستم $(n-1)$ از n، متشکل از مؤلفه‌های مستقل و غیر هم‌توزیع، با طول عمرهای نمایی و دیگری یک سیستم $(m-1)$ از m، متشکل از مؤلفه‌های مستقل و هم‌توزیع نمایی است. در این بخش، هدف به دست آوردن شرایط لازم و کافی برای مقایسه‌های تصادفی این دو سیستم است. در قضیه بعدی، روابط (۱) و (۳) به حالتی که تعداد مؤلفه‌های دو سیستم، لزوماً برابر نیستند، تعمیم داده شده است.

قضیه ۱ : فرض کنید $X_1,\ldots,X_n$ متغیرهای تصادفی مستقل نمایی به ترتیب با نرخ خطرهای $\mu_1,\ldots,\mu_n$ باشند. همچنین فرض کنید $Y_1,\ldots,Y_m$ نمونه‌ای تصادفی از توزیع نمایی با نرخ خطر مشترک μ باشد. آن‌گاه برای $m \geq n$، روابط زیر معادلند:

الف) $X_{2:n} \geq_{disp} Y_{2:m}$؛

ب) $X_{2:n} \geq_{hr} Y_{2:m}$؛

پ) $X_{2:n} \geq_{st} Y_{2:m}$؛

ت) $\mu \geq \mu_{hr}(m,n)$ است که در آن

$$\mu_{hr}(m,n) = \left(\binom{m}{2}^{-1} \sum_{1\leq i< j\leq n} \mu_i\mu_j\right)^{1/2}.$$

برهان : متغیرهای تصادفی $Y_{1:m}$ و $Y_{2:m} - Y_{1:m}$ مستقل و دارای توزیع نمایی هستند. از آنجا که مجموع متغیرهای مستقل با نرخ خطرهای صعودی، باز هم دارای نرخ خطر صعودی است (شیکد و شانتیکومار، ۲۰۰۷)، بنابراین $Y_{2:m}$ نیز دارای نرخ خطر صعودی بوده و بند **(الف)**، بند **(ب)** را نتیجه می‌دهد. از **(ب)** به‌سادگی بند **(پ)** به‌دست می‌آید زیرا ترتیب نرخ خطر، ترتیب تصادفی معمولی را نتیجه می‌دهد.

با استفاده از بسط تیلور[۸]، برای $x > ۰$ به‌سادگی می‌توان نشان داد:

$$F_{X_{۲:n}}(x) = (\sum_{۱\leq i< j\leq n} \mu_i\mu_j)\, x^۲ + o(x^۲), \qquad F_{Y_{۲:m}}(x) = \binom{m}{۲}\mu^۲\, x^۲ + o(x^۲).$$

اکنون فرض کنید $X_{۲:n} \geq_{st} Y_{۲:m}$. بنابراین به‌ازای $x > ۰$، $F_{X_{۲:n}}(x) \leq F_{Y_{۲:m}}(x)$ و

$$\lim_{x\to ۰}(\sum_{۱\leq i< j\leq n} \mu_i\mu_j + \frac{o(x^۲)}{x^۲}) \leq \lim_{x\to ۰}(\binom{m}{۲}\mu^۲ + \frac{o(x^۲)}{x^۲}),$$

در نتیجه بند **(ت)** به‌دست می‌آید.

با فرض آنکه $\mu \geq \mu_{hr}(m,n)$ و $S_۱ = \sum_{j=۱}^{n} \mu_j$، ژائو و بالاکریشنان (۲۰۱۱) ثابت کرده‌اند $X_{۲:n} \geq_{disp} W_۱ + W_۲$، که در آن $W_۱$ و $W_۲$ متغیرهای مستقل نمایی به ترتیب با نرخ خطرهای $S_۱$ و $(۲\sum_{۱\leq i< j\leq n}\mu_i\mu_j)/S_۱$ هستند.

برای اثبات بند **(الف)**، کافیست نشان داده شود $W_۱ + W_۲ \geq_{disp} Y_{۲:m}$. بدین منظور و با استفاده از لم ۲.۱ ژائو و بالاکریشنان (۲۰۱۱)، کافیست روابط زیر برقرار باشند:

$$\frac{۲\sum_{۱\leq i< j\leq n}\mu_i\mu_j}{S_۱} \leq (m-۱)\mu \tag{۹}$$

$$۲\sum_{۱\leq i< j\leq n} \mu_i\mu_j \leq m(m-۱)\mu^۲. \tag{۱۰}$$

از فرض $\mu \geq \mu_{hr}(m,n)$ به سادگی رابطه (۱۰) به‌دست می‌آید. از نامساوی مکلورن[۹] (بن و پالتانه، ۲۰۰۶) نتیجه می‌شود

$$S_۱ \geq \sqrt{\frac{n}{n-۱}}\sqrt{۲\sum_{۱\leq i< j\leq n}\mu_i\mu_j}. \tag{۱۱}$$

بنابراین

$$\begin{aligned}\frac{۲\sum_{۱\leq i< j\leq n}\mu_i\mu_j}{S_۱} &\leq \sqrt{\frac{n(m-۱)}{m(n-۱)}}\ \frac{۲\sum_{۱\leq i< j\leq n}\mu_i\mu_j}{S_۱}\\ &\leq \sqrt{\frac{n(m-۱)}{m(n-۱)}}\ \frac{۲\sum_{۱\leq i< j\leq n}\mu_i\mu_j}{\sqrt{\frac{n}{n-۱}}\ \sqrt{۲\sum_{۱\leq i< j\leq n}\mu_i\mu_j}}\end{aligned}$$

---

[۸] Taylor

[۹] Maclaurin

$$
\begin{aligned}
&= \sqrt{\frac{m-۱}{m}}\sqrt{۲\sum_{۱\leq i< j\leq n}\mu_i\mu_j}\\
&= (m-۱)\ \mu_{hr}(m,n)\\
&\leq (m-۱)\mu,
\end{aligned}
$$

که نامساوی اول از شرط $m \geq n$، نامساوی دوم از رابطه (۱۱) و نامساوی آخر از شرط $\mu \geq \mu_{hr}(m,n)$ به‌دست آمده‌اند. لذا رابطه (۹) نیز برقرار است.

با استفاده از قضیه ۱ و تحت شرط $m \geq n$، می‌توان یک سیستم $(n-۱)$ از n، متشکل از مؤلفه‌های مستقل و غیر هم‌توزیع نمایی را با یک سیستم $(m-۱)$ از m، متشکل از اجزای مستقل و هم‌توزیع نمایی، در ترتیب پراکندگی، ترتیب نرخ خطر و ترتیب تصادفی معمولی مقایسه نمود. در حالی‌که با استفاده از روابط (۱) و (۳)، سیستم‌ها برای مقایسه در ترتیب‌های مذکور، باید دارای تعداد مؤلفه‌های یکسانی باشند. از آنجا که $\mu_{hr}(m,n)$ به ازای n ثابت نسبت به m نزولی است می‌توان برای تابع نرخ خطر (واریانس) $X_{۲:n}$، چندین کران بالایی (پایینی) به دست آورد. سؤال مطرح این است که کدام‌یک از این کران‌ها مناسب‌تر است. از قضیه ۲.۱ در خالدی و کوچار (۲۰۰۰) می‌توان نتیجه گرفت که برای $m \geq n$، $X_{۲:n} \geq_{hr} (\geq_{disp}) Y_{۲:m}$. بنابراین می‌توان بهترین کران را در بین کران‌های موجود، با استفاده از این رابطه انتخاب کرد. با فرض آنکه $\mu \geq \mu_{hr}(n,n)$، از قضیه ۱ نتیجه می‌شود که برای $m \geq n$، $X_{۲:n} \geq_{hr} (\geq_{disp}) Y_{۲:m}$ و بهترین کران برای تابع نرخ خطر و واریانس $X_{۲:n}$ در این حالت، به‌ازای $m = n$ حاصل می‌شود. اکنون فرض کنید $\mu \in [\mu_{hr}(n+۱,n), \mu_{hr}(n,n))$، بنابراین برای $m \geq n+۱$، $X_{۲:n} \geq_{hr} (\geq_{disp}) Y_{۲:m}$ است و بهترین کران به‌ازای $m = n+۱$ به‌دست می‌آید. تحت این شرایط $X_{۲:n} \not\geq_{hr} (\geq_{disp}) Y_{۲:n}$ و در نتیجه از رابطه (۳) نمی‌توان در این حالت استفاده نمود. مثال زیر این مطلب را روشن‌تر می‌سازد.

مثال ۱ : فرض کنید $X_۱, X_۲, X_۳$ متغیرهای مستقل نمایی به ترتیب با نرخ خطرهای $\mu_۱ = ۲$، $\mu_۲ = ۵$ و $\mu_۳ = ۸$ باشند. فرض کنید $Y_۱, \ldots, Y_۵$ نمونه‌ای

تصادفی از توزیع نمایی با نرخ خطر μ باشد. در این حالت داریم:

$$\mu_{hr}(۳,۳) \approx ۴/۶۹, \qquad \mu_{hr}(۴,۳) \approx ۳/۳۲, \qquad \mu_{hr}(۵,۳) \approx ۲/۵۷.$$

بنابر قضیه ۱، برای $\mu \geq ۴/۶۹$، $X_{۲:۳} \geq_{hr} (\geq_{disp}) Y_{۲:۳}$. از طرفی برای $\mu \in [۳/۳۲, ۴/۶۹)$، داریم $X_{۲:۳} \geq_{hr} (\geq_{disp}) Y_{۲:۴}$ در حالی‌که $X_{۲:۳} \ngeq_{hr} (\ngeq_{disp}) Y_{۲:۳}$. به‌همین ترتیب برای $\mu \in [۲/۵۷, ۳/۳۲)$، $X_{۲:۳} \geq_{hr} (\geq_{disp}) Y_{۲:۵}$، اما $X_{۲:۳} \ngeq_{hr} (\ngeq_{disp}) Y_{۲:۴}$ و $X_{۲:۳} \ngeq_{hr} (\ngeq_{disp}) Y_{۲:۳}$.

لم ۱ : فرض کنید $\mu_۱, \ldots, \mu_n$ مقادیر حقیقی مثبتی باشند. در این‌صورت برای $m \geq n$ داریم:

$$\frac{S_۱}{m} \geq \mu_{mrl}(m,n) = \frac{۲m - ۱}{m(m-۱)\left(\sum_{i=۱}^{n} \frac{۱}{S(i)} - \frac{n-۱}{S_۱}\right)},$$

که در آن $S_۱ = \sum_{j=۱}^{n} \mu_j$، و $S(i) = S_۱ - \mu_i$.

برهان : از لم ۲.۵ ژائو و بالاکریشنان (۲۰۰۹) نتیجه می‌شود که $\frac{S_۱}{n} \geq \mu_{mrl}(n,n)$. بنابراین:

$$\begin{aligned} \frac{S_۱}{m} &= \frac{n}{m}\frac{S_۱}{n} \\ &\geq \frac{n}{m}\mu_{mrl}(n,n) \\ &= \frac{(m-۱)(۲n-۱)}{(n-۱)(۲m-۱)}\mu_{mrl}(m,n) \\ &\geq \mu_{mrl}(m,n), \end{aligned}$$

که آخرین نامساوی، به این دلیل است که برای $m \geq n$، $\frac{(m-۱)(۲n-۱)}{(n-۱)(۲m-۱)} \geq ۱$.

قضیه ۲ : فرض کنید $X_۱, \ldots, X_n$ متغیرهای تصادفی مستقل نمایی به ترتیب با نرخ خطرهای $\mu_۱, \ldots, \mu_n$ باشند. همچنین فرض کنید $Y_۱, \ldots, Y_m$ نمونه‌ای تصادفی از توزیع نمایی با نرخ خطر مشترک μ باشد. در این‌صورت برای $m \geq n$ داریم:

$$X_{۲:n} \geq_{mrl} Y_{۲:m} \Longleftrightarrow \mu \geq \mu_{mrl}(m,n) = \frac{۲m-۱}{m(m-۱)\left(\sum_{i=۱}^{n}\frac{۱}{S(i)} - \frac{n-۱}{S_۱}\right)},$$

که در آن $S_۱ = \sum_{j=۱}^{n} \mu_j$ و $S(i) = S_۱ - \mu_i$.

برهان : شرط لازم: فرض کنید $X_{۲:n} \geq_{mrl} Y_{۲:m}$. همان‌طور که ژائو و بالاکریشنان (۲۰۰۹) نشان دادند برای $x > ۰$، توابع متوسط مانده عمر $X_{۲:n}$ و $Y_{۲:m}$ به ترتیب عبارتند از:

$$m_{X_{۲:n}}(x) = \sum_{i=۱}^{n} \frac{۱}{S(i)} - \frac{n-۱}{S_۱} + o(۱), \quad m_{Y_{۲:m}}(x) = \frac{۲m-۱}{m(m-۱)\,\mu} + o(۱).$$

بنابراین از $X_{۲:n} \geq_{mrl} Y_{۲:m}$ و روابط فوق، به سادگی نتیجه می‌شود که $\mu \geq \mu_{mrl}(m,n)$ است.

شرط کافی: فرض کنید $\mu \geq \mu_{mrl}(m,n)$. ژائو و بالاکریشنان (۲۰۰۹) نشان دادند $X_{۲:n} \geq_{mrl} W_۱ + W_۲$ جایی‌که $W_۱$ و $W_۲$ متغیرهای تصادفی مستقل نمایی به ترتیب با نرخ خطرهای $۱/\left(\sum_{i=۱}^{n} \frac{\mu_i}{S_۱ S(i)}\right)$ و $S_۱$ هستند. بنابراین برای به‌دست آوردن نتیجه مورد نظر، کافیست نشان دهیم $W_۱ + W_۲ \geq_{mrl} Y_{۲:m}$ است. برای این منظور، با استفاده از لم ۲.۴ ژائو و بالاکریشنان (۲۰۰۹) کافیست روابط زیر برقرار باشند:

$$\sum_{i=۱}^{n} \frac{\mu_i}{S_۱ S(i)} \geq \frac{۱}{(m-۱)\,\mu}, \tag{۱۲}$$

$$\frac{۱}{S_۱} + \sum_{i=۱}^{n} \frac{\mu_i}{S_۱ S(i)} \geq \frac{۱}{m\,\mu} + \frac{۱}{(m-۱)\mu}. \tag{۱۳}$$

با استفاده از لم ۱ و فرض $\mu \geq \mu_{mrl}(m,n)$ می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=۱}^{n} \frac{\mu_i}{S_۱\, S(i)} &= \frac{۲m-۱}{m(m-۱)\mu_{mrl}(m,n)} - \frac{۱}{S_۱} \\
&\geq \frac{۲m-۱}{m(m-۱)\mu_{mrl}(m,n)} - \frac{۱}{m\,\mu_{mrl}(m,n)} \\
&= \frac{۱}{(m-۱)\mu_{mrl}(m,n)} \\
&\geq \frac{۱}{(m-۱)\mu}. \qquad (۱۴)
\end{aligned}$$

اکنون با استفاده از رابطه (۱۴) مشاهده می‌شود که رابطه (۱۲) برقرار است. همچنین داریم:

$$\begin{aligned}\frac{1}{S_1}+\sum_{i=1}^{n}\frac{\mu_i}{S_1\,S(i)} &= \frac{2m-1}{m(m-1)\,\mu_{mrl}(m,n)}\\ &= \frac{1}{m\mu_{mrl}(m,n)}+\frac{1}{(m-1)\mu_{mrl}(m,n)}\\ &\geq \frac{1}{m\,\mu}+\frac{1}{(m-1)\mu}. \qquad (15)\end{aligned}$$

لذا رابطه (۱۳) نیز برقرار است.

قضیه ۳ : فرض کنید $X_1,\ldots,X_n$ متغیرهای تصادفی مستقل نمایی به ترتیب با نرخ خطرهای $\mu_1,\ldots,\mu_n$ باشند. همچنین فرض کنید $Y_1,\ldots,Y_m$ نمونه‌ای تصادفی از توزیع نمایی با نرخ خطر مشترک μ باشد. دراین‌صورت برای $m\geq n$، روابط زیر معادلند:

الف) $X_{2:n}\leq_{disp} Y_{2:m}$؛

ب) $X_{2:n}\leq_{hr} Y_{2:m}$؛

پ) $X_{2:n}\leq_{mrl} Y_{2:m}$؛

ت) $\mu\leq\hat{\mu}(m,n)$ است که در آن $\hat{\mu}(m,n)=\frac{\sum_{i=1}^{n-1}\mu_{(i)}}{m-1}$.

برهان : طبق آنچه در اثبات قضیه ۱ بیان شد، بند **(الف)**، بند **(ب)** را نتیجه می‌دهد. همچنین ترتیب نرخ خطر بر ترتیب متوسط مانده عمر دلالت می‌کند و از **(ب)**، بند **(پ)** به‌دست می آید. فرض کنید $S_1=\sum_{j=1}^{n}\mu_j$، $S(i)=S_1-\mu_i$ و $X_{2:n}\leq_{mrl} Y_{2:m}$ باشد. بنابراین برای هر $x>0$، رابطه زیر برقرار است:

$$\begin{aligned}m_{X_{2:n}}(x) &= \frac{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{S(i)}\,e^{-S(i)\,x}-\frac{n-1}{S_1}\,e^{-S_1\,x}}{\sum_{i=1}^{n}e^{-S(i)\,x}-(n-1)\,e^{-S_1\,x}}\\ &\leq \frac{\frac{m}{(m-1)\,\mu}\,e^{-(m-1)\,\mu\,x}-\frac{m-1}{m\,\mu}\,e^{-m\,\mu\,x}}{m\,e^{-(m-1)\,\mu\,x}-(m-1)\,e^{-m\,\mu\,x}}=m_{Y_{2:n}}(x).\end{aligned}$$

اکنون با میل دادن x به سمت بینهایت خواهیم داشت:

$$\lim_{x\to\infty} m_{X_{2:n}}(x) = \frac{1}{\min_{1\leq i\leq n} S(i)}$$

$$\begin{aligned} &\le \lim_{x\to\infty} m_{Y_{۲:n}}(x) \\ &= \frac{۱}{(m-۱)\mu}, \end{aligned}$$

درنتیجه

$$\mu \le \frac{\min_{۱\le i\le n} S(i)}{m-۱} = \frac{\sum_{i=۱}^{n-۱} \mu_{(i)}}{m-۱}.$$

با فرض آنکه $\mu \le \hat{\mu}(m,n)$، ژائو و بالاکریشنان (۲۰۰۹) نشان دادند $X_{۲:n} \le_{mrl} W_۱ + W_۲$ است به‌طوری که $W_۱$ و $W_۲$ متغیرهای تصادفی مستقل نمایی به ترتیب با نرخ خطرهای $\min_{۱\le i\le n} S(i)$ و $S_۱$ هستند. برای رسیدن به نتیجه مطلوب، کافیست نشان داده شود $W_۱ + W_۲ \le_{mrl} Y_{۲:m}$. لذا با استفاده از لم ۲.۱ ژائو و بالاکریشنان (۲۰۱۱) کافیست روابط زیر برقرار باشند:

$$(m-۱)\,\mu \le \min_{۱\le i\le n} S(i), \tag{۱۶}$$

$$m(m-۱)\mu^۲ \le S_۱ \min_{۱\le i\le n} S(i). \tag{۱۷}$$

رابطه (۱۶) بلافاصله از فرض $\mu \le \hat{\mu}(m,n)$ نتیجه می‌شود. از طرفی، چون $m \ge n$، لذا داریم:

$$m\,\mu_{(n)} \ge n\,\mu_{(i)} \ge \mu_{(۱)} + \ldots + \mu_{(n)} = S_۱. \tag{۱۸}$$

لذا از رابطه (۱۸) و فرض $\mu \le \hat{\mu}(m,n)$، نتیجه می‌شود:

$$\mu \le \frac{\min_{۱\le i\le n} S(i)}{m-۱} \le \frac{S_۱}{m}.$$

بنابراین $m\,\mu \le S_۱$ و $(m-۱)\,\mu \le \min_{۱\le i\le n} S(i)$. با ضرب طرفین این روابط در همدیگر، رابطه (۱۷) به‌دست می‌آید.

فرض کنید $X_۱,\ldots,X_n$ متغیرهای تصادفی مستقل نمایی به ترتیب با نرخ خطرهای $\mu_۱,\ldots,\mu_n$ باشند. همچنین فرض کنید $Y_۱,\ldots,Y_m$ نمونه‌ای تصادفی از توزیع نمایی با نرخ خطر مشترک μ باشد. میانگین هندسی و هارمونیک $\mu_۱,\ldots,\mu_n$ به‌ترتیب با $\mu_G = \left(\prod_{i=۱}^{n} \mu_i\right)^{۱/n}$ و $\mu_H = n/\left(\sum_{i=۱}^{n} ۱/\mu_i\right)$ نشان داده می‌شوند.

نکته قابل توجه این است که اگر $\mu = \mu_G$ باشد، پالتانه (۲۰۰۸) با ارائه مثالی نشان داد که $X_{۲:n}$ و $Y_{۲:n}$ را نمی‌توان در ترتیب نرخ خطر مقایسه نمود. از طرفی، اگر $n = ۲$ و $\mu = \mu_H$ می‌توان از رابطه (۷) برای مقایسه دو سیستم در ترتیب متوسط باقی‌مانده عمر استفاده نمود زیرا در این حالت $\mu_H \geq \mu_{mrl}(۲, ۲)$. اما برای $n \geq ۳$ این شرایط برقرار نیست و در نتیجه رابطه (۷) عملاً غیر قابل استفاده است. مثال زیر روشن می‌سازد که چگونه با استفاده از قضایای ۱ و ۲ می‌توان $X_{۲:n}$ و $Y_{۲:m}$ را در ترتیب نرخ خطر (ترتیب پراکندگی) و ترتیب متوسط مانده عمر، هنگامی که به‌ترتیب $\mu = \mu_G$ و $\mu = \mu_H$ است، مقایسه نمود.

مثال ۲ : فرض کنید $X_۱, X_۲, X_۳$ متغیرهای مستقل نمایی به ترتیب با نرخ خطرهای $\mu_۱ = ۳, \mu_۲ = ۷, \mu_۳ = ۱۰$ باشند. فرض کنید $Y_۱, \ldots, Y_۵$ متغیرهای مستقل و هم‌توزیع نمایی با نرخ خطر مشترک μ باشند. مقادیر میانگین هندسی و هارمونیک μ_iها به ترتیب عبارتند از $\mu_G \approx ۳/۱$ و $\mu_H \approx ۲/۱۹۵$. همچنین داریم: $\mu_{hr}(۳, ۳) \approx ۳/۷$ ، $\mu_{hr}(۴, ۳) \approx ۲/۶۱$ ، $\mu_{mrl}(۵, ۳) = ۱/۹۲۵$، $\mu_{mrl}(۴, ۳) \approx ۲/۴۹$ و $\mu_{mrl}(۳, ۳) \approx ۳/۵۶$.

چون $\mu_{hr}(۳, ۳) > \mu_G$، طبق قضیه ۱ می‌توان نتیجه گرفت $X_{۲:۳} \ngeq_{hr} (\ngeq_{disp}) Y_{۲:۳}$. اما روشن است که $\mu_G \geq \mu_{hr}(۴, ۳)$. پس برای $\mu = \mu_G$، $X_{۲:۳} \geq_{hr} (\geq_{disp}) Y_{۲:۴}$. از طرف دیگر، چون $\mu_{mrl}(۳, ۳) > \mu_H$ پس $X_{۲:۳} \ngeq_{mrl} Y_{۲:۳}$. اما با توجه به اینکه $\mu_H \geq \mu_{mrl}(۵, ۳)$ لذا قضیه ۲ بیان می‌کند که برای $\mu = \mu_H$، $X_{۲:۳} \geq_{mrl} Y_{۲:۵}$.

۴ مقایسه تصادفی سیستم‌های $(n-۱)$ از n، متشکل از مؤلفه‌های با طول عمر وایبول

در این بخش نیز همانند بخش قبل، سیستم‌های $(n-۱)$ از n مورد توجه قرار می‌گیرند با این تفاوت که طول عمر مؤلفه‌ها از توزیع وایبول پیروی می‌کنند. متغیر تصادفی X دارای توزیع وایبول با پارامتر شکل $\beta > ۰$ و پارامتر مقیاس $\mu > ۰$

است ($X \sim W(\beta,\mu)$) هرگاه تابع توزیع آن به‌صورت

$$F(x;\beta,\mu) = ۱ - e^{-(\mu x)^{\beta}}, \qquad x > ۰.$$

باشد. این توزیع دارای خواص جالب و قابل توجهی است. برای مثال، تابع توزیع و تابع بقای آن، دارای فرم بسته‌ای است. همچنین برای $\beta < ۱$ دارای نرخ خطر نزولی، برای $\beta = ۱$ دارای نرخ خطر ثابت و برای $\beta > ۱$ دارای نرخ خطر صعودی است.

قضیه ۴ : فرض کنید $X_۱,\dots,X_n$ متغیرهای تصادفی مستقلی باشند به‌طوری‌که برای $i = ۱,\dots,n$ $X_i \sim W(\beta,\mu_i)$ است. همچنین فرض کنید $Y_۱,\dots,Y_n$ نمونه‌ای تصادفی از توزیع $W(\beta,\mu)$ باشد. آن‌گاه برای $k = ۱,\dots,n$ داریم:
الف)

$$X_{k:n} \geq_{st} Y_{k:n} \Longleftrightarrow \mu \geq \mu(k,\beta) = (\binom{n}{k}^{-۱} \sum_{۱\leq i_۱ < \dots < i_k \leq n} \mu_{i_۱}^{\beta} \dots \mu_{i_k}^{\beta})^{۱/k\beta}.$$

ب)

$$X_{k:n} \leq_{st} Y_{۲:n} \Longleftrightarrow \mu \leq (\frac{\sum_{i=۱}^{n-k+۱} \mu_{(i)}^{\beta}}{n-k+۱})^{۱/\beta}.$$

برهان : **الف)** فرض کنید $U_۱,\dots,U_n$ متغیرهای مستقل نمایی به ترتیب با نرخ خطرهای $\mu_۱^{\beta},\cdots,\mu_n^{\beta}$ و $V_۱,\dots,V_n$ نمونه‌ای تصادفی از توزیع نمایی با نرخ خطر مشترک μ^{β} باشند.
شرط لازم: فرض کنید $X_{k:n} \geq_{st} Y_{k:n}$. از بسته بودن ترتیب تصادفی معمولی، تحت تبدیل‌های صعودی، نتیجه می‌شود که $X_{k:n}^{\beta} \geq_{st} Y_{k:n}^{\beta}$. اما $X_{k:n}^{\beta} \stackrel{st}{=} U_{k:n}$ و $Y_{k:n}^{\beta} \stackrel{st}{=} V_{k:n}$، که در آن نماد $\stackrel{st}{=}$ بیانگر هم‌توزیعی است. بنابراین از رابطه (۱) داریم:

$$\mu^{\beta} \geq (\binom{n}{k}^{-۱} \sum_{۱\leq i_۱ < \dots < i_k \leq n} \mu_{i_۱}^{\beta} \dots \mu_{i_k}^{\beta})^{۱/k}, \tag{۱۹}$$

که نتیجه می‌دهد $\mu \geq \mu(k,\beta)$.

شرط کافی: فرض کنید $\mu \geq \mu(k,\beta)$. در نتیجه رابطه (۱۹) برقرار بوده که به نوبه

خود و طبق رابطه (۱) نتیجه می‌دهد که $U_{k:n}^{1/\beta} \geq_{st} V_{k:n}^{1/\beta}$. چون $U_{k:n}^{1/\beta} \stackrel{st}{=} X_{k:n}$، $V_{k:n}^{1/\beta} \stackrel{st}{=} Y_{k:n}$ و ترتیب تصادفی معمولی، تحت تبدیل‌های صعودی، بسته است بنابراین $X_{k:n} \geq_{st} Y_{k:n}$.

ب) اثبات مشابه بند **(الف)** است.

در قضایای بعدی، برای حالت خاص $k = 2$، یعنی برای سیستم‌های $(n-1)$ از n، ترتیب موجود در قضیه ۴، به ترتیب نرخ خطر و ترتیب پراکندگی تعمیم یافته است.

قضیه ۵ : فرض کنید $X_1, \ldots, X_n$ متغیرهای تصادفی مستقلی باشند به‌طوری‌که برای $i = 1, \ldots, n$، $X_i \sim W(\beta, \mu_i)$ است. همچنین فرض کنید $Y_1, \ldots, Y_n$ نمونه‌ای تصادفی از توزیع $W(\beta, \mu)$ باشد. آن‌گاه روابط زیر برقرارند:

الف)

$$X_{2:n} \geq_{hr} Y_{2:n} \Longleftrightarrow \mu \geq \mu_{hr}(\beta) = (\binom{n}{2}^{-1} \sum_{1 \leq i < j \leq n} \mu_i^\beta \mu_j^\beta)^{1/2\beta}.$$

ب)

$$X_{2:n} \leq_{hr} Y_{2:n} \Longleftrightarrow \mu \leq \hat{\mu}(\beta) = (\frac{\sum_{i=1}^{n-1} \mu_{(i)}^\beta}{n-1})^{1/\beta}.$$

برهان : **الف)** فرض کنید $U_1, \cdots, U_n$ متغیرهای مستقل نمایی به‌ترتیب با نرخ خطرهای $\mu_1^\beta, \cdots, \mu_n^\beta$ و $V_1, \cdots, V_n$ نمونه‌ای تصادفی از توزیع نمایی با نرخ خطر مشترک μ^β باشند.

شرط لازم: فرض کنید $X_{2:n} \geq_{hr} Y_{2:n}$. طبق قضیه $1.B.2$ از شیکد و شانتیکومار (۲۰۰۷)، ترتیب نرخ خطر، تحت تبدیل‌های صعودی بسته بوده و در نتیجه $X_{2:n}^\beta \geq_{hr} Y_{2:n}^\beta$. بنابراین $U_{2:n} \geq_{hr} V_{2:n}$ که طبق رابطه (۳) نتیجه می‌دهد:

$$\mu^\beta \geq (\binom{n}{2}^{-1} \sum_{1 \leq i < j \leq n} \mu_i^\beta \mu_j^\beta)^{1/k}. \tag{۲۰}$$

بنابراین $\mu \geq \mu_{hr}(\beta)$.

شرط کافی: فرض کنید $\mu \geq \mu_{hr}(\beta)$. در نتیجه رابطه (۲۰) برقرار است و با توجه به

رابطه (۳) مشاهده می‌شود که $U_{2:n}^{1/\beta} \geq_{hr} V_{2:n}^{1/\beta}$. بنابراین $X_{2:n} \geq_{hr} Y_{2:n}$.
ب) اثبات مشابه بند (**الف**) است.

قضیه ۶ : فرض کنید $X_1, \ldots, X_n$ متغیرهای تصادفی مستقلی باشند به‌طوری‌که برای $i = 1, \ldots, n$، $X_i \sim W(\beta, \mu_i)$ است. همچنین فرض کنید $Y_1, \ldots, Y_n$ نمونه‌ای تصادفی از توزیع $W(\beta, \mu)$ باشد. آن‌گاه برای $0 < \beta \leq 1$ روابط زیر برقرارند:
الف)

$$X_{2:n} \geq_{disp} Y_{2:n} \Longleftrightarrow \mu \geq \mu_{hr}(\beta) = (\binom{n}{2}^{-1} \sum_{1 \leq i < j \leq n} \mu_i^\beta \mu_j^\beta)^{1/2\beta}.$$

ب)

$$X_{2:n} \leq_{disp} Y_{2:n} \Longleftrightarrow \mu \leq \hat{\mu}(\beta) = (\frac{\sum_{i=1}^{n-1} \mu_{(i)}^\beta}{n-1})^{1/\beta}.$$

برهان : **الف)** ژائو و بالاکریشنان (۲۰۱۱) برای $0 < \beta \leq 1$ نشان دادند:

$$\mu \geq \mu_{hr}(\beta) \Longrightarrow X_{2:n} \geq_{disp} Y_{2:n}.$$

اکنون فرض کنید $X_{2:n} \geq_{disp} Y_{2:n}$. بنابراین رابطه $X_{2:n} \geq_{st} Y_{2:n}$ برقرار بوده و از بند (**الف**) قضیه ۴، نتیجه می‌شود که $\mu \geq \mu_{hr}(\beta)$.
ب) اثبات مشابه بند (**الف**) است.

مثال ۳ : فرض کنید X_1, X_2, X_3 متغیرهای تصادفی مستقل با $X_i \sim W(\beta, \mu_i)$، $i = 1, 2, 3$ باشند، به‌طوری‌که $(\mu_1, \mu_2, \mu_3) = (1, 5, 9)$. فرض کنید Y_1, Y_2, Y_3 نمونه‌ای تصادفی از توزیع $W(\beta, \mu)$ باشد.
الف) فرض کنید $\beta = 2$. با انجام محاسبات لازم، نتیجه می‌شود که $\mu_{hr}(2) \approx 5/163$ و $\hat{\mu}(2) \approx 3/605$. بنابراین از قضیه ۵ داریم:

$$X_{2:3} \geq_{hr} Y_{2:3} \Longleftrightarrow \mu \geq 5/163$$

$$X_{2:3} \leq_{hr} Y_{2:3} \Longleftrightarrow \mu \leq 3/605.$$

ب) فرض کنید $\beta = 0/5$. پس از انجام محاسبات لازم، نتیجه می‌شود که $\hat{\mu}(0/5) \approx 1/272$ و $\mu_{hr}(0/5) \approx 2/079$. بنابراین از قضایای ۵ و ۶ داریم:

$$X_{2:3} \geq_{hr} (\geq_{disp}) Y_{2:3} \Longleftrightarrow \mu \geq 2/079$$
$$X_{2:3} \leq_{hr} (\geq_{disp}) Y_{2:3} \Longleftrightarrow \mu \geq 1/272$$

قضیه ۷ : فرض کنید $X_1, \ldots, X_n$ متغیرهای تصادفی مستقلی باشند به‌طوری‌که برای $i = 1, \ldots, n$، $X_i \sim W(\beta, \mu_i)$ است. همچنین فرض کنید $Y_1, \ldots, Y_n$ نمونه‌ای تصادفی از توزیع $W(\beta, \mu)$ باشد. آن‌گاه
الف)

$$X_{2:n} \geq_{lr} Y_{2:n} \Leftrightarrow \mu \geq \mu_{lr}(\beta) = \left(\frac{1}{2n-1}\left(2S_1(\beta) + \frac{S_3(\beta) - S_1(\beta)\, S_2(\beta)}{S_1^2(\beta) - S_2(\beta)}\right)\right)^{1/\beta},$$

که در آن برای $k = 1, 2, 3$، $S_k(\beta) = \sum_{i=1}^{n} \mu_i^{\beta}$.
ب)

$$X_{2:n} \leq_{lr} Y_{2:n} \Longleftrightarrow \mu \leq \hat{\mu}(\beta) = \left(\frac{\sum_{i=1}^{n-1} \mu_{(i)}^{\beta}}{n-1}\right)^{1/\beta}.$$

برهان : **الف)** فرض کنید $U_1, \ldots, U_n$ متغیرهای مستقل نمایی به ترتیب با نرخ خطرهای $\mu_1^{\beta}, \ldots, \mu_n^{\beta}$ و $V_1, \ldots, V_n$ نمونه‌ای تصادفی از توزیع نمایی با نرخ خطر مشترک μ^{β} باشند.
شرط لازم: فرض کنید $X_{2:n} \geq_{lr} Y_{2:n}$. طبق قضیه $1.C.8$ از شیکد و شانتیکومار (۲۰۰۷)، ترتیب نسبت درست‌نمایی، تحت تبدیل‌های صعودی بسته بوده و در نتیجه $X_{2:n}^{\beta} \geq_{lr} Y_{2:n}^{\beta}$. بنابراین $U_{2:n} \geq_{lr} V_{2:n}$ و از رابطه (۵) داریم:

$$\mu^{\beta} \geq \frac{1}{2n-1}\left(2S_1(\beta) + \frac{S_3(\beta) - S_1(\beta)\, S_2(\beta)}{S_1^2(\beta) - S_2(\beta)}\right). \tag{21}$$

بنابراین $\mu \geq \mu_{lr}(\beta)$.
شرط کافی: فرض کنید $\mu \geq \mu_{lr}(\beta)$. در نتیجه رابطه (۲۱) برقرار است. بنابراین از

رابطه (۵) می‌توان نتیجه گرفت که $U_{2:n}^{1/\beta} \geq_{lr} V_{2:n}^{1/\beta}$ یعنی $X_{2:n} \geq_{lr} Y_{2:n}$.
ب) اثبات مشابه بند (**الف**) است.

بحث و نتیجه‌گیری

ترتیب‌های تصادفی متفاوتی میان دومین آماره مرتب از یک نمونه تصادفی نمایی ناهمگن، با دومین آماره مرتب، متناظر با یک نمونه تصادفی نمایی همگن، در حالتی‌که حجم نمونه‌ها متفاوت باشند، مورد بررسی قرار گرفت. همچنین در حالتی‌که حجم نمونه‌ها برابر و توزیع متغیرهای تصادفی مورد نظر وایبل باشند، شرایط لازم و کافی برای برقراری برخی ترتیب‌های تصادفی، میان دومین آماره مرتب به دست آورده شده است.

تقدیر و تشکر

نویسندگان از پیشنهادات ارزنده سردبیر ارجمند، داوران گرامی، ویراستار و هیئت تحریریه محترم مجله که باعث ارائه بهتر و بهبود مقاله شده است، کمال قدردانی و تشکر را دارند.

مراجع

برمال‌زن، ق.، حیدری، ع.، عبداله‌زاده، م. (۱۳۹۱)، مقایسه‌های تصادفی فواصل نمونه‌ای آماره‌های مرتب از متغیرهای مستقل نمایی، مجله علوم آماری، **۶**، ۱۳۵–۱۵۰.

خالدی، ب.، فارسی‌نژاد، س. (۱۳۸۶)، مرتب کردن آماره‌های ترتیبی با استفاده از بیشاندن واریانس، مجله پژوهش‌های آماری ایران، **۴**، ۱۴۹–۱۵۹.

خالدی، ب. (۱۳۸۴)، ترتیب پراکندگی و سیستم‌های k-out-of-n ، مجله پژوهش‌های آماری ایران، **۳**، ۱۵–۳۹.

Barlow, R. E. and Proschan, F. (1996), *Mathematical Theorey of Reliability*, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia.

Barlow, R. E. and Proschan, F. (1981), *Statistical Theorey of Reliability and Life Testing: Probability Models*, Silver Springer, Maryland.

Bon, J. L. and Paltanea, E. (2006), Comparisons of Order Statistics in a Random Sequense to the Same Statistics with i.i.d Variables, *Esaim: Probability and Statistics,* **10**, 1-10.

Dykstera, R. A., Kochar, S. C. and Rojo, J. (1997), Stochastic Comparisons of Parallel Systems of Heterogeneous Exponential Components, *Statistical Planning and Inference*, **65**, 203-211.

Fang, L. and Zhang, Z. (2013), Stochastic Comparison of Series Systems with Heterogeneous Weibull Components, *Statistics and Probability Letters*, **83**, 1649-1653.

Khaledi, B. E. and Kochar, S. C. (2000), On Dispersive Ordering between Order Statistics in One-Sample and Two-Sample Problems, *Statisistics and Probability Letters*, **46**, 257-261.

Khaledi, B. E. and Kochar, S. C. (2006), Weibull Ditribution: Some Stocastic Comparisons Results, *Statistical Planning and Inference,* **136**, 3121-3129.

Khaledi, B. E., Farsinezhad, S. and Kochar, S. C. (2011), Stochastic Comparisons of Order Statistics in the Scale Model, *Statistical Planning and Inference*, **141**, 276-286.

Muller, A. and Stoyan, D. (2002), *Comparison Methods for Stochastic Models and Risks,* John Wiley and Sons, New York.

Murthy, D. N. P., Xie, M. and Jiang, R. (2004), *Weibull Models,* John Wiley and Sons, New Jersey.

Paltanea, E., (2008), On the Comparison in Hazard Rate Ordering of Fail-Safe Systems, *Statistical Planning and Inference*, **138**, 1993-1997.

Paltanea, E. (2011), Bounds for Mixtures of Order Statistics from Exponentials and Applications, *Multivariate Analysis*, **102**, 896-907.

Pledger, P. and Proschan, F. (1971), Comparisons of Order Statistics and of Spacings from Heterogeneous Distributions, J. S. Rustagi (Ed.), *Optimizing Methods in Statistics*, Academic Press, New York.

Proschan, F. and Sethuraman, J. (1976), Stochastic Comparisons of Order Statistics from Heterogeneous Populations, with Applications in Reliability, *Journal of Multivariate Analysis*, **6**, 608-616.

Shaked, M. and Shantikumar, J. G. (2007), *Stochastic Orders*, Springer, New York.

Zhao, P., Li, X. and Balakrishnan, N. (2009), Likelihood Ratio Order of the Second Order Statistic from Independent Heterogeneous Exponential Random Variables, *Multivariate Analysis*, **100**, 952-962.

Zhao, P. and Balakrishnan, N. (2009), Characterization of MRL Order of Fail-Safe Systems with Heterogeneous Exponential Components, *Journal of Statistical Planning and Inference*, **139**, 3027-3037.

Zhao, P. and Balakrishnan, N. (2011), Dispersive Ordering of Fail-Safe Systems with Heterogeneous Exponential Components, *Metrika,* **74**, 203-210.