

مجله علوم آماری، پاییز و زمستان ۱۳۹۲

جلد ۷، شماره ۲، ص ۱۸۹-۲۰۶

## رفتار حدی آماره آزمون نمره در مدل رگرسیونی خطی با مانده‌های مانا و نامانا

صدیقه زمانی مهربان، علیرضا نعمت‌اللهی

گروه آمار، دانشگاه شیراز

تاریخ دریافت: ۱۳۹۲/۲/۲۸ تاریخ آخرین بازنگری: ۱۳۹۲/۱۱/۱۹

**چکیده:** در این مقاله برآوردگرهای (شبه) درست‌نمایی و توزیع حدی آماره آزمون نمره مربوط به چند آزمون فرض مختلف از جمله آزمون داشتن ریشه واحد برای مدل رگرسیونی خطی با مانده‌های مانا و نامانا به دست آورده می‌شوند. سپس با روش مونت کارلو نشان داده می‌شود که برآوردگرهای (شبه) درست‌نمایی به دست آمده، برآوردگرهای مناسبی هستند و چندک‌های توزیع حدی آماره‌های آزمون داشتن ریشه واحد محاسبه و در جداولی ارائه می‌شوند.

**واژه‌های کلیدی:** مدل خودبازگشتی، رگرسیون خطی، برآوردگر (شبه) درست‌نمایی، آماره آزمون نمره، آزمون ریشه واحد، قضیه حد مرکزی تابعی.

---

آدرس الکترونیک مسئول مقاله: صدیقه زمانی مهربان، s.zamani121@yahoo.com  
کد موضوع‌بندی ریاضی (۲۰۱۰): ۶۰F۱۷، ۶۲M۱۰، ۶۰J۶۵

۱ مقدمه

مدل رگرسیونی خطی  $y_i = \beta^T x_i + \varepsilon_i \quad i = 1, \dots, n$  را در نظر بگیرید، که در آن  $x_i$  بردار  $d$  بعدی غیر تصادفی و مانده‌ها از مدل  $AR(1)$  پیروی می‌کنند. یعنی

$$\varepsilon_i = \rho \varepsilon_{i-1} + \eta_i \quad i = 2, \dots, n \quad -\infty < \rho < \infty$$

به طوری که  $\rho \in (-\infty, \infty)$  و  $\eta_i$  متغیرهای تصادفی مستقل و هم توزیع با میانگین صفر و واریانس  $\sigma^2$  هستند. برای  $\rho \in (-\infty, \infty)$  ماتریس‌های  $d \times d$  بعدی

$$X_n(\rho) = \sum_{i=1}^n (x_i - \rho x_{i-1})(x_i - \rho x_{i-1})^T$$

تعریف و فرض می‌شود برای  $n$ های به اندازه کافی بزرگ، همیشه مثبت هستند و

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{1 \leq i \leq n} x_i^T X_n^{-1}(\rho) x_i = 0 \quad (1)$$

تحت فرض ۱،  $X_n(\rho)$  برای همه  $n$ ها نامنفرد است (راس مالر، ۲۰۰۳). در ادامه برآوردگرهای (شبه) درست‌نمایی و توزیع حدی آماره‌های آزمون داشتن ریشه واحد، آزمون خودهمبستگی در مدل خودبازگشتی، آزمون خودهمبستگی در رگرسیون خطی برای مدل رگرسیونی خطی با مانده‌های مانا و نامانا محاسبه می‌شوند. توزیع حدی آماره این آزمون‌ها را راس مالر (۲۰۰۳) با اثباتی نسبتاً پیچیده ارائه نمود. در بخش ۳ با استفاده از آماره آزمون نمره با اثباتی ساده‌تر رفتار حدی آماره آزمون‌های بیان شده مطالعه می‌شوند. سپس با استفاده از روش مونت کارلو چندک‌های توزیع حدی آماره‌های آزمون ریشه واحد محاسبه می‌شوند. در بخش ۴ جداولی مشابه جداول دیکی (۱۹۷۶) ارائه می‌شوند که می‌تواند در آزمون فرضیه‌های مربوط به ریشه‌های واحد مورد استفاده محققان قرار گیرد.

۲ برآورد پارامترها

مدل

$$y_i = \beta^T x_i + e_i \quad i = 1, \dots, n \quad (2)$$

صدیقه زمانی مهران، علیرضا نعمت‌اللهی ..... ۱۹۱

را در نظر بگیرید، که در آن بردار غیر تصادفی و  $e_i$  ها متغیرهای تصادفی هستند، به طوری که  $e_1 = \eta_1$  و

$$e_i = \rho e_{i-1} + \eta_i \quad i = 2, \dots, n \quad (3)$$

که در آن  $\eta_i$  ها متغیرهای تصادفی مستقل و هم توزیع با میانگین صفر و واریانس  $\sigma^2$  هستند.

ابتدا فرض می شود  $\eta_i$  متغیرهای تصادفی مستقل و هم توزیع با توزیع مشترک  $N(0, \sigma^2)$  باشند. در این صورت لگاریتم تابع (شبه) درستنمایی  $y_2, \dots, y_n$  به شرط  $y_1$  عبارت است از

$$\varphi(\rho, \beta, \sigma^2) = -\frac{n-1}{2} \log 2\pi - \frac{n-1}{2} \log \sigma^2 - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=2}^n (\varepsilon_i - \rho \varepsilon_{i-1})^2.$$

در این مرحله با حذف فرض نرمالیتی و ماکسیم کردن تابع لگاریتم (شبه) درستنمایی برآوردگرهای (شبه) درستنمایی پارامترهای  $\sigma^2, \beta, \rho$  محاسبه می شوند.

$$\frac{\partial \varphi_n}{\partial \sigma^2} = -\frac{n-1}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4} \sum_{i=2}^n (\varepsilon_i - \rho \varepsilon_{i-1})^2$$

$$\frac{\partial \varphi_n}{\partial \beta} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=2}^n (\varepsilon_i - \rho \varepsilon_{i-1})(x_i - \rho x_{i-1})$$

$$\frac{\partial \varphi_n}{\partial \rho} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=2}^n \varepsilon_{i-1} (\varepsilon_i - \rho \varepsilon_{i-1})$$

برآوردگر پارامترها در صورت وجود به صورت

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}^2(n) &= \frac{1}{n-1} \sum_{i=2}^n (\hat{\varepsilon}_i - \hat{\rho}(n) \hat{\varepsilon}_{i-1})^2, \\ \sum_{i=2}^n (\hat{\varepsilon}_i - \hat{\rho}(n) \hat{\varepsilon}_{i-1})(x_i - \hat{\rho}(n) x_{i-1}) &= 0 \\ \sum_{i=2}^n \hat{\varepsilon}_{i-1} (\hat{\varepsilon}_i - \hat{\rho}(n) \hat{\varepsilon}_{i-1}) &= 0 \end{aligned} \quad (4)$$

۱۹۲ رفتار حدی آماره آزمون نمره در مدل رگرسیونی خطی.....

قابل محاسبه‌اند. حال بردار  $\theta$  و  $d + 1$  بعدی  $\theta_0 = (\beta_0, \rho_0)$  را در نظر بگیرید و به‌طور مشابه فرض کنید  $\theta = (\beta, \rho)$  و قرار دهید

$$S_n(\theta) = \frac{\partial \varphi_n}{\partial \theta} = \left( \frac{\partial \varphi_n}{\partial \beta}, \frac{\partial \varphi_n}{\partial \rho} \right)$$

$$F_n(\theta) = -\frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial \theta \partial \theta^T},$$

که در آن داریه‌های ماتریس  $F_n(\theta)$  به‌صورت

$$\begin{aligned} F_{\beta\beta}(\theta) &= -\frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial \beta \partial \beta^T} = -\frac{\partial}{\partial \beta} \left( \frac{\partial \varphi_n}{\partial \beta^T} \right) = -\frac{\partial}{\partial \beta} \left( \frac{\partial \varphi_n}{\partial \beta} \right)^T \\ &= \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \rho x_{i-1})(x_i - \rho x_{i-1})^T = \frac{1}{\sigma^2} X_n(\rho), \end{aligned}$$

$$F_{\beta\rho}(\theta) = -\frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial \beta \partial \rho} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=2}^n x_{i-1} (\varepsilon_i - \rho \varepsilon_{i-1}) + \varepsilon_{i-1} (x_i - \rho x_{i-1})$$

$$F_{\rho\rho}(\theta) = -\frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial \rho^2} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=2}^n \varepsilon_{i-1}^2$$

قابل محاسبه‌اند که در آن‌ها  $\frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial \rho^2} = -F_{\rho\rho}(\theta) = -\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=2}^n \varepsilon_{i-1}^2 < 0$

همچنین با توجه به رابطه (۵) ثابت  $\frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial \beta \partial \beta^T} = -F_{\beta\beta}(\theta) = -\frac{1}{\sigma^2} X_n(\rho) < 0$

می‌شود (راس مالر، ۲۰۰۳)  $\left| \begin{array}{cc} \frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial \beta \partial \beta^T} & \frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial \beta \partial \rho} \\ \frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial \beta^T \partial \rho} & \frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial \rho^2} \end{array} \right|_{\theta=\hat{\theta}} > 0$

توجه شود که  $E(S_n(\theta_0)) = 0$ ،  $E\left(\frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial \theta \partial \theta^T} \Big|_{\theta=\theta_0}\right) = D_n = E(F_n(\theta_0))$

$$V(S_n(\theta_0)) = D_n \text{ و}$$

برای هر  $n = 1, \dots$  همسایگی  $N_n(A)$  برای  $\theta_0$  به‌صورت

$$N_n(A) = \{\theta \in R^{d+1} : (\theta - \theta_0)^T D_n (\theta - \theta_0) \leq A^2\}, A \geq 0,$$

تعریف می‌شود و فرض می‌کنیم  $\theta \in N_n(A)$  همچنین برای هر  $A \geq 0$  داریم

$$\sup_{\theta \in N_n(A)} \left\| D_n^{-\frac{1}{2}} F_n(\theta) D_n^{-\frac{T}{2}} - G_n \right\| \xrightarrow{P} \infty \quad (5)$$

که در آن  $G_n = \begin{pmatrix} I_d & 0 \\ 0 & \frac{\sum_{i=2}^n \varepsilon_{i-1}^2}{\Delta_n(\rho_0, \sigma_0)} \end{pmatrix}$  در توزیع به ماتریس

$$G = \begin{pmatrix} I_d & \circ \\ \circ & S^*(\rho_o, \sigma_o) \end{pmatrix}$$

همگرا است. (راس مالر، ۲۰۰۳) که در آن  $nc \geq E(\sum_{t=2}^n e_{t-1}^2) = \Delta_n(\rho_o, \sigma_o)$  و

$$S^*(\rho_o, \sigma_o) = \begin{cases} 1 & , |\rho_o| < 1 \\ 2 \int_0^1 W^2(t) & , |\rho_o| = 1 \\ S^2(\rho_o, \sigma_o) & , |\rho_o| > 1 \end{cases}$$

در حالت  $|\rho_o| > 1$ ، متغیر تصادفی  $\frac{n_j}{\rho_o^j} \sum_{j \geq 1} \frac{n_j}{\rho_o^j}$  به‌طور تقریباً مطمئن متناهی است، چون سری تعریف شده به‌طور تقریباً مطمئن، مطلقاً همگرا است (چاو، ۱۹۶۵).

با توجه به رابطه (۵) داریم (راس مالر، ۲۰۰۳)

$$F_n(\hat{\theta}(n)) = D_n^{-\frac{1}{2}} G_n D_n^{\frac{T}{2}} \quad (۶)$$

### ۳ آزمون فرض‌ها

در این بخش رفتار حدی آماره‌های آزمون نمره (هینکلی، ۱۹۷۴) مربوط به چند آزمون فرض مختلف بررسی می‌شوند.

#### ۱.۳ آزمون ریشه واحد در مانده‌های رگرسیونی

تحت فرض  $\rho_o = 1$  مدل  $e_i = \rho_o e_{i-1} + \eta_i$  به قدم تصادفی تبدیل می‌شود. آزمون ریشه واحد در مانده‌های رگرسیونی معادل آزمون  $\rho_o = 1 : H_{o1}$  در مقابل  $\rho_o \neq 1 : H_{a1}$  است. در این آزمون  $\rho_o$  پارامتر مورد علاقه و  $\beta_o$  و  $\sigma_o^2$  پارامترهای مزاحم هستند. آماره آزمون نمره برای فرضیه  $H_{o1}$  برابر  $(F_n^{\rho\rho}(\theta)|_{\theta=\hat{\theta}_o})^{-1} SC_1$  است، که در آن  $F_n^{\rho\rho}(\theta) = F_{\rho\rho}(\hat{\theta}_o) - F_{\rho\beta}(\hat{\theta}_o)(F_{\beta\beta}(\hat{\theta}_o))^{-1} F_{\beta\rho}(\hat{\theta}_o)$  و  $\hat{\theta}_o$  برآوردگر شبه‌درست‌نمایی  $\theta$  تحت  $H_{o1}$  است.

۱۹۴ ..... رفتار حدی آماره آزمون نمره در مدل رگرسیونی خطی

قضیه ۱ : تحت روابط (۱) تا (۳) توزیع حدی آماره آزمون تحت فرضیه  $H_{01} : \rho_0 = 1$  در مقابل  $H_{11} : \rho_0 \neq 1$  به صورت

$$SC_1 = S_\rho^\gamma(F_n^{\rho\rho}(\theta)|\theta = \hat{\theta}_0)^{-1} \xrightarrow{d} \frac{(W^\gamma(1) - 1)^\gamma}{\int_0^1 W^\gamma(t) dt}, \quad n \rightarrow \infty$$

است، که در آن  $W(t)$  فرایند وینر استاندارد است.

برهان : فرض کنید  $\hat{\theta} = (\hat{\beta}(n), \hat{\rho}(n))$  برآوردهای بدون محدودیت (شبه) درست‌نمایی پارامتر  $\theta$  باشند و  $\hat{\theta}_0 = (\beta_0, 1)$  مقادیر صحیح  $\theta$  تحت فرضیه  $H_{01}$  باشد. با توجه به بسط تیلور  $S(\theta)$  حول  $\hat{\theta}_0$  داریم

$$\begin{aligned} S_n(\hat{\theta}) &= S_n(\hat{\theta}_0) + \frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial \theta \partial \theta^T}(\hat{\theta} - \hat{\theta}_0) + O_p(1) \\ &= S_n(\hat{\theta}_0) - F_n(\hat{\theta}_0) \Delta \hat{\theta} + O_p(1) \end{aligned}$$

باتوجه به این که  $S_n(\hat{\theta}) = 0$  و  $S_\beta(\hat{\theta}_0) = 0$  می‌توان نتیجه گرفت

$$S_n(\hat{\theta}_0) = \begin{bmatrix} S_\beta(\hat{\theta}_0) \\ \beta_\rho(\hat{\theta}_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{\beta\beta}(\hat{\beta}_0) & F_{\beta\rho}(\hat{\theta}_0) \\ F_{\rho\beta}(\hat{\theta}_0) & F_{\rho\rho}(\hat{\theta}_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \hat{\beta} \\ \Delta \hat{\rho} \end{bmatrix} + O_p(1)$$

بنابراین

$$S_\rho(\hat{\theta}_0) = (F_{\rho\beta}(\hat{\theta}_0) \Delta \hat{\beta} + F_{\rho\rho}(\hat{\theta}_0) \Delta \hat{\rho}) + O_p(1)$$

و

$$0 = (F_{\beta\beta}(\hat{\theta}_0) \Delta \hat{\beta} + F_{\beta\rho}(\hat{\theta}_0) \Delta \hat{\rho}) + O_p(1)$$

که در آن  $O_p(1)$  نماد کران‌داری تصادفی است، یعنی برای هر  $\varepsilon > 0$ ،  $P(|X_n| \geq k) \leq \varepsilon$  در نتیجه

$$S_\rho(\hat{\theta}_0) = (F_{\rho\rho}(\hat{\theta}_0) - F_{\rho\beta}(\hat{\theta}_0)(F_{\beta\beta}(\hat{\theta}_0))^{-1}F_{\beta\rho}(\hat{\theta}_0)) \Delta \hat{\rho} + O_p(1)$$

$$= F^{\rho\rho}(\hat{\theta}_\circ)\Delta\hat{\rho} + O_p(1)$$

که در آن

$$F^{\rho\rho}(\hat{\theta}_\circ) = \frac{1}{\hat{\sigma}_\rho^2} \sum_{i=2}^n e_{i-1}^\rho - \frac{1}{\hat{\sigma}_\rho^2} \left[ \sum_{i=2}^n x_{i-1}^T (e_i - \hat{\rho}_\circ e_{i-1}) + e_{i-1} (x_i - \hat{\rho}_\circ x_{i-1})^T \right] \\ \times \mathbf{X}_n^{-1}(\hat{\rho}_\circ) \left[ \sum_{i=2}^n x_{i-1}^T (e_i - \hat{\rho}_\circ e_{i-1}) + e_{i-1} (x_i - \hat{\rho}_\circ x_{i-1})^T \right] \quad (V)$$

تحت فرض  $H_{\circ 1}$  آماره‌ای برای این آزمون به صورت  $\Delta\hat{\rho} = \hat{\rho}(n) - \rho = \frac{\sum_{i=2}^n e_{i-1}\eta_i}{\sum_{i=2}^n e_{i-1}^\rho}$  است، چنانچه جمله دوم رابطه (V) از چپ و راست در  $\Delta\hat{\rho}$  ضرب شود داریم

$$\Delta\hat{\rho} | (e_i - \hat{\rho}_\circ e_{i-1}) \mathbf{X}_n^{-\frac{T}{\rho}} x_{i-1} |^\rho \Delta\hat{\rho} \leq \max_{1 \leq i \leq n} x_i^T \mathbf{X}_n^{-1}(\hat{\rho}_\circ) x_i \\ \times \Delta\hat{\rho} \left( \sum_{i=2}^n (e_i - \hat{\rho}_\circ e_{i-1}) \right)^\rho \Delta\hat{\rho} \\ = \max_{1 \leq i \leq n} x_i^T \mathbf{X}_n^{-1}(\hat{\rho}_\circ) x_i \left( \frac{\sum_{i=2}^n e_{i-1}\eta_i}{\sum_{i=2}^n e_{i-1}^\rho} \right)^\rho \sum_{i=2}^n (e_i - \hat{\rho}_\circ e_{i-1})^\rho \\ = o(1) o_p(1) = o_p(1)$$

رابطه آخر با توجه به رابطه (۱) و نامساوی چپیشف برقرار است. برای این منظور توجه کنید که

$$\max_{1 \leq i \leq n} x_i^T \mathbf{X}_n^{-1}(\hat{\rho}_\circ) x_i \rightarrow \circ \quad n \rightarrow \infty$$

در نتیجه  $\max_{1 \leq i \leq n} x_i^T \mathbf{X}_n^{-1}(\hat{\rho}_\circ) x_i = O(1)$  همچنین

$$P\left(\frac{\sum_{i=2}^n (e_i - \hat{\rho}_\circ e_{i-1})}{\Delta_n(\rho_\circ, \sigma_\rho^\rho)} \geq k\right) \leq P\left(\frac{\sum_{i=2}^n (e_i - \hat{\rho}_\circ e_{i-1})}{n} \geq k\right) \\ \leq P\left(\frac{\sum_{i=2}^n E(e_i - \hat{\rho}_\circ e_{i-1})}{nk}\right) \\ = \circ \quad n \rightarrow \infty$$

بنابراین  $(\sum_{i=2}^n (e_i - \hat{\rho}_0 e_{i-1}))^2 = o_p(\Delta_n^2(\rho_0, \sigma_0^2))$  و

$$\begin{aligned} P\left(\frac{\sum_{i=2}^n (e_{i-1}^2)}{\Delta_n^2(\rho_0, \sigma_0^2)} \geq k\right) &\leq P\left(\frac{\sum_{i=2}^n E(e_{i-1}^2)}{\Delta_n^2(\rho_0, \sigma_0^2)k}\right) \\ &= \frac{1}{\Delta_n(\rho_0, \sigma_0^2)k} \leq \frac{1}{nk} \rightarrow 0 \quad n \rightarrow \infty \end{aligned}$$

بنابراین  $\sum_{i=2}^n e_{i-1}^2 = o_p(\Delta_n^2(\rho_0, \sigma_0^2))$  همچنین

$$\begin{aligned} P\left(\frac{\sum_{i=2}^n (e_{i-1} \eta_i)}{\Delta_n(\rho_0, \sigma_0^2)} \geq k\right) &\leq P\left(\frac{\sum_{i=2}^n E(e_{i-1})E(\eta_i)}{\Delta_n^2(\rho_0, \sigma_0^2)k}\right) \\ &= \frac{\sigma_0^2}{\Delta_n(\rho_0, \sigma_0^2)k} \leq \frac{1}{nk} \rightarrow 0 \quad \text{as } n \rightarrow \infty \end{aligned}$$

بنابراین  $\sum_{i=2}^n e_{i-1} \eta_i = o_p(\Delta_n(\rho_0, \sigma_0^2))$  پس می توان نتیجه گرفت

$$\left(\frac{\sum_{i=2}^n (e_{i-1} \eta_i)}{\sum_{i=2}^n e_{i-1}^2}\right)^2 \left(\sum_{i=2}^n (e_i - \hat{\rho}_0 e_{i-1})\right)^2 = o_p(1)$$

همچنین توجه شود که

$$\begin{aligned} &\Delta \hat{\rho} \left(\sum_{i=2}^n (e_{i-1} (x_i - \hat{\rho}_0 x_{i-1})) \mathbf{X}_n^{-\frac{T}{2}}(\hat{\rho}_0)\right)^2 \Delta \hat{\rho} \\ &\leq (\mathbf{X}_n^{-\frac{1}{2}}(\hat{\rho}) \sum_{i=2}^n (x_i - \hat{\rho}_0 x_{i-1})^T (x_i - \hat{\rho}_0 x_{i-1}) \mathbf{X}_n^{-\frac{T}{2}}(\hat{\rho}_0)) \Delta \hat{\rho} \left(\sum_{i=2}^n e_{i-1}^2\right) \Delta \hat{\rho} \\ &= \mathbf{X}_n^{-\frac{1}{2}}(\hat{\rho}_0) \mathbf{X}_n^1(\hat{\rho}_0) \mathbf{X}_n^{-\frac{T}{2}}(\hat{\rho}_0) \frac{(\sum_{i=2}^n e_{i-1} \eta_i)^2}{\sum_{i=2}^n e_{i-1}^2} = o_p(1) \end{aligned}$$

از آنجا که  $\sum_{i=2}^n e_{i-1} \eta_i = o_p(\Delta_n(\rho_0, \sigma_0^2))$  و  $\sum_{i=2}^n e_{i-1}^2 = o_p(\Delta_n^2(\rho_0, \sigma_0^2))$  داریم

$$\Delta \hat{F}^{\rho\rho}(\hat{\theta}_0) \Delta \hat{\rho} = \frac{\Delta \hat{\rho}}{\hat{\sigma}_0} \sum_{i=2}^n e_{i-1}^2 \Delta \hat{\rho} + o_p(1).$$



در نتیجه

$$\begin{aligned}
 SC_1 &= \{S_p^\gamma(\hat{\theta}_0)(F^{\rho\rho}(\theta))^{-1}\}_{\theta=\hat{\theta}_0} \\
 &= \Delta\hat{\rho}(F^{\rho\rho}(\theta))(F^{\rho\rho}(\theta))^{-1}(F^{\rho\rho}(\theta))\Delta\hat{\rho} \\
 &= \Delta\hat{\rho}(F^{\rho\rho}(\theta))\Delta\hat{\rho} \\
 &= (\hat{\rho} - 1)\left(\frac{1}{\hat{\sigma}_0} \sum_{i=2}^n e_{i-1}^\gamma\right)(\hat{\rho} - 1) + o_p(1) \\
 &= n(\hat{\rho} - 1)\left(\frac{n^{-\gamma}}{\hat{\sigma}_0} \sum_{i=2}^n e_{i-1}^\gamma\right)n(\hat{\rho} - 1) + o_p(1) \\
 &= \frac{(n^{-1} \sum_{i=1}^n e_{i-1}\eta_i)^\gamma}{\hat{\sigma}_0 n^{-\gamma} \sum_{i=1}^n e_{i-1}^\gamma} + o_p(1)
 \end{aligned}$$

بنابراین تحت فرض  $H_{01}$  با توجه به قضیه حد مرکزی تابعی داریم (وی، ۲۰۰۶)

$$SC_1 \xrightarrow{d} \frac{(W^\gamma(1) - 1)^\gamma}{\gamma \int_0^1 W^\gamma(t) dt}, \quad n \rightarrow \infty$$

که در آن  $W(t)$  فرایند وینر است.

### ۲.۳ آزمون خودهمبستگی در مدل خودبازگشتی

توجه شود اگر  $\rho_0 = 0$ ، آنگاه مدل (۲) به مدل رگرسیونی با مانده‌های مستقل و هم‌توزیع با میانگین صفر و واریانس متنه‌ای تبدیل می‌شود. آزمون خودهمبستگی در رگرسیون خطی معادل آزمون  $\rho_0 = 0$  :  $H_{02}$  در مقابل  $\rho_0 \neq 0$  :  $H_{12}$  است. در این آزمون پارامتر مورد علاقه و  $\beta_0$  و  $\sigma_0^2$  پارامترهای مزاحم هستند. آماره آزمون نمره برای  $H_{02}$  برابر  $(S_n^\gamma(F_n^{\rho\rho}(\theta))^{-1})_{\theta=\hat{\theta}_0}$  است، که در آن  $F_n^{\rho\rho}(\theta) = F_{\rho\rho}(\hat{\theta}_0) - F_{\rho\rho}(\hat{\theta}_0)(F_{\beta\beta}(\hat{\theta}_0))^{-1}F_{\beta\rho}(\hat{\theta}_0)$  (شبهه) درست‌نمایی  $\theta$  تحت فرض  $H_{02}$  است.

۱۹۸ ..... رفتار حدی آماره آزمون نمره در مدل رگرسیونی خطی

قضیه ۲: تحت روابط (۱) تا (۳) آماره آزمون تحت فرضیه  $H_0$  به توزیع کای اسکور با یک درجه آزادی همگرا می شود به عبارت دیگر

$$SC_2 = S_\rho^\gamma(\hat{\theta}_0)(F_n^{\rho\rho}(\theta)|_{\theta=\hat{\theta}_0})^{-1} \xrightarrow{d} \chi^2(1), \quad n \rightarrow \infty$$

برهان: فرض کنید  $\hat{\theta} = (\hat{\beta}(n), \hat{\rho}(n))$  برآوردهای بدون محدودیت (شبه) درست‌نمایی پارامتر  $\theta$  باشند و  $\hat{\theta}_0 = (\beta_0, \rho_0)$  مقادیر صحیح  $\theta$  تحت فرض  $H_0$  باشد. مشابه حالت قبل داریم

$$\begin{aligned} S_\rho(\hat{\theta}_0) &= (F_{\rho\rho}(\hat{\theta}_0) - F_{\rho\beta}(\hat{\theta}_0)(F_{\beta\beta}(\hat{\theta}_0))^{-1}F_{\beta\rho}(\hat{\theta}_0))\Delta\hat{\rho} + O_p(1) \\ &= F^{\rho\rho}(\hat{\theta}_0)\Delta\hat{\rho} + O_p(1) \end{aligned}$$

که در آن

$$\begin{aligned} F^{\rho\rho}(\hat{\theta}_0) &= \frac{1}{\hat{\sigma}_0^\gamma} \sum_{i=2}^n e_{i-1}^\gamma - \frac{1}{\hat{\sigma}_0^\gamma} \left[ \sum_{i=2}^n x_{i-1}^T (e_i - \hat{\rho}_0 e_{i-1}) + e_{i-1} (x_i - \hat{\rho}_0 x_{i-1})^T \right] \\ &\times \mathbf{X}_n^{-1}(\hat{\rho}_0) \left[ \sum_{i=2}^n x_{i-1}^T (e_i - \hat{\rho}_0 e_{i-1}) + e_{i-1} (x_i - \hat{\rho}_0 x_{i-1})^T \right] \quad (\lambda) \end{aligned}$$

تحت فرض  $H_0$ ، داریم  $\Delta\hat{\rho} = \hat{\rho}(n) - \rho_0 = \frac{\sum_{i=2}^n e_{i-1} \eta_i}{\sum_{i=2}^n e_{i-1}^\gamma}$ ، با ضرب  $\Delta\hat{\rho}$  در طرفین رابطه (۸) مشابه اثبات قضیه ۱ داریم

$$\Delta\hat{\rho} F^{\rho\rho}(\hat{\theta}_0) \Delta\hat{\rho} = \Delta\hat{\rho} \frac{\sum_{i=2}^n e_{i-1}^\gamma}{\hat{\sigma}_0} \Delta\hat{\rho} + o_p(1)$$

در نتیجه

$$\begin{aligned} SC_2 &= \{S_\rho^\gamma(\hat{\theta}_0)(F^{\rho\rho}(\theta))^{-1}\}_{\theta=\hat{\theta}_0} \\ &= \{\Delta\hat{\rho} F^{\rho\rho}(\theta)(F^{\rho\rho}(\theta))^{-1}(F^{\rho\rho}(\theta))\Delta\hat{\rho}\} \\ &= \Delta\hat{\rho} \frac{\sum_{i=2}^n e_{i-1}^\gamma}{\hat{\sigma}_0} \Delta\hat{\rho} + o_p(1) \end{aligned}$$

تذکر ۱: اگر  $\hat{\theta}(n)$  برآوردگر ماکسیمم درست‌نمایی  $\theta$  باشد، تحت شرایط مطلوب و برای  $n$ های بزرگ داریم

$$\frac{\hat{\theta}(n) - \theta}{\sigma_n(\hat{\theta}(n))} \xrightarrow{d} N(0, 1)$$

که در آن  $\sigma_n(\theta) = \frac{1}{I(\theta)}$  و  $I(\theta)$  اطلاع فیشر است که در اینجا همان  $F_n(\theta)$  است. بنابراین تحت فرضیه  $H_{02}$  و با توجه به تذکر ۱  $SC_2 \xrightarrow{d} \chi^2(1)$  در نتیجه  $(\hat{\rho}(n) - 1) \left( \frac{\sum_{i=2}^n e_i^2 - 1}{\sigma_0} \right)^{\frac{1}{2}} \xrightarrow{d} N(0, 1)$

### ۳.۳ آزمون خودهمبستگی در رگرسیون خطی

اگر  $\beta_0 = 0$  مدل (۲) به مدل خودبازگشتی مرتبه اول تبدیل می‌شود. آزمون رگرسیون در حضور خودهمبستگی معادل آزمون  $H_{03}: \beta_0 = 0$  در مقابل  $H_{13}: \beta_0 \neq 0$  است. در این آزمون  $\beta_0$  پارامتر مورد علاقه و  $\rho_0$  و  $\sigma_0^2$  پارامترهای مزاحم هستند. آماره آزمون نمره برای  $H_{03}$  برابر  $SC_3 = S_{\beta}^2(\hat{\theta}_0) (F^{\beta\beta} |_{\theta=\hat{\theta}_0})^{-1}$  است، که در آن  $F_{\beta\beta}(\hat{\theta}_0) = F_{\rho\rho}(\hat{\theta}_0)$  و  $F_n^{\beta\beta}(\hat{\theta}_0) = F_{\beta\beta}(\hat{\theta}_0) - F_{\rho\rho}(\hat{\theta}_0)$  (شبه) درست‌نمایی  $\theta$  تحت فرضیه  $H_{03}$  است.

قضیه ۳: تحت روابط (۱) تا (۳) آماره آزمون تحت فرضیه  $H_{03}$  به توزیع کای اسکور با  $d$  درجه آزادی همگرا می‌شود به عبارت دیگر

$$SC_3 = S_{\beta}^2(F^{\beta\beta} |_{\theta=\hat{\theta}_0})^{-1} \xrightarrow{d} \chi^2(d), \quad n \rightarrow \infty$$

برهان: فرض کنید  $\hat{\theta} = (\hat{\beta}(n), \hat{\rho}(n))$  برآوردگرهای بدون محدودیت (شبه) درست‌نمایی پارامتر  $\theta$  باشند و  $\theta_0 = (0, \rho)$  مقادیر صحیح  $\theta$  تحت فرضیه  $H_{03}$  باشد. مشابه حالت قبل داریم

$$S_n(\hat{\theta}_0) = F_n(\hat{\theta}_0) \Delta \hat{\theta} + O_p(1).$$

۲۰۰ رفتار حدی آماره آزمون نمره در مدل رگرسیونی خطی.....

بنابراین

$$S_{\beta}(\hat{\theta}_o) = (F_{\beta\beta}(\hat{\theta}_o) - F_{\beta\rho}(\hat{\theta}_o)(F_{\rho\rho}(\hat{\theta}_o))^{-1}F_{\rho\beta}(\hat{\theta}_o))\Delta\hat{\beta} + O_p(1) \\ = F^{\beta\beta}(\hat{\theta}_o)\Delta\hat{\beta} + O_p(1)$$

باتوجه به رابطه (۵) داریم

$$F^{\beta\beta}(\hat{\theta}_o) = F_{\beta\beta}(\hat{\theta}_o) = X_n(\rho_o)$$

در نتیجه

$$SC_{\beta} = (\Delta\beta)^T (F^{\beta\beta}(\hat{\theta}_o))^{-1} \Delta\beta = |X_n^{\frac{1}{2}}(\rho_o)\Delta\beta|^2$$

باتوجه به اینکه  $X_n^{\frac{1}{2}}(\rho_o)\Delta\beta \xrightarrow{d} Nd(0, I)$  نتیجه مورد نظر حاصل می شود.

#### ۴ مطالعه شبیه سازی

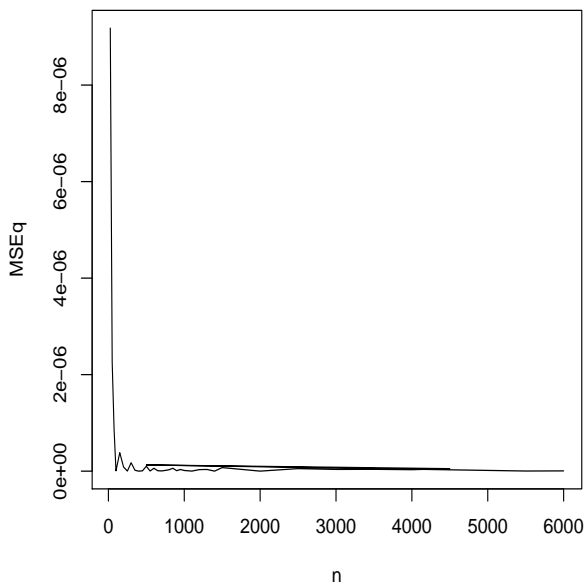
در این بخش در دو مرحله با استفاده از نرم افزار R با نمونه های شبیه سازی شده با اندازه های  $n = 25, 50, 75, \dots$  و تعداد نمونه های بوت استرپ به اندازه  $m = 2000$  تکرار، برآوردگرهای (شبه) درستنمایی پارامترهای  $\rho$  و  $\beta$  محاسبه و نمودارهای میانگین توان دوم خطا مربوط به این برآورد گرها رسم می شوند همچنین چندک های آماره آزمون داشتن ریشه واحد تعیین می شوند. برای این منظور مدل  $Y = X\beta + E$  به فرم ماتریسی  $y_i = \beta^T x_i + e_i, i = 1, \dots, n$  خودبازگشتی مرتبه اول  $e_i = \rho_{i-1} + a_i$  پیروی کند و

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \\ \vdots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} \end{bmatrix}, \beta = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix}$$

همچنین خطاها دارای توزیع نرمال استاندارد هستند.

مرحله اول: برآوردگرهای (شبه) درست‌نمایی پارامترهای  $\rho$  و  $\beta$  شبیه‌سازی می‌شوند. چون برآورد (شبه) درست‌نمایی این پارامترها فرم بسته ای ندارد برای شبیه‌سازی آن‌ها از روش عددی استفاده می‌شود. برای این منظور ابتدا خطاها را از توزیع نرمال استاندارد و  $x$  را از توزیع  $U(0, 1)$  شبیه‌سازی کرده و برآوردگرهای پارامترهای  $\rho$  و  $\beta$  را برای  $n = 25, 50, 75, \dots$  و نمونه بوت استرپ  $m = 2000$  تکرار با  $seed(120)$  تولید نموده و میانگین توان دوم خطا مربوط به برآورد پارامترهای تولید شده محاسبه شده و در جداول ۱ و ۲ ارائه شده‌اند. همچنین نمودار میانگین توان دوم خطای برآوردگرهای تولید شده نیز در شکل‌های ۱، ۲ و ۳ رسم شده است.

همان‌طور که در جدول ۱ ملاحظه می‌شود مقادیر به‌دست آمده برای برآوردگرهای (شبه) درست‌نمایی پارامترها نزدیک به مقادیر واقعی  $\rho = 1, \beta_1 = 1$  و  $\beta_2 = 2$  هستند.



شکل ۱: نمودار  $MSE$  برآوردگر  $\rho$  در مقابل  $n$

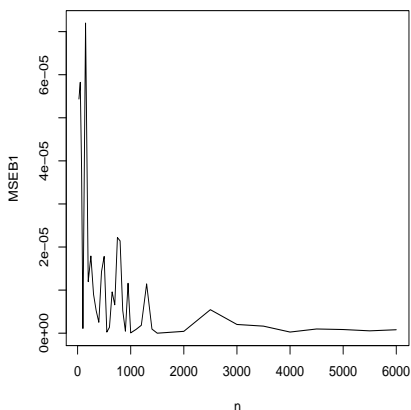
جدول ۱: مقادیر برآورد پارامترهای  $\rho$ ،  $\beta_1$  و  $\beta_2$

| $\beta_2$ | $\beta_1$ | $\hat{\rho}$ | $N$  |
|-----------|-----------|--------------|------|
| ۱/۹۸۲۹    | ۱/۰۲۹۲    | ۰/۹۶۲۷       | ۲۵   |
| ۲/۰۱۱۵    | ۱۰/۰۱۱۸   | ۱/۹۶۱۵       | ۵۰   |
| ۱/۹۹۵۸    | ۰/۹۹۲۸    | ۰/۹۵۹۰       | ۷۵   |
| ۲/۰۰۳۳    | ۰/۹۹۲۳    | ۰/۹۶۷۰       | ۱۰۰  |
| ۲/۰۰۴۷    | ۱/۰۰۳۹    | ۰/۱۹۷۰       | ۱۵۰  |
| ۲/۰۰۹۲    | ۱/۰۰۷۹    | ۰/۹۷۴۴       | ۲۰۰  |
| ۲/۰۰۷۶    | ۱/۱۰۰۱    | ۰/۹۷۸۰       | ۲۵۰  |
| ۲/۰۱۵۷    | ۱/۰۱۴۷    | ۰/۹۸۲۱       | ۳۰۰  |
| ۲/۰۱۸۰    | ۱/۰۰۶۸    | ۰/۹۸۱۸       | ۳۵۰  |
| ۲/۰۱۵۹    | ۱/۰۰۶۵    | ۰/۹۸۱۷       | ۴۰۰  |
| ۲/۰۲۶۰    | ۱/۰۲۰۲    | ۰/۹۸۰۳       | ۴۵۰  |
| ۲/۰۱۲۶    | ۱/۲۱۷۱    | ۰/۹۸۲۴       | ۵۰۰  |
| ۲/۰۱۶۴    | ۱/۰۲۲۳    | ۰/۹۸۱۴       | ۵۵۰  |
| ۱/۰۱۹۷    | ۰/۹۸۲۱    | ۰/۹۸۲۱       | ۶۰۰  |
| ۲/۰۲۵۲    | ۱/۰۲۳۵    | ۰/۹۸۳۴       | ۶۵۰  |
| ۲/۰۱۶۸    | ۱/۰۱۶۷    | ۰/۹۸۴۷       | ۷۰۰  |
| ۲/۰۱۳۴    | ۱/۰۱۸۷    | ۰/۹۸۴۳       | ۷۵۰  |
| ۲/۰۲۰۱    | ۱/۰۲۵۸    | ۰/۹۸۴۴       | ۸۰۰  |
| ۲/۰۲۷۰    | ۱/۰۳۳۲    | ۰/۹۸۳۵       | ۸۵۰  |
| ۲/۰۲۵۱    | ۱/۰۲۶۷    | ۰/۹۸۴۳       | ۹۰۰  |
| ۲/۰۱۷۰    | ۰/۰۱۶۳    | ۰/۹۸۴۳       | ۱۰۰۰ |
| ۲/۰۲۰۳    | ۱/۰۲۴۱    | ۰/۹۸۵۴       | ۱۱۰۰ |
| ۲/۰۲۱۴    | ۱/۰۲۳۰    | ۰/۹۸۴۹       | ۱۲۰۰ |
| ۲/۰۲۸۶    | ۱/۰۲۹۷    | ۰/۹۸۴۲       | ۱۳۰۰ |
| ۲/۰۱۳۴    | ۱/۰۱۳۹    | ۰/۹۸۵۴       | ۱۴۰۰ |
| ۲/۰۰۶۰    | ۱/۰۱۰۸    | ۰/۹۸۵۲       | ۱۵۰۰ |
| ۲/۰۲۹۲    | ۱/۰۲۹۳    | ۰/۹۸۵۱       | ۲۰۰۰ |
| ۲/۰۲۳۶    | ۱/۲۴۴۳    | ۰/۹۸۵۲       | ۲۵۰۰ |
| ۲/۰۳۷۷    | ۱/۰۳۶۷    | ۰/۹۸۵۰       | ۳۰۰۰ |
| ۲/۰۵۲۱    | ۱/۰۴۷۰    | ۰/۹۸۴۵       | ۳۵۰۰ |
| ۲/۰۳۹۴    | ۱/۰۴۰۷    | ۰/۹۸۵        | ۴۰۰۰ |
| ۲/۰۴۶۸    | ۱/۰۴۷۱    | ۰/۹۸۵۲       | ۴۵۰۰ |
| ۲/۰۴۶۹    | ۱/۰۵۱۹    | ۰/۹۸۵۰       | ۵۰۰۰ |
| ۲/۰۴۲۵    | ۱/۰۴۳۰    | ۰/۹۸۵۵       | ۵۵۰۰ |
| ۲/۰۴۴۲    | ۱/۰۴۵۲    | ۰/۹۸۵۵       | ۶۰۰۰ |

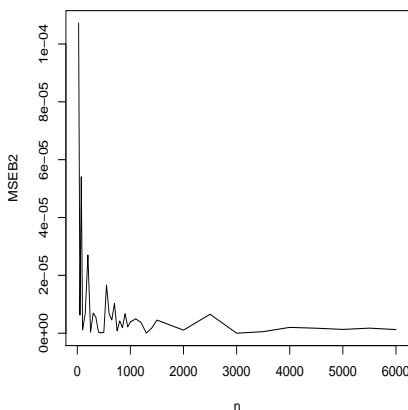
جدول ۲: مقادیر میانگین توان دوم خطای برآوردگرهای  $\hat{\beta}_1$  و  $\hat{\beta}_2$

| $MSE\hat{\beta}_2$ | $MSE\hat{\beta}_1$ | $MSEq$     | $N$  |
|--------------------|--------------------|------------|------|
| ۰.۰۰۰۱             | ۵/۴۳۵۲e-۰۵         | ۹/۱۸۰۹e-۰۶ | ۲۵   |
| ۶/۲۹۴۷e-۰۶         | ۵/۸۲۳۳e-۰۵         | ۲/۲۵۸۷e-۰۶ | ۵۰   |
| /۴۰۸۴e-۰۵          | ۳/۸۰۴۴e-۰۵         | ۸/۶۵۸۲e-۰۷ | ۷۵   |
| ۱/۰۹۸۵۰e-۰۶        | ۱/۰۹۵۰e-۰۶         | ۶/۸۲۱۳e-۰۹ | ۱۰۰  |
| ۶/۸۵۷۹e-۰۶         | ۷/۱۹۹۳e-۰۵         | ۳/۸۳۰۱e-۰۷ | ۱۵۰  |
| ۲/۷۰۰۸e-۰۵         | ۱/۱۹۶۳e-۰۵         | ۸/۵۰۲۷e-۰۸ | ۲۰۰  |
| ۳/۷۵۸۶e-۰۷         | ۱/۷۹۱۸e-۰۵         | ۱/۶۰۷۱e-۰۹ | ۲۵۰  |
| ۶/۹۷۰۶e-۰۶         | ۹/۰۲۲۲e-۰۶         | ۱/۷۴۳۲e-۰۷ | ۳۰۰  |
| ۵/۵۳۰۲e-۰۶         | ۵/۲۱۱۱e-۰۶         | ۱/۸۴۸۲e-۰۸ | ۳۵۰  |
| ۳/۴۱۶۴e-۰۷         | ۲/۵۲۷۷e-۰۶         | ۱/۴۲۶۶e-۱۱ | ۴۰۰  |
| ۱/۱۶۵۲e-۰۷         | ۱/۴۲۴۸e-۰۵         | ۶/۹۸۳۷e-۰۹ | ۴۵۰  |
| ۲/۹۶۵۲e-۰۷         | ۱/۷۸۲۰e-۰۵         | ۱/۰۱۶۰e-۰۷ | ۵۰۰  |
| ۱/۶۶۸۷e-۰۵         | ۲/۴۹۹۰e-۰۷         | ۲/۶۱۵۶e-۰۹ | ۵۵۰  |
| ۶/۷۲۴۴e-۰۶         | ۱/۳۷۱۸e-۰۶         | ۵/۹۴۶۵e-۰۸ | ۶۰۰  |
| ۴/۵۷۸۲e-۰۶         | ۹/۵۸۶۶e-۰۶         | ۹/۳۰۴۱e-۰۹ | ۶۵۰  |
| ۱/۰۳۲۵e-۰۵         | ۶/۵۷۸۲e-۰۶         | ۴/۶۴۴۱e-۰۹ | ۷۰۰  |
| ۸/۱۵۰۰e-۰۷         | ۲/۲۱۹۷e-۰۵         | ۱/۵۰۰۵e-۰۸ | ۷۵۰  |
| ۴/۲۶۹۷e-۰۶         | ۲/۱۴۲۵e-۰۵         | ۲/۹۳۰۲e-۰۸ | ۸۰۰  |
| ۱/۸۶۰۰e-۰۶         | ۵/۲۷۵۲e-۰۶         | ۵/۹۶۷۲e-۰۸ | ۸۵۰  |
| ۶/۷۳۴۸e-۰۶         | ۴/۵۶۷۴e-۰۷         | ۹/۷۵۱۷e-۰۹ | ۹۰۰  |
| ۲/۲۳۵۰e-۰۶         | ۱/۱۵۸۷e-۰۵         | ۳/۴۴۱۶e-۰۸ | ۹۵۰  |
| ۳/۸۹۱۴e-۰۶         | ۷/۲۱۴۱e-۰۸         | ۱/۴۰۵۶e-۰۸ | ۱۰۰۰ |
| ۴/۹۶۷۱e-۰۶         | ۸/۶۸۵۸e-۰۷         | ۱/۴۳۹۱e-۰۹ | ۱۱۰۰ |
| ۳/۶۹۴۷e-۰۶         | ۱/۸۲۹۷e-۰۶         | ۳/۲۰۱۶e-۰۱ | ۱۲۰۰ |
| ۵/۴۳۴۶e-۰۸         | ۱/۱۴۵۰e-۰۵         | ۳/۴۶۵۷e-۰۸ | ۱۳۰۰ |
| ۱/۷۲۴۲e-۰۶         | ۹/۵۵۴۸e-۰۷         | ۶/۸۳۶۰e-۱۰ | ۱۴۰۰ |
| ۴/۵۲۷۸e-۰۶         | ۲/۳۹۰۴e-۱۱         | ۷/۴۰۵۷e-۰۸ | ۱۵۰۰ |
| ۱/۰۶۴۱e-۰۶         | ۴/۲۷۲۹e-۰۷         | ۷/۰۲۵۳e-۱۰ | ۲۰۰۰ |
| ۶/۵۵۲۱e-۰۶         | ۵/۴۵۳۴e-۰۶         | ۵/۲۵۸۲e-۰۸ | ۲۵۰۰ |
| ۵/۴۲۷۶e-۰۹         | ۲/۰۲۴۶e-۰۶         | ۳/۵۸۲۸e-۰۸ | ۳۰۰۰ |
| ۵/۲۷۸۶e-۰۷         | ۱/۶۳۵۶e-۰۶         | ۳/۷۵۳۵e-۰۸ | ۳۵۰۰ |
| ۲/۰۱۲۰e-۰۶         | ۲/۶۲۵۰e-۰۷         | ۳/۰۱۷۳e-۰۸ | ۴۰۰۰ |
| ۸/۷۲۵۶e-۰۶         | ۹/۷۵۸۰e-۰۷         | ۵/۱۲۵۴e-۰۸ | ۴۵۰۰ |
| ۶/۳۰۵۶e-۰۶         | ۸/۴۶۲۴e-۰۷         | ۱/۲۸۸۸e-۰۷ | ۵۰۰۰ |
| ۱/۷۴۹۸e-۰۶         | ۵/۴۳۳۶e-۰۷         | ۲/۸۳۴۴e-۰۹ | ۵۵۰۰ |
| ۱/۲۵۸۵e-۰۶         | ۷/۹۸۹۹e-۰۷         | ۵/۵۸۱۰e-۰۹ | ۶۰۰۰ |

۲۰۴ ..... رفتار حدی آماره آزمون نمره در مدل رگرسیونی خطی



(ب)



(الف)

شکل ۲: نمودار  $MSE$  برآوردگرالف:  $\beta_2$  ب:  $\beta_1$  در مقابل  $n$

در شکل‌های ۱، ۲ و ۳ با بزرگ شدن  $n$  میانگین توان دوم خطا تقریباً روند نزولی پیدا کرده که نشان دهنده خوب بودن برآوردگرهای محاسبه شده به روش عددی است.

مرحله دوم: چون توزیع حدی آماره آزمون فرم بسته‌ای ندارد و در بعضی مواقع محاسبه جبری انتگرال‌ها میسر نیست، مشابه دیکی (۱۹۷۶) چندک‌های این توزیع‌ها با روش مونت کارلو محاسبه شده‌اند. برای این منظور ابتدا خطاها از توزیع نرمال استاندارد و  $x$  از توزیع  $U(0, 1)$  شبیه‌سازی شده و توزیع حدی آماره آزمون داشتن ریشه واحد برای  $n = 25, 50, 75, \dots$  و نمونه بوت‌استرپ با  $m = 5000$  تکرار  $seed(200)$  تولید گردیده‌اند. چندک‌های  $0/01, 0/025, 0/05, 0/1, 0/5, 0/9, 0/95, 0/975, 0/99$  توزیع حدی تولید شده و در جدول ۳ ارائه شده‌اند. به‌طور مشابه چندک‌های توزیع حدی با  $seed(1000)$  نیز تولید شده‌اند.



جدول ۳: توزیع تجربی  $d_1$  برای  $\rho = 1$

| $\rho=0.975$ | $\rho=0.95$ | $\rho=0.90$ | $\rho=0.85$ | $\rho=0.80$ | $\rho=0.75$ | $\rho=0.70$ | $\rho=0.65$ | $\rho=0.60$ | $N$ | seed |
|--------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-----|------|
| ۸/۹۹۷        | ۶/۵۶۳       | ۴/۷۲۱       | ۳/۳۳۰       | ۰/۵۳۰       | ۰/۰۱۸       | ۰/۰۰۴       | ۰/۰۰۱       | ۸/۹۵-۰۵     | ۲۵  | ۲۰۰  |
| ۸/۷۱۳        | ۶/۱۲۴       | ۴/۸۱۰       | ۳/۳۳۷       | ۰/۵۶۷       | ۰/۰۲۲       | ۰/۰۰۶       | ۰/۰۰۱       | ۰/۰۰۰۲      | ۵۰  |      |
| ۷/۲۷۰        | ۵/۳۵۲       | ۴/۰۹۴       | ۲/۸۷۹       | ۰/۴۵۹       | ۰/۰۲۰       | ۰/۰۰۴       | ۰/۰۰۱       | ۰/۰۰۰۲      | ۱۰۰ |      |
| ۶/۹۰۷        | ۵/۲۱۰       | ۳/۹۵۳       | ۲/۸۶۴       | ۰/۴۷۳       | ۰/۰۱۶       | ۰/۰۰۴       | ۰/۰۰۱       | ۰/۰۰۰۲      | ۲۰۰ |      |
| ۶/۴۵۷        | ۵/۰۰۶       | ۳/۸۳۲       | ۲/۶۹۹       | ۰/۴۸۰       | ۰/۰۱۶       | ۰/۰۰۴       | ۰/۰۰۱       | ۰/۰۰۰۲      | ۵۰۰ |      |
| ۲۱/۴۷۰       | ۱۵/۶۶۰      | ۱۱/۸۷۰      | ۸/۴۴۹       | ۱/۴۸۹       | ۰/۰۴۶       | ۰/۰۱۳       | ۰/۰۰۴       | ۰/۰۰۰۴      | ۲۵  | ۱۰۰۰ |
| ۱۴/۶۴۰       | ۱۱/۶۶۰      | ۹/۳۷۰       | ۶/۹۱۳       | ۱/۴۱۰       | ۰/۰۶۱       | ۰/۰۱۳       | ۰/۰۰۳       | ۰/۰۰۰۳      | ۵۰  |      |
| ۷/۵۵۱        | ۵/۴۵۶       | ۴/۱۴۵       | ۲/۹۱۵       | ۰/۵۰۲       | ۰/۰۱۶       | ۰/۰۰۴       | ۰/۰۰۱       | ۰/۰۰۰۱      | ۱۰۰ |      |
| ۷/۰۱۵        | ۵/۳۰۸       | ۴/۰۴۶       | ۲/۸۴۶       | ۰/۴۶۷       | ۰/۰۱۷       | ۰/۰۰۴       | ۰/۰۰۱       | ۰/۰۰۰۲      | ۲۰۰ |      |
| ۶/۷۳۸        | ۴/۹۳۱       | ۳/۸۶۸       | ۲/۷۴۳       | ۰/۴۶۳       | ۰/۰۱۸       | ۰/۰۰۴       | ۰/۰۰۱       | ۰/۰۰۰۲      | ۵۰۰ |      |

### بحث و نتیجه گیری

برآوردگرهای (شبه) درست‌نمایی و توزیع حدی آماره آزمون نمره فرضیه‌های مختلف برای مدل رگرسیون خطی با مانده‌های مانا و نامانا و توزیع حدی آماره این آزمون‌ها با اثباتی ساده‌تر از راس مالر (۲۰۰۳) ارائه شد. مطالعات شبیه‌سازی نشان دادند که برآوردگرهای (شبه) درست‌نمایی مناسب هستند. به علاوه چندک‌های توزیع حدی آماره‌های آزمون داشتن ریشه واحد محاسبه و در جداولی مشابه دیکسی (۱۹۶۷) برای آزمون فرضیه‌های مربوط به ریشه‌های واحد ارائه گردید.

### تقدیر و تشکر

نویسندگان کمال تشکر و قدردانی را از داوران محترم مقاله که با پیشنهادات ارزنده خود باعث بهبود مقاله شدند را دارند.

### مراجع

- Chow, Y. S. (1965), Local Convergence of Martingales and the Law of Large Numbers, *Annals of Mathematical Statistics*, **36**, 552-558.
- Cox, D. R. and Hinkley, S. (1983), Diagnostics for Heteroscedasticity in Regression, *Biometrika*, **70**, 1-10.

رفتار حدی آماره آزمون نمره در مدل رگرسیونی خطی ..... ۲۰۶

Dickey, D. A. and Fuller, W. A. (1967), Distribution of the Estimators for Autoregressive Time Series with a Unit Root, *Journal of the American Statistical Association*, **74**, 427-431.

Maller, R. A. (2003), Asymptotic of Regression with Stationary and Non-stationary Residuals, *Stochastic Processes and their Applications*, **105**, 33-67.

Wei, W. W. S. (2006), *Time Series Analysis: Univariate and Multivariate Methods*, 2nd Edition, Gerg Tobin.