مجله علوم آماری، پاییز و زمستان ۱۳۹۲
جلد ۷، شماره ۲، ص ۲۶۹-۲۸۵

کران‌های پایین باتاچاریا و شیرساگار چند پارامتری برای واریانس برآوردگرهای نااریب

سمیرا نایبان، عبدالحمید رضایی رکن‌آبادی، غلامرضا محتشمی برزاداران
گروه آمار، دانشگاه فردوسی مشهد

تاریخ دریافت: ۱۳۹۲/۵/۱۱ تاریخ آخرین بازنگری: ۱۳۹۲/۱۲/۱۳

چکیده : در این مقاله ضمن معرفی کران‌های باتاچاریا و شیرساگار، سعی شده است کران باتاچاریا چندپارامتری را که کمتر مورد بررسی دقیق قرار گرفته به‌طور ساده‌تر و قابل فهم بازنویسی شود. همچنین کران شیرساگار چندپارامتری که تاکنون مورد مطالعه قرار نگرفته است بیان و اثبات می‌شود. در نهایت با ارائه چند مثال از توزیع لگ‌نرمال به محاسبه و مقایسه کران‌های معرفی شده پرداخته می‌شود.

واژه‌های کلیدی : کران باتاچاریا، کران کرامر- رائو، کران شیرساگار، کران هامرسلی-چپمن-رابینز.

۱ مقدمه

یکی از مباحث قابل توجه و مهم در ارتباط با برآورد یک پارامتر یا تابعی از آن، مقدار واریانس برآوردگر است، زیرا این مقدار در عین حالی که مقدار خطای برآورد را نشان می‌دهد در مباحث استنباطی از قبیل بازه اطمینان و آزمون فرضیه‌ها نیز کاربرد فراوانی دارد. اما یکی از مشکلات در این زمینه، پیچیده بودن اکثر

آدرس الکترونیک مسئول مقاله: غلامرضا محتشمی برزاداران، grmohtashami@um.ac.ir
کد موضوع‌بندی ریاضی (۲۰۱۰): ۶۲P۳۰، ۶۲F۹۹، ۶۲N۰۵، ۶۵D۲۰

برآوردگرها و توزیع احتمال آنهاست که محاسبه دقیق واریانس را مشکل و بعضاً غیر ممکن می‌سازد. از جمله راه‌های رفع این مشکل، محاسبه کران برای واریانس و در نتیجه تقریب آن است.

کران کرامر–رائو یکی از مشهورترین کران‌های پایین برای واریانس برآوردگرها تحت شرایط نظم است. همچنین کران هامرسلی–چپمن–رابینز نیز از دیگر کران‌های پایین برای واریانس است که به شرایط نظم نیاز ندارد و نسبت به کران کرامر–رائو به واریانس واقعی برآوردگر نزدیکتر است. باتاچاریا (۱۹۴۶، ۱۹۴۷) تعمیمی از کران کرامر–رائو براساس ماتریس باتاچاریا ارائه داد که از کران کرامر–رائو و در بعضی موارد از کران هامرسلی–چپمن–رابینز نیز بزرگتر و به مقدار واقعی واریانس برآوردگر نزدیکتر است. همچنین بلایت و رائو (۱۹۷۴) همگرایی کران‌های باتاچاریا را به واریانس واقعی برآوردگر نااریب نشان دادند. شیرساگار (۲۰۰۰) با تعمیم کران هامرسلی– چپمن–رابینز مشابه رهیافت باتاچاریا، کرانی موسوم به کران شیرساگار ارائه نمود. این کران علاوه بر عدم نیاز به برقراری شرایط نظم، از کران متناظر باتاچاریا بزرگتر و به مقدار واقعی واریانس نزدیکتر است.

در این مقاله ابتدا به معرفی کران باتاچاریا، در دو حالت یک و چند پارامتری و کران شیرساگار و بررسی برخی خواص و ویژگی‌های آنها پرداخته می‌شود. سپس کران شیرساگار در حالت چند پارامتری بیان و اثبات می‌شود. در ادامه فرم کلی ماتریس‌های باتاچاریا و شیرساگار که در محاسبه این کران‌ها استفاده می‌شود، برای توزیع لگ نرمال ارائه خواهد شد. همچنین برای واریانس برآوردگرهای نااریب برخی توابع مختلف از پارامترهای این توزیع، کران‌های مختلف باتاچاریا و شیرساگار را محاسبه و مقایسه نموده، بهترین کران در شرایط مختلف معرفی می‌شود. نتایج این مقاله برای مطالعات بعدی محققین به منظور یافتن برآوردی برای واریانس برآوردگر می‌تواند مورد استفاده قرار گیرد.

۲ کران باتاچاریا

باتاچاریا (۱۹۴۶، ۱۹۴۷) یک فرم تعمیم یافته از نابرابری کرامر-رائو بدست آورد که در ادامه برای دو حالت یک پارامتری و چند پارامتری معرفی و بررسی می‌شود.

الف- حالت یک پارامتری: در محاسبه کران باتاچاریا، نیاز به محاسبه ماتریس باتاچاریا است که در حالت یک پارامتری، همان ماتریس کواریانس بردار تصادفی $(\frac{f^{(1)}(X|\theta)}{f(X|\theta)},\ldots,\frac{f^{(k)}(X|\theta)}{f(X|\theta)})$ است، که در آن $f^{(k)}(X|\theta)$ مشتق k ام تابع چگالی احتمال $f(X|\theta)$ نسبت به پارامتر $\theta \in R$ و k، مرتبه ماتریس می‌باشد. بدیهی است که برای مقدار $k=1$ این ماتریس تبدیل به اطلاع فیشر می‌شود. بر اساس این ماتریس، نابرابری باتاچاریا به‌صورت زیر بیان می‌شود.

تعریف ۱ : اگر $T(X)$ برآوردگر نااریب $\tau(\theta)$ باشد و شرایط نظم برقرار باشد داریم:

$$Var_\theta(T(X)) \geq \xi_\theta J^{-1}\xi_\theta^T,$$

که در آن T نماد ترانهاده، $\xi_\theta=(\tau^{(1)}(\theta),\ldots,\tau^{(k)}(\theta))$، $\tau^{(j)}(\theta)=\frac{\partial^j E_\theta(T(X))}{\partial\theta^j}$، $j=1,\ldots,k$، J ماتریس باتاچاریا با درایه‌های

$$J_{rs}=Cov(\frac{f^{(r)}(X|\theta)}{f(X|\theta)},\frac{f^{(s)}(X|\theta)}{f(X|\theta)}),\quad r,s=1,\ldots,k$$

است و $E_\theta(\frac{f^{(r)}(X|\theta)}{f(X|\theta)})=0$.

در این تحقیق کران‌های باتاچاریا یک پارامتری با نماد $B_k(\theta)$ نشان داده می‌شود. لذا بر اساس نابرابری باتاچاریا برای مقادیر مختلف k می‌توان کران‌های مختلفی را برای واریانس آماره پیدا کرد. به ازای مقدار $k=1$ این نابرابری به کران کرامر-رائو تبدیل می‌شود. باتاچاریا (۱۹۴۶، ۱۹۴۷) نشان داد هر چه مرتبه ماتریس افزایش یابد و تابع $\tau(\theta)$ نیز مشتق پذیر از مرتبه k باشد، کران باتاچاریا به واریانس آماره نزدیک‌تر می‌شود. به عبارتی برای $k \geq 1$ و $\theta \in \Theta \subset R$، نابرابری $B_{k+1}(\theta) \geq B_k(\theta)$ برقرار است.

ب- حالت چند پارامتری: فرض کنید بردار پارامتر به‌صورت $\theta := (\theta_1,\ldots,\theta_r) \in \Theta \subset \mathbf{R}^r$ باشد، در این صورت با تعریف عملگرهای

$$\partial_z := (\frac{\partial^z}{\partial\theta_1^{i_1}\cdots\partial\theta_r^{i_r}} | 0 \leq i_1,\ldots,i_r, \sum_{j=1}^{r} i_j = z); \quad z \in N,$$

و $\mathbf{D}_k := (\partial_1 \cdots \partial_k)^t$ ماتریس باتاچاریا از مرتبه kام به صورت ماتریس کواریانس بردار تصادفی $\frac{\mathbf{D}_k f(X|\theta)}{f(X|\theta)}$ تعریف می‌شود. چون تعداد درایه های ∂_z برابر $m_z = \binom{z+r-1}{r-1}$ است، ماتریس باتاچاریا چند پارامتری از مرتبه k، $n_k \times n_k$ خواهد بود، که در آن $n_k = \sum_{i=1}^{k} m_i$. بدیهی است به‌ازای $k = 1$ ماتریس فوق به ماتریس اطلاع فیشر $r \times r$ تبدیل می‌شود.

تعریف ۲ : اگر $T(X)$ برآوردگر حقیقی مقدار و نااریب تابع حقیقی مقدار $\tau(\theta)$ باشد و شرایط نظم برای مشتقات جزئی برقرار باشد، آنگاه

$$Var_\theta(T(X)) \geq \eta_\theta J_r^{-1} \eta_\theta^t, \tag{1}$$

که در آن $\eta_\theta = \mathbf{D}_k \tau(\theta)$ و J_r^{-1} وارون ماتریس باتاچاریا چند پارامتری است.

در ادامه کران باتاچاریا چند پارامتری از مرتبه k وقتی r پارامتر وجود دارد با نماد $B_{r.k}(\theta)$ نشان داده می‌شود. که در آن $B_{r.1}(\theta)$ همان کران کرامر-رائو چند پارامتری است و $B_{1.k}(\theta) = B_k(\theta)$. به‌عنوان مثال درایه‌های فرم کلی ماتریس متقارن باتاچاریا از مرتبه $k = 2$ وقتی توزیع دارای دو پارامتر α و β $(r = 2)$ باشد عبارتند از:

$$a_{11} = \int \frac{(\frac{\partial}{\partial\alpha} f(x))^2}{f(x)} dx \qquad a_{12} = a_{21} = \int \frac{\frac{\partial}{\partial\alpha} f(x) \frac{\partial}{\partial\beta} f(x)}{f(x)} dx$$

$$a_{13} = a_{31} = \int \frac{\frac{\partial}{\partial\alpha} f(x) \frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} f(x)}{f(x)} dx \qquad a_{14} = a_{41} = \int \frac{\frac{\partial}{\partial\alpha} f(x) \frac{\partial^2}{\partial\beta^2} f(x)}{f(x)} dx$$

$$a_{15} = a_{51} = \int \frac{\frac{\partial}{\partial\alpha} f(x) \frac{\partial^2}{\partial\beta\partial\alpha} f(x)}{f(x)} dx \qquad a_{22} = \int \frac{(\frac{\partial}{\partial\beta} f(x))^2}{f(x)} dx$$

$$a_{23} = a_{32} = \int \frac{\frac{\partial}{\partial\beta} f(x) \frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} f(x)}{f(x)} dx \qquad a_{24} = a_{42} = \int \frac{\frac{\partial}{\partial\beta} f(x) \frac{\partial^2}{\partial\beta^2} f(x)}{f(x)} dx$$

$$a_{25} = a_{52} = \int \frac{\frac{\partial}{\partial\beta} f(x) \frac{\partial^2}{\partial\beta\partial\alpha} f(x)}{f(x)} dx \qquad a_{33} = \int \frac{(\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} f(x))^2}{f(x)} dx$$

$$a_{34} = a_{43} = \int \frac{\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} f(x) \frac{\partial^2}{\partial\beta^2} f(x)}{f(x)} dx \qquad a_{35} = a_{53} = \int \frac{\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} f(x) \frac{\partial^2}{\partial\beta\partial\alpha} f(x)}{f(x)} dx$$

$$a_{44} = \int \frac{(\frac{\partial^2}{\partial\beta^2} f(x))^2}{f(x)} dx \qquad a_{45} = a_{54} = \int \frac{\frac{\partial^2}{\partial\beta^2} f(x) \frac{\partial^2}{\partial\beta\partial\alpha} f(x)}{f(x)} dx$$

$$a_{55} = \int \frac{\frac{\partial}{\partial\alpha} f(x) \frac{\partial^2}{\partial\beta\partial\alpha} f(x)}{f(x)} dx$$

در زمینه کران باتاچاریا چند پارامتری می‌توان به پومرت (۱۹۹۷)، بارتوسزویج (۱۹۸۰)، تاناکا (۲۰۰۶)، شنباگ (۱۹۷۲، ۱۹۷۹)، بلایت و رائو (۱۹۷۴)، محتشمی (۲۰۰۱ ، ۲۰۰۶) و تاناکا (۲۰۰۳) اشاره کرد. خراشادی‌زاده و محتشمی (۱۳۸۶) فرم کلی کران باتاچاریا را در خانواده توزیع‌های نمایی طبیعی با تابع‌های واریانس درجه ۲ و ۳ از θ به‌دست آوردند و با شبیه‌سازی و محاسبات عددی نشان دادند که کران باتاچاریا به‌عنوان تقریبی از واریانس آماره، بهتر از کران پایین کرامر–رائو است. محتشمی و همکاران (۲۰۱۰) به محاسبه، شبیه‌سازی و مقایسه کران‌های باتاچاریا در توزیع گاوسی وارون برای توابع مختلفی از پارامتر پرداختند.

۳ کران هامرسلی–چپمن–رابینز و کران شیرساگار

یکی دیگر از نابرابری‌ها برای واریانس برآوردگر نااریب که نیاز به شرایط نظم ندارد و از کران کرامر–رائو نیز بهتر است، نابرابری هامرسلی–چپمن–رابینز است که مستقلاً توسط هامرسلی (۱۹۵۰) و چپمن و رابینز (۱۹۵۱) به‌صورت زیر معرفی شد.

تعریف ۳ : اگر $T(X)$ برآوردگر نااریب $\tau(\theta)$ باشد، آنگاه

$$Var_\theta(T(X)) \geq \sup_{\phi\in\Theta} \frac{[\tau(\phi)-\tau(\theta)]^2}{E(\frac{f(X|\phi)-f(X|\theta)}{f(X|\theta)})^2}, \qquad (۲)$$

که در آن سوپریموم روی تمام مجموعه $\phi \in \Theta \subset R$ با $\tau(\phi) \neq \tau(\theta)$ و $S(\phi) \subset S(\theta) = \{x|f(x|\theta) > 0\}$ است.

کران هامرسلی–چپمن–رابینز با نماد $H(\theta)$ نمایش داده می‌شود و چپمن و رابینز (۱۹۵۱) نشان دادند $H(\theta) \geq B_1(\theta)$. به علاوه سن و گوش (۱۹۷۶) شرایطی که این نابرابری به برابری تبدیل می‌شود را مورد بررسی قرار دادند و کران $H(\theta)$ را با کران‌های باتاچاریا مقایسه کرده و شرایط کافی برای برتری هر یک از دیگری را بیان کردند. آکاهیرا و اُهیاچی (۲۰۰۷) کران هامرسلی–چپمن–رابینز را از دیدگاه بیزی مورد مطالعه و بررسی قرار داده‌اند.

الف- کران شیرساگار یک پارامتری: شیرساگار (۲۰۰۰) یک کران توسعه یافته از نابرابری هامرسلی-چپمن-رابینز به‌دست آورد که نیاز به شرایط نظم ندارد و از کران باتاچاریا نیز بهتر است. وی این نابرابری را در حالت یک پارامتری بیان و اثبات نموده است.

تعریف ۴ : فرض کنید

$$\psi_r = \frac{f(x|\phi_r) - f(x|\theta)}{f(x|\theta)}, r = 1, \ldots, k,$$

نابرابری شیرساگار به‌صورت

$$Var_\theta(T(X)) \geq \sup_\phi \lambda_\theta \Sigma^{-1} \lambda_\theta^t, \qquad (۳)$$

است، که در آن $\lambda_\theta = (\tau(\phi_1) - \tau(\theta), \ldots, \tau(\phi_k) - \tau(\theta))$ و Σ ماتریسی با درایه‌های

$$\Sigma_{rs} = Cov(\psi_r, \psi_s), \quad r, s = 1, \ldots, k,$$

است. چون برای هر $r = 1, \ldots, k$، $E(\psi_r) = 0$ داریم:

$$\begin{aligned} \Sigma_{rs} &= E(\psi_r \psi_s) \\ &= \int \frac{f(x;\phi_r) f(x;\phi_s)}{f(x;\theta)} dx - 1. \end{aligned}$$

در نابرابری سوپریموم روی تمام مجموعه $\phi_i \in \Theta \subset R$ با شرط

$$S(\phi_k) \subset S(\phi_{k-1}) \subset \ldots \subset S(\phi_1) \subset S(\theta), i = 1, \ldots, k,$$

گرفته می‌شود.

کران‌های شیرساگار با نماد $K_k(\theta)$ نشان داده می‌شود . همان‌طور که ملاحظه می‌شود برای $k = 1$، $K_1(\theta) = H(\theta)$ و بنابراین $K_1(\theta) \geq B_1(\theta)$. شیرساگار (۲۰۰۰) نشان داد برای $\theta \in \Theta \subset R$ و هر مقدار $k \geq 1$، نامساوی $K_k(\theta) \geq B_k(\theta)$ برقرار است. یعنی کران شیرساگار از مرتبه k نسبت به کران باتاچاریا از مرتبه k به واریانس برآوردگر نزدیکتر است. کیکه (۲۰۰۲) نیز کرانی در ارتباط با کران شیرساگار و کران باتاچاریا ارائه نمود و نشان داد که از کران شیرساگار ضعیف‌تر و

از کران باتاچاریا بهتر است. کین و نایاک (۲۰۰۸) با استفاده از نابرابری شیرساگار، کران‌هایی برای میانگین توان دوم خطای پیش‌بینی[1] به‌دست آوردند و با کران‌های نابرابری باتاچاریا مقایسه کردند. همچنین نایبان و همکاران (۲۰۱۳) به مقایسه کران‌های باتاچاریا و شیرساگار در توزیع گامای تعمیم‌یافته پرداختند.

ب- کران شیرساگار چند پارامتری: فرض کنید Ω فضای پارامتر در زیر مجموعه‌ای باز از R^r به‌صورت $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_r)$ و برای هر $i = 1, 2, \dots$، $\Phi_i(\theta)$ مجموعه‌ای از زیر مجموعه‌های فضای پارامتر به‌صورت

$$\Phi_i(\theta) : (\Phi_{i_1}(\theta_1), \dots, \Phi_{i_r}(\theta_r) | \sum_{j=1}^{r} i_j = i, \quad i_j \in \{0, 1, \dots\}), \tag{4}$$

باشد، که در آن $\Phi_{i_j}(\theta_j)$ تابعی از θ_j است به‌طوری‌که برای $j = 1, \dots, r$، $\Phi_0(\theta_j) = \theta_j$ و

$$S(\Phi_k(\theta)) \subset \dots \subset S(\Phi_1(\theta)) \subset S(\theta). \tag{5}$$

هر $\Phi_i(\theta)$ دارای $m_i = \binom{i+r-1}{r-1}$ عضو است. به‌عنوان نمونه می‌توان عناصر $\Phi_i(\theta)$ را به‌صورت $\Phi_{ij}(\theta_j) = \theta_j + i_j\delta_j$ در نظر گرفت که در آن δ_j به‌نحوی تعیین می‌شود که رابطه (۵) همواره برقرار باشد. مثلاً

$$\Phi_1(\theta) = \{(\theta_1 + \delta_1, \theta_2, \dots, \theta_r), (\theta_1, \theta_2 + \delta_2, \dots, \theta_r), \dots, (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_r + \delta_r)\},$$

یا

$$\begin{aligned}\Phi_2(\theta) = \{&(\theta_1 + 2\delta_1, \theta_2, \dots, \theta_r), \dots, (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_r + 2\delta_r),\\ &(\theta_1 + \delta_1, \theta_2 + \delta_2, \theta_3, \dots, \theta_r), \dots, (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{r-1} + \delta_{r-1}, \theta_r + \delta_r)\}.\end{aligned}$$

حال بردار $\lambda_k = (h_1, \dots, h_k)$ را در نظر بگیرید، که در آن $h_i = (\tau(\Phi_i(\theta)) - \tau(\theta)\mathbf{1})$، برداری با اندازه m_i و $\mathbf{1}$ برداری با درایه‌های یک است، بنابراین λ_k برداری با اندازه $n_k = \sum_{i=1}^{k} m_i$ خواهد بود. حال با تعریف بردار

$$\Psi_i = \frac{f(X; \Phi_i(\theta)) - f(X; \theta)}{f(X; \theta)}, \quad i = 1, \dots, k,$$

---

[1] Mean square error of prediction

و استفاده از عملگر $A_k f(x;\theta) := (f(x;\Phi_۱(\theta)), \ldots, f(x;\Phi_k(\theta)))$ ماتریس کواریانس بردار $(\Psi_۱, \ldots, \Psi_k)$ به‌صورت $\Sigma_k = Cov(\frac{A_k f(X;\theta)}{f(X;\theta)} - ۱)$ خواهد شد.

قضیه ۱ : اگر $T(X)$ برآوردگر حقیقی مقدار و ناااریب تابع حقیقی مقدار $\tau(\theta)$ باشد، آنگاه

$$Var_\theta(T(X)) \geq \sup \lambda_k \Sigma_k^{-۱} \lambda_k^t := K_{r.k}(\theta), \qquad (۶)$$

که در آن سوپریمم روی تمام $\Phi_i(\theta)$ است که در شرط (۵) صدق می‌کند.

برهان : با توجه به تعاریف نمادها و عملگرها به راحتی مشاهده می‌شود که برای هر k، $E_\theta(\frac{A_k f(X;\theta)}{f(X;\theta)} - ۱) = ۰$. از طرفی ماتریس کواریانس Σ_k رامی‌توان به‌صورت

$$\Sigma_k = \begin{pmatrix} \Sigma_{۱۱} & \ldots & \Sigma_{۱k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \Sigma_{k۱} & \ldots & \Sigma_{kk} \end{pmatrix} \qquad (۷)$$

افراز کرد، که در آن ماتریس بلوک $m_\ell \times m_s$، به‌صورت

$$\Sigma_{\ell s} = E_\theta(\Psi_\ell \Psi_s), \quad \ell, s = ۱, \ldots, k,$$

است. بنابراین

$$\begin{aligned} Cov_\theta(T(X), \Psi_i) &= E_\theta(T(X)\Psi_i) \\ &= \int T(x).f(x;\Phi_i(\theta))d\mu(x) - \int T(x).f(x;\theta)d\mu(x) \\ &= \tau(\Phi_i(\theta)) - \tau(\theta) \\ &= h_i, \quad i = ۱ \ldots k. \end{aligned}$$

حال ضریب همبستگی چندگانه بین $T(X)$ و $(\Psi_۱, \ldots, \Psi_k)$ به‌صورت

$$\rho_k^۲ = \frac{\lambda \Sigma^{-۱} \lambda^t}{Var_\theta(T(X))}, \qquad (۸)$$

خواهد شد، که از آن رابطه (۶) نتیجه می‌شود.

در قضیه بعد نشان داده می‌شود که با افزایش مرتبه ماتریس، کران حاصل به واریانس برآوردگر نزدیکتر می‌شود.

قضیه ۲ : کران شیرساگار چند پارامتری که در قضیه ۱ معرفی شد، نسبت به k صعودی است. یعنی برای هر k،

$$M_k(\theta) \leq M_{k+1}(\theta). \tag{۹}$$

برهان : باتوجه به تعریف ماتریس Σ_k و افراز (۷) می‌تون نوشت:

$$\Sigma_{k+1} = \begin{pmatrix} \Sigma_k & \vdots & A \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ A' & \vdots & B \end{pmatrix}, \tag{۱۰}$$

که در آن $A = (\Sigma_{1(k+1)} \ldots \Sigma_{k(k+1)})^T$ ماتریس $n_k \times m_{k+1}$ و $B = \Sigma_{(k+1)(k+1)}$ یک ماتریس مربعی $m_{k+1} \times m_{k+1}$ است. درنتیجه

$$\Sigma_{k+1}^{-1} = \begin{pmatrix} (\Sigma_k - AB^{-1}A')^{-1} & -\Sigma_k^{-1}A(B - A'\Sigma_k^{-1}A)^{-1} \\ -B^{-1}A'(\Sigma_k - AB^{-1}A')^{-1} & (B - A'\Sigma_k^{-1}A)^{-1} \end{pmatrix}, \tag{۱۱}$$

بنابراین کران شیرساگار مرتبه $k+1$ را می‌توان به‌صورت

$$M_{k+1}(\theta) = \sup[\lambda \quad h_{k+1}]\Sigma_{k+1}^{-1} \begin{bmatrix} \lambda' \\ h'_{k+1} \end{bmatrix}, \tag{۱۲}$$

بیان کرد، که در آن $h_{k+1} = (\tau(\Phi_{k+1}(\theta)) - \tau(\theta)\mathbf{1})$ برداری با اندازه m_{k+1} است.
حال باجایگذاری (۱۱) در رابطه (۱۲) خواهیم داشت:

$$M_{k+1}(\theta) = \sup\left[\lambda C_{11}\lambda' + h_{k+1}C_{21}\lambda' + \lambda C_{12}h'_{k+1} + h_{k+1}C_{22}h'_{k+1}\right].$$

از طرفی با استفاده از لمی در کِن میلر (۱۹۸۱) می‌توان C_{11} را به‌صورت $C_{11} = \Sigma_k^{-1} + (I - \Sigma_k^{-1}AB^{-1}A')^{-1}\Sigma_k^{-1}AB^{-1}A'\Sigma_k^{-1}$، نوشت که با جایگذاری مناسب داریم:

$$\begin{aligned} M_{k+1}(\theta) = M_k(\theta) + \quad \sup \quad & \left[\lambda(I - \Sigma_k^{-1}AB^{-1}A')^{-1}\Sigma_k^{-1}AB^{-1}A'\Sigma_k^{-1}\lambda'\right. \\ + \quad & \left. h_{k+1}C_{21}\lambda' + \lambda C_{12}h'_{k+1} + h_{k+1}C_{22}h'_{k+1}\right], \end{aligned}$$

چون جمله دوم سمت راست تساوی همواره مثبت است نامساوی (۹) برقرار است.

۴ کران‌های باتاچاریا و شیرساگار در توزیع لگ نرمال

فرض کنید متغیر تصادفی X دارای توزیع لگ نرمال با پارامترهای μ و $\sigma^۲$ و تابع چگالی احتمال به‌صورت

$$f(x) = \frac{۱}{x\sqrt{۲\pi\sigma^۲}} e^{-\frac{(\ln(x)-\mu)^۲}{۲\sigma^۲}} \qquad (۱۳)$$

باشد، که در آن $\sigma > ۰, \mu \in R, x > ۰$.

الف- با فرض معلوم بودن $\sigma^۲$ و نامعلوم بودن μ ماتریس باتاچاریای یک پارامتری قطری با درایه های قطر اصلی به‌صورت

$$J_{rr} = \frac{r!}{\sigma^{۲r}}, \quad r = ۱, ۲, \ldots \qquad (۱۴)$$

است و فرم کلی درایه‌های ماتریس شیرساگار نیز به‌صورت

$$\Sigma_{rs} = e^{\frac{rs\delta^۲}{\sigma^۲}} - ۱, \quad r, s = ۱, ۲, \ldots \qquad (۱۵)$$

هستند. همان‌طور که ملاحظه می‌شود این ماتریس برخلاف ماتریس باتاچاریا قطری نیست.

ب- با فرض معلوم بودن μ و نامعلوم بودن $\sigma^۲$ ماتریس باتاچاریای یک‌پارامتری همچنان قطری‌است. به‌عنوان مثال ماتریس ۵×۵ آن عبارت است از

$$J = \begin{bmatrix} \frac{۱}{۲\sigma^۴} & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & \frac{۳}{۲\sigma^۸} & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & \frac{۴۵}{۴\sigma^{۱۲}} & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & \frac{۳۱۵}{۲\sigma^{۱۶}} & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & \frac{۱۴۱۷۵}{۴\sigma^{۲۰}} \end{bmatrix}. \qquad (۱۶)$$

از جمله مزایای قطری بودن ماتریس باتاچاریا سهولت محاسبه معکوس آن است که در محاسبه کران باتاچاریا از آن استفاده می‌شود. اما در این حالت انتگرال‌های موجود در درایه‌های ماتریس شیرساگار فرم بسته‌ای ندارند و نیاز به استفاده از روش‌های عددی خواهد بود.

ج- هنگامی که هر دو پارامتر نامعلوم باشند، ماتریس باتاچاریای دوپارامتری به‌صورت شبه قطری است. به‌عنوان مثال ماتریس باتاچاریای دو پارامتری مرتبه سوم ($k = 3$) توزیع لگ نرمال به‌صورت

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2\sigma^4} & \frac{1}{\sigma^4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma^4} & \frac{2}{\sigma^4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3}{2\sigma^8} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{\sigma^8} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{2\sigma^6} & \frac{3}{\sigma^6} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{\sigma^6} & \frac{6}{\sigma^6} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{45}{4\sigma^{12}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{15}{2\sigma^{10}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3}{\sigma^8} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{6}{\sigma^8} \end{bmatrix}$$

است. در حالی که همه درایه‌های ماتریس شیرساگار چند پارامتری غیر صفر هستند. به‌عنوان مثال درایه‌های ماتریس متقارن شیرساگار از مرتبه دوم عبارتند از:

$$a_{11} = \exp\left(\frac{\delta_1^2}{\sigma^2}\right) - 1$$

$$a_{12} = a_{21} = \exp\left(\frac{\delta_1^2\delta_2}{2\sigma^4}\right) - 1$$

$$a_{13} = a_{31} = \exp\left(\frac{\delta_1^2}{\sigma^2}\right) - 1$$

$$a_{14} = a_{41} = \exp\left(\frac{\delta_1^2\delta_2}{\sigma^4}\right) - 1$$

$$a_{15} = a_{51} = \exp\left(\frac{(2\sigma^2+\delta_2)\delta_1^2}{2\sigma^4}\right) - 1$$

$$a_{22} = \frac{\sigma^2}{\sqrt{\sigma^4-\delta_2^2}} - 1$$

$$a_{23} = a_{32} = \exp\left(\frac{2\delta_1^2\delta_2}{\sigma^4}\right) - 1$$

$$a_{24} = a_{42} = \frac{\sigma^2}{\sqrt{\sigma^4-2\delta_2^2}} - 1$$

$$a_{25} = a_{52} = \frac{\sigma^2}{\sqrt{\sigma^4-\delta_2^2}}\exp\left(\frac{\delta_2\delta_1^2}{2(\sigma^4-\delta_2^2)}\right) - 1$$

$$a_{33} = \exp\left(\frac{4\delta_1^2}{\sigma^2}\right) - 1$$

$$a_{35} = a_{53} = \exp\left(\frac{2(\sigma^2+\delta_2)\delta_1^2}{\sigma^4}\right) - 1$$

$$a_{34} = a_{43} = \exp\left(\frac{4\delta_1^2\delta_2}{\sigma^4}\right) - 1$$

$$a_{45} = a_{54} = \frac{\sigma^2}{\sqrt{\sigma^4-2\delta_2^2}}\exp\left(\frac{\delta_1^2\delta_2}{\sigma^4-2\delta_2^2}\right) - 1$$

$$a_{44} = \frac{\sigma^2}{\sqrt{\sigma^4-4\delta_2^2}} - 1$$

$$a_{55} = \frac{\sigma^2}{\sqrt{\sigma^4-\delta_2^2}}\exp\left(\frac{\delta_1^2}{\sigma^4-\delta_2}\right) - 1$$

۱.۴ کران‌های پایین واریانس برآوردگرهای نااریب میانگین

با استفاده از ماتریس‌های باتاچاریا در روابط (۱۴) و (۱۶)، شکل کلی کران باتاچاریای یک‌پارامتری مرتبه kام برای واریانس برآوردگرهای نااریب میانگین توزیع لگ نرمال، یعنی $\tau(\theta) = E(X) = e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}}$، عبارت است از:

الف- μ نامعلوم و σ^2 معلوم:

$$B_k(\mu) = \sigma^2 e^{2\mu+\sigma^2} \sum_{i=1}^{k} \frac{\sigma^{2(i-1)}}{i!}.$$

ب- σ^2 نامعلوم و μ معلوم:

$$B_k(\sigma^2) = (\sigma^2 e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}})^2 \sum_{i=1}^{k} \frac{\sigma^{4i-4}}{(2i)!}.$$

کران‌های شیرساگار در حالت μ نامعلوم و σ^2 معلوم، فرم بسته‌ای ندارند و در قالب مثال‌های عددی کران‌های باتاچاریا در جدول ۱ ارائه شده‌اند.

جدول ۱: کران‌های مختلف باتاچاریا و شیرساگار برای واریانس برآوردگرهای نااریب میانگین توزیع لگ نرمال (μ نامعلوم و σ^2 معلوم)

$K_1 \approx \dots \approx K_4$	B_4	B_3	B_2	B_1	σ^2	μ
۴/۶۷۰۷	۴/۶۴۳	۴/۵۳۰	۴/۰۷۷۴	۲/۷۱۸	۱	۰
۳۴/۵۱۲	۳۴/۳۱۲	۳۳/۴۷۵	۳۰/۱۲۸	۲۰/۰۸۵	۱	۱
۳۴۸/۸۳۰	۱۶۳/۷۹۴	۱۴۵/۵۹۵	۱۰۹/۱۹۶	۵۴/۵۹۸	۲	۱

همان‌طور که در جدول ۱ ملاحظه می‌شود کران‌های باتاچاریا با افزایش مرتبه ماتریس افزایش می‌یابد، اما میل همگرایی کران‌های شیرساگار بسیار بالاتر از کران‌های باتاچاریا است. از آنجایی که کران‌های مختلف شیرساگار اختلاف زیادی با هم ندارند، کران اول شیرساگار را می‌توان به‌عنوان بهترین تقریب برای واریانس برآوردگر نااریب میانگین توزیع لگ نرمال وقتی μ نامعلوم و σ^2 معلوم باشد، معرفی نمود.

جدول ۲: کران‌های مختلف باتاچاریا برای واریانس برآوردگرهای نااریب میانگین توزیع لگ نرمال (μ معلوم و $\sigma^۲$ نامعلوم)

μ	$\sigma^۲$	$B_۱$	$B_۲$	$B_۳$	$B_۴$
۰	۱	۱/۳۵۹	۱/۴۷۲	۱/۴۷۶	۱/۴۷۶
۱	۱	۱۰/۰۴۲	۱۰/۸۷۹	۱۰/۹۰۷	۱۰/۹۰۸
۱	۲	۳۰/۳۹۳	۳۵/۴۵۸	۳۵/۷۹۶	۳۵/۸۰۸

اما در حالتی که μ معلوم و $\sigma^۲$ نامعلوم باشد، با توجه به جدول ۲ کران‌های باتاچاریا از مرتبه ۳ به بعد به مقدار معینی میل می‌کنند لذا می‌توان از کران ۳ یا ۴ به‌عنوان تقریبی برای واریانس برآوردگر استفاده نمود.

ج- هر دو پارامتر نامعلوم:

فرم کلی کران‌های باتاچاریا دو پارامتری برای واریانس برآوردگرهای نااریب میانگین توزیع لگ نرمال به‌صورت

$$B_{۲.k}(\theta)=\sigma^۲ e^{۲\mu+\sigma^۲}\sum_{i=۱}^{۲k}\frac{\sigma^{۲(i-۱)}}{i!},$$

است و به‌ازای بعضی از مقادیر مختلف پارامتر، این کران‌ها در جدول ۳ ارائه شده‌اند.

جدول ۳: کران های مختلف باتاچاریای دوپارامتری برای واریانس برآوردگرهای نااریب میانگین توزیع لگ نرمال (هر دو پارامتر نامعلوم)

μ	$\sigma^۲$	$B_{۲.۱}$	$B_{۲.۲}$	$B_{۲.۳}$	$B_{۲.۴}$	$B_{۲.۵}$
۰	۱	۴/۰۷۷	۴/۶۴۳	۴/۶۷۰	۴/۶۷۰	۴/۶۷۰
۱	۱	۳۰/۱۲۸	۳۴/۳۱۲	۳۴/۵۰۸	۳۴/۵۱۲	۳۴/۵۱۴
۱	۲	۲۱۸/۳۹۲	۳۲۷/۵۸۸	۳۴۷/۰۰۱	۳۴۸/۷۰۶	۳۴۸/۷۸۳
۴	۳	$۴/۴۹۰ \times ۱۰^{۵}$	$۹/۲۰۵ \times ۱۰^{۵}$	$۱/۱۰۲ \times ۱۰^{۶}$	$۱/۱۳۸ \times ۱۰^{۶}$	$۱/۱۴۲ \times ۱۰^{۶}$
۶	۶	$۱/۵۷۵ \times ۱۰^{۹}$	$۷/۴۸۵ \times ۱۰^{۹}$	$۱/۵۹۹ \times ۱۰^{۱۰}$	$۲/۲۳۷ \times ۱۰^{۱۰}$	$۲/۵۲۹ \times ۱۰^{۱۰}$
۱۰	۵	$۱/۲۶۰ \times ۱۰^{۱۲}$	$۴/۶۳۵ \times ۱۰^{۱۲}$	$۸/۰۷۳ \times ۱۰^{۱۲}$	$۹/۸۸۶ \times ۱۰^{۱۲}$	$۱/۰۴۶ \times ۱۰^{۱۳}$

کران‌های شیرساگار دوپارامتری از مرتبه اول و دوم ارائه شده در جدول ۴، حاکی از رشد سریع تر کران شیرساگار نسبت به کران باتاچاریا به مقدار واقعی واریانس برآوردگر است.

جدول ۴: کران‌های مختلف شیرساگار دوپارامتری برای واریانس برآوردگرهای نااریب میانگین توزیع لگ نرمال (هر دو پارامتر نامعلوم)

$K_{۲.۲}$	$K_{۲.۱}$	$\sigma^۲$	μ
۴/۶۷۰	۴/۶۵۹	۱	۰
۳۴/۷۹۵	۳۴/۴۸۱	۱	۱
۳۴۹/۲۰۴	۳۴۷/۰۰۱	۲	۱
$۸/۹۱۱ \times ۱۰^{۶}$	$۹/۴۸۱ \times ۱۰^{۵}$	۳	۴
$۴/۸۸۲ \times ۱۰^{۱۰}$	$۸/۹۸۰ \times ۱۰^{۹}$	۶	۶
$۶/۰۷۸ \times ۱۰^{۱۳}$	$۹/۸۰۰ \times ۱۰^{۱۲}$	۵	۱۰

کران‌های باتاچاریا برای واریانس برآوردگرهای نااریب گشتاور rام توزیع لگ نرمال، یعنی $E(X^r) = e^{r\mu+\frac{r^۲\sigma^۲}{۲}}$ نیز به‌صورت زیر است که رفتار آنها همانند میانگین است.

الف- μ نامعلوم و $\sigma^۲$ معلوم:

$$B_k(\mu) = (r\sigma e^{r\mu+\frac{r^۲\sigma^۲}{۲}})^۲ \sum_{i=۱}^{k} \frac{(r\sigma)^{۲(i-۱)}}{i!}.$$

ب- $\sigma^۲$ نامعلوم و μ معلوم:

$$B_k(\sigma^۲) = (r^۲\sigma^۲ e^{r\mu+\frac{r^۲\sigma^۲}{۲}})^۲ \sum_{i=۱}^{k} \frac{(r\sigma)^{۴i-۴}}{(۲i)!}.$$

بحث و نتیجه‌گیری

در این مقاله ابتدا کران‌های باتاچاریا و شیرساگار معرفی و سپس کران شیرساگار چند پارامتری بیان و اثبات شد. سپس فرم‌های کلی ماتریس و کران‌های باتاچاریا و شیرساگار در توزیع لگ نرمال محاسبه و برای توابع مختلفی از پارامترها مقایسه شدند. به‌عنوان مثال زمانی که پارامتر μ نامعلوم و $\sigma^۲$ معلوم باشد، کران اول شیرساگار که همان کران هامرسلی-چپمن-رابینز است به‌عنوان بهترین تقریب برای واریانس برآوردگرهای نااریب تابع میانگین توزیع لگ نرمال به‌دست آمد.

تقدیر و تشکر

نویسندگان مقاله از نظرات و پیشنهادات ارزنده داوران و سردبیر محترم نشریه که باعث بهبود مقاله شد، تقدیر و تشکر می‌کنند.

مراجع

خراشادی‌زاده، م. و محتشمی برزاداران، غ. (۱۳۸۶)، ساختار ماتریس باتاچاریا در خانواده توزیع‌های نمایی طبیعی و نقش آن در تقریب واریانس یک آماره، مجله پژوهش‌های آماری ایران ، **۴**، ۲۹–۴۶.

Akahira, M. and Ohyauchi, N. (2007), A Bayesian View of the Hammersley-Chapman-Robbins-type Inequality, *Statistics*, **41**, 137-144.

Bartoszewicz, J. (1980), On the Convergence of Bhattacharyya Bounds in the Multiparameter Case, *Zastosowanie Matematyki*, **16**, 601-608.

Bhattacharyya, A. (1946), On Some Analogues of the Amount of Information and their Use in Statistical Estimation, *Sankhya A*, **8**, 1-14.

Bhattacharyya, A. (1947), On Some Analogues of the Amount of Information and their Use in Statistical Estimation II, *Sankhya A*, **8**, 201-218.

Blight, B. J. N. and Rao, P. V. (1974), The Convergence of Bhattacharyya Bounds, *Biometrika*, **61**, 137-142.

Chapman, D. G. and Robbins, H. (1951), Minimum Variance Estimation without Regularity Assumptions,*The Annals of Mathematical Statistics*, **22**, 581-586.

Hammersley, J. M. (1950), On Estimating Restricted Parameters, *Journal of the Royal Statistical Society*, B, **12**, 192-240.

Koike, K. (2002), On the Inequality of Kshirsagar, *Communications in Statistics, Theory and Methods*, **31**, 1617-1627.

Kshirsagar, A. M. (2000), An Extension of the Chapman-Robbins Inequality, *Journal of Indian Statistical Association*, **38**, 355-362.

Miller, K. S. (1981), On the Inverse of the Sum of Matrices, *Mathematics Magazine*, **54**, 67-72.

Mohtashami Borzadaran, G. R. (2001), Results Related to the Bhattacharyya Matrices, *Sankhya*, A, **63**, 113-117.

Mohtashami Borzadaran, G. R. (2006), A Note via Diagonality of the 2×2 Bhattacharyya Matrices, *Iranian Journal of Mathematical Sciences and Informatics*, **1**, 79-84.

Mohtashami Borzadaran, G. R., Rezaei Roknabadi, A. H. and Khorashadizadeh, M. (2010), A View on Bhattacharyya Bounds for Inverse Gaussian Distributions, *Metrika*,**72**, 151-161.

Nayeban, S., Rezaei Roknabadi, A. H. and Mohtashami Borzadaran, G. R. (2013), Bhattacharyya and Kshirsagar Bounds in Generalized Gamma Distribution, *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, **42**, 969-980.

Pommeret, D. (1997), Multidimensional Bhattacharyya Matrices and Exponential Families, *Journal of Multivariate Analysis*, **63**, 105-118.

Qin, M. and Nayak, T. K. (2008), Kshirsagar Type Lower Bounds for Mean Squared Error of Prediction, *Communications in Statistics-Theory and Methods*, **37**, 861-872.

Sen, P. K. and Ghosh, B. K. (1976), Comparison of Some Bounds in Estimation Theory, *The Annals of Statistics*, **4**, 755-765.

Shanbhag, D. N. (1972), Some Characterizations Based on the Bhattacharyya Matrix, *Journal of Applied Probability*, **9**, 580-587.

Shanbhag, D. N. (1979), Diagonality of the Bhattacharyya Matrix as a Charaterization, *Theory of Probability and its Applications*, **24**, 430-433.

Tanaka, H. (2003), On a Relation Between a Family of Distributions Attaining the Bhattacharyya Bound and that of Linear Combinations of the Distributions from an Exponential Family, *Communications in Statistics-Theory and Methods*, **32**, 1885-1896.

Tanaka, H. (2006), Location and Scale Parameter Family of Distributions Attaining the Bhattacharyya Bound, *Communications in Statistics-Theory and Methods*, **35**, 1611-1628.