مجله علوم آماری، بهار و تابستان ۱۳۹۳

جلد ۸، شماره ۱، ص ۳۷-۵۶

آزمون برابری ضرایب تغییرات در چند جامعه نرمال با روش خودگردانی پارامتری

احسان خراتی کوپایی، سلطان محمد صدوقی الوندی

گروه آمار، دانشگاه شیراز

تاریخ دریافت: ۱۳۹۳/۲/۱۵ تاریخ آخرین بازنگری: ۱۳۹۳/۴/۱۴

چکیده : از ضریب تغییرات به‌عنوان شاخصی برای سازگاری یا یکنواختی مجموعه‌ای از مشاهدات از چند جامعه با واحدهای اندازه‌گیری مختلف استفاده می‌شود. در این مقاله روشی جدید بر پایه روش خودگردانی پارامتری برای آزمون برابری ضرایب تغییرات در چند جامعه نرمال ارائه می‌شود. از آن جهت که در هر مساله آزمون فرضیه آماری، ارائه روشی که بتواند خطای نوع اول را به خوبی کنترل کند اهمیت دارد؛ نخست با استفاده از شبیه‌سازی عملکرد روش پیشنهادی در کنترل خطای نوع اول بررسی می‌شود. سپس به مقایسه توان آزمون پیشنهادی با روش‌هایی که اخیراً ارائه شده‌اند؛ پرداخته می‌شود.

واژه‌های کلیدی : ضرایب تغییرات، آزمون والد، روش خودگردانی پارامتری، نسبت درستنمایی، p-مقدار تعمیم‌یافته.

آدرس الکترونیک مسئول مقاله: احسان خراتی کوپایی، eh.kh.ko@gmail.com

کد موضوع‌بندی ریاضی (۲۰۱۰): ۶۲F۰۳، ۶۲F۴۰

۱ مقدمه

به دلیل اینکه ضریب تغییرات به واحد اندازه‌گیری بستگی ندارد، معیاری مناسب برای مقایسه پراکندگی چند جامعه با واحدهای اندازه‌گیری مختلف است. به همین دلیل نیز ضریب تغییرات مورد توجه آماردانان قرار گرفته است. هدف این مقاله ارائه آزمونی برای برابری ضرایب تغییرات در چند جامعه نرمال بر اساس آزمون والد[۱] و روش خودگردانی پارامتری[۲] است. تاکنون روش‌های مختلفی برای آزمون برابری ضرایب تغییرات در چند جامعه نرمال ارائه شده‌اند اما هیچ‌یک از روش‌ها دقیق نیستند، به این معنی که خطای نوع اول آن‌ها دقیقا در سطح اسمی آزمون نیست. از مهمترین روش‌ها می‌توان به این موارد اشاره کرد. بنت (۱۹۷۶) آزمونی بر اساس نسبت درستنمایی ارائه کرد. همچنین گوپتا و ما (۱۹۹۶)، رائو و جوز (۲۰۰۱) و نیری و رائو (۲۰۰۳) آزمون والد را برای این مساله به‌کار گرفتند. تسو (۲۰۰۹) نیز از آزمون تقریبی امتیاز[۳] برای آزمون برابری ضرایب تغییرات استفاده کرد. اخیراً لیو و همکاران (۲۰۱۱)، جعفری و کاظمی (۲۰۱۳) و کریشنامورتی و لی (۲۰۱۴) به‌ترتیب روش‌هایی بر اساس p-مقدار تعمیم‌یافته، خودگردانی پارامتری و آزمون نسبت درستنمایی ارائه نمودند و خطای نوع اول و توان آزمون خود را با استفاده از شبیه‌سازی با روش‌های موجود مقایسه کردند. در این مقاله، روشی جدید بر پایه روش والد و خودگردانی پارامتری برای آزمون برابری ضرایب تغییرات در چند جامعه نرمال ارائه می‌شود. اما آماره این آزمون متفاوت از جعفری و کاظمی (۲۰۱۳) است. از آن جهت که در هر مساله آزمون فرض آماری، ارائه روشی که بتواند خطای نوع اول را به نحو مطلوبی کنترل کند اهمیت دارد، نخست با شبیه‌سازی، خطای نوع اول روش پیشنهادی با روش‌های نیری و رائو (۲۰۰۳)، لیو و همکاران (۲۰۱۱)، جعفری و کاظمی (۲۰۱۳) و کریشنامورتی و لی (۲۰۱۴) مقایسه می‌شود. نتایج شبیه‌سازی نشان می‌دهد که از دیدگاه خطای نوع اول، روش پیشنهادی و روش کریشنامورتی و لی (۲۰۱۴) عملکرد بهتری نسبت به

---
۱ Wald

۲ Parametric bootstrap

۳ Score test

دیگر روش‌ها دارند. لذا فقط توان آزمون روش پیشنهادی، با توان آزمون روش کریشنامورتی و لی (۲۰۱۴) مقایسه می‌شود. نتایج شبیه‌سازی نشان می‌دهد که در برخی موارد، توان آزمون روش پیشنهادی بهتر از روش کریشنامورتی و لی (۲۰۱۴) است. در مواردی نیز عکس این موضوع اتفاق می‌افتد و در برخی موارد دیگر، عملکرد این دو روش از دیدگاه توان مانند هم است. همچنین لازم به ذکر است که روش پیشنهادی از لحاظ محاسباتی ساده‌تر از روش کریشنامورتی و لی (۲۰۱۴) است. ساختار مقاله بدین صورت می‌باشد. در بخش ۲ روش‌های لیو و همکاران (۲۰۱۱)، جعفری و کاظمی (۲۰۱۳)، کریشنامورتی و لی (۲۰۱۴) و آزمون والد نیری و رائو (۲۰۰۳) به‌طور مختصر معرفی می‌شوند. همچنین آزمونی جدید بر اساس روش والد و با استفاده از روش خودگردانی پارامتری پیشنهاد و شرح داده می‌شود. در بخش ۳ با مطالعه‌ای شبیه‌سازی به مقایسه آزمون پیشنهادی با روش‌های دیگر از دیدگاه کنترل خطای نوع اول و توان آزمون پرداخته می‌شود. در بخش ۴ با ارائه یک مثال روش‌های ارائه شده توصیف و در بخش ۵ بحث و نتیجه‌گیری ارائه می‌شود.

۲ معرفی روش‌های آزمون

فرض کنید X_{ij} برای $j=1,\dots,n_i$ ؛ $i=1,\dots,k$ نشان‌دهنده jامین نمونه از iامین جامعه نرمال با میانگین μ_i و واریانس σ_i^2 باشد. میانگین و واریانس جامعه iام به‌صورت

$$S_i^2=\frac{1}{n_i-1}\sum_{j=1}^{n_i}(X_{ij}-\bar{X}_i)^2,\quad \bar{X}_i=\frac{1}{n_i}\sum_{j=1}^{n_i}X_{ij}$$

برآورد می‌شوند. همچنین $\bar{x}_i$ و s_i^2 را به‌عنوان مقادیر مشاهده شده از $\bar{X}_i$ و S_i^2 در نظر بگیرید. ضریب تغییرات جامعه iام با $\phi_i=\sigma_i/\mu_i$ نشان داده می‌شود. هدف انجام آزمون برای فرضیه‌های

$$\begin{cases} H_0:\phi_1=\cdots=\phi_k=\phi \\ H_1:\phi_i\neq\phi_j \quad i\neq j \text{ برای حداقل یک } \end{cases}$$

یا به‌طور معادل

$$\begin{cases} H_۰ : \theta_۱ = \cdots = \theta_k = \theta \\ H_۱ : \theta_i \neq \theta_j \quad i \neq j \text{ برای حداقل یک } \end{cases}$$

است، که در آن $\theta_i = ۱/\phi_i$. اگر $\boldsymbol{H}$ ماتریس مقابله‌ها با اندازه $(k-۱)\times k$ و $\boldsymbol{C}$ برداری $k \times ۱$ باشد به طوری‌که

$$C = (\theta_۱, \cdots, \theta_k)'_{k\times ۱}, \quad H = \begin{pmatrix} ۱ & -۱ & ۰ & \cdots & ۰ \\ ۱ & ۰ & -۱ & \cdots & ۰ \\ & & & \ddots & \\ ۱ & ۰ & ۰ & \cdots & -۱ \end{pmatrix}_{(k-۱)\times k}$$

آن‌گاه فرضیه مورد علاقه را می‌توان به‌صورت $H_۰ : \mathbf{HC} = \mathbf{0}$ در مقابل $H_۱ : \mathbf{HC} \neq \mathbf{0}$ نوشت.

۱.۲ روش لیو و همکاران

روش لیو و همکاران (۲۰۱۱) براساس مفهوم کمیت‌های تعمیم یافته است (ویرهاندی، ۱۹۹۵). در این روش، کمیت‌های تعمیم‌یافته به‌صورت

$$\mathcal{R}_{\mu_i} = \bar{x}_i - \frac{۱}{\sqrt{n_i}} s_i T_i, \quad \mathcal{R}_{\sigma_i} = \frac{\sqrt{n_i - ۱}\, s_i}{U_i}$$

هستند، که در آن $T_i \sim t_{n_i-۱}$ و $U_i^۲ \sim \mathcal{X}^۲_{n_i-۱}$. همچنین آماره آزمون به‌صورت

$$\|D\|^۲ = (\mathcal{R}_{HC} - \mu'_{\mathcal{R}})\Sigma_R^{-۱}(\mathcal{R}_{HC} - \mu_{\mathcal{R}}), \quad \|d\|^۲ = \mu'_{\mathcal{R}}\Sigma_{\mathcal{R}}^{-۱}\mu_{\mathcal{R}}$$

معرفی می‌شود، که در آن

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{HC} &= H\left(\frac{\mathcal{R}_{\mu_۱}}{\mathcal{R}_{\sigma_۱}}, \ldots, \frac{\mathcal{R}_{\mu_k}}{\mathcal{R}_{\sigma_k}}\right)' \\ \mu_{\mathcal{R}} &= E(\mathcal{R}_{HC} \mid (\bar{x}, s)) = H\left(E\left(\frac{\mathcal{R}_{\mu_۱}}{\mathcal{R}_{\sigma_۱}} \mid (\bar{x}, s)\right), \ldots, E\left(\frac{\mathcal{R}_{\mu_k}}{\mathcal{R}_{\sigma_k}} \mid (\bar{x}, s)\right)\right)', \\ \Sigma_{\mathcal{R}} &= Cov(\mathcal{R}_{HC} \mid (\bar{x}, s)) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \quad H diag\{V(\frac{\mathcal{R}_{\mu_1}}{\mathcal{R}_{\sigma_1}} \mid (\bar{x}, s)), \ldots, V(\frac{\mathcal{R}_{\mu_k}}{\mathcal{R}_{\sigma_k}} \mid (\bar{x}, s))\}H' \\
&V(\frac{\mathcal{R}_{\mu_i}}{\mathcal{R}_{\sigma_i}} \mid (\bar{x}, s)) = \frac{\bar{x}_i^2}{(n_i - 1)s_i^2}V(U_i) + \frac{1}{n_i}, \\
&E(\frac{\mathcal{R}_{\mu_i}}{\mathcal{R}_{\sigma_i}} \mid (\bar{x}, s)) = \frac{\bar{x}_i}{\sqrt{(n_i - 1)}s_i}E(U_i).
\end{aligned}
$$

که در آن $\mathrm{diag}\ \{x_1, \ldots, x_k\}$ نشان‌دهنده ماتریس قطری $k \times k$ با درایه‌های قطر اصلی x_iها است. فرضیه صفر در سطح α رد می‌شود هرگاه

$$P_{H_0}(||D||^2 \geq ||d||^2) \leq \alpha,$$

که نحوه محاسبه احتمال آن در لیو و همکاران (۲۰۱۱) ارائه شده است.

۲.۲ روش جعفری و کاظمی

ساختار آماره آزمون این روش شبیه به آماره والد می‌باشد. با قرار دادن

$$V^* = diag\{\frac{1}{n_1}, \cdots, \frac{1}{n_k}\}, \quad \tilde{C} = (\frac{\bar{X}_1}{S_1}, \cdots, \frac{\bar{X}_k}{S_k})'_{k\times 1}$$

آماره آزمون به‌صورت

$$
\begin{aligned}
Q &= (H\tilde{C})'[HV^*H']^{-1}(H\tilde{C}) \\
&= \sum_{i=1}^{k} n_i(\frac{\bar{X}_i}{S_i})^2 - \frac{1}{n}(\sum_{i=1}^{k} n_i(\frac{\bar{X}_i}{S_i}))^2 \qquad (1)
\end{aligned}
$$

خواهد بود. فرضیه H_0 برای مقادیر بزرگ Q، رد می‌شود. برای محاسبه p-مقدار، با روش خودگردانی پارامتری، نخست آماره خودگردانی به‌صورت

$$Q_B = \sum_{i=1}^{k} n_i(\frac{\bar{X}_i^B}{S_i^B})^2 - \frac{1}{n}(\sum_{i=1}^{k} n_i(\frac{\bar{X}_i^B}{S_i^B}))^2,$$

معرفی می‌شود، که در آن $n = \sum_{i=1}^{k} n_i$، $\bar{X}_i^B \sim N(\tilde{\theta}, 1/n_i)$، $S_i^{2^B} \sim \frac{1}{n_i - 1}\mathcal{X}_{n_i - 1}^2$ و $\tilde{\theta}$ برآوردگری مناسب برای θ (مقدار مشترک θ_iها) می‌باشد. برای برآورد مقدار مشترک θ_iها، جعفری و کاظمی (۲۰۱۳) در حالتی که فقط اطلاعات میانگین و

واریانس نمونه‌ای در دسترس باشد میانگین وزنی $\sum_{i=1}^{k} n_i(\frac{\bar{x}_i}{s_i})/n$ و در غیر این صورت برآورد ماکسیمم درستنمایی را پیشنهاد داده‌اند. برای محاسبه pـمقدار، از Q_B تحت H_0 مشاهداتی به دفعات زیاد (مثلاً ۱۰۰۰۰ مرتبه) تولید می‌شود و تعداد دفعاتی که مقادیر تولید شده Q_B از مقدار مشاهده شده Q بیشتر باشد به عنوان برآورد pـمقدار در نظر گرفته می‌شود. ذکر این نکته لازم است که آماره Q نسبت به پارامتر مقیاس ناوردا[۴] است. پس بدون از دست دادن کلیت مساله فرض شده است که $\sigma_i = 1$ برای $i = 1, \dots, k$.

۳.۲ روش کریشنامورتی و لی

در این روش آماره آزمون نسبت درستنمایی بهینه‌سازی شده است. لگاریتم تابع درستنمایی بر اساس k جامعه نرمال تحت فرض صفر و بعد از حذف نمودن مقادیر ثابت به‌صورت

$$\ell(\mu, \phi) = -\sum_{i=1}^{k} n_i \ln(\mu_i \phi) - \sum_{i=1}^{k} \frac{n_i(\hat{\sigma}_i^2 + (\bar{X}_i - \mu_i)^2)}{2\phi^2 \mu_i^2},$$

است، که در آن $\hat{\sigma}_i^2 = \frac{n_i - 1}{n_i} S_i^2$ و ϕ مقدار مشترک ضرایب تغییرات تحت H_0 می‌باشد. لازم به ذکر است که برآورد ماکسیمم درستنمایی ϕ و μ_i به‌صورت صریح قابل محاسبه نیستند و برای به‌دست آوردن آن‌ها باید از روش‌های عددی استفاده نمود. در نهایت آماره آزمون نسبت درستنمایی به‌صورت

$$\Lambda = -2[\sum_{i=1}^{k} n_i \ln(\frac{\hat{\mu}_i \hat{\phi}}{\hat{\sigma}_i^2})]$$

حاصل می‌شود، که در آن $\hat{\mu}_i$ و $\hat{\phi}$ برآوردگرهای ماکسیمم درستنمایی μ_i و ϕ هستند. اگر میانگین و واریانس Λ به‌ترتیب با $m(\Lambda)$ و $\nu(\Lambda)$ نشان داده شوند آماره بهینه شدهٔ روش نسبت درستنمایی به‌صورت

$$\Lambda_M = \sqrt{2(k-1)}(\frac{\Lambda - m(\Lambda)}{\sqrt{v(\Lambda)}}) + (k-1),$$

---
۴ Invariant

خواهد بود، که تحت $H_۰$ دارای توزیع تقریبی $\mathcal{X}^۲_{(k-۱)}$ است. اما چون به‌دست آوردن $m(\Lambda)$ و $\nu(\Lambda)$ مشکل است؛ با استفاده از نمونه‌گیری به روش خودگردانی پارامتری می‌توان آن‌ها را برآورد کرد. به این صورت که نخست از $\bar{X}_i^B \sim (\hat{\mu}_i, \hat{\mu}_i\hat{\phi}/n_i)$ و $S_i^{۲^B} \sim \frac{\hat{\mu}_i\hat{\phi}}{n_i}\mathcal{X}^۲_{(n_i-۱)}$ مشاهداتی به دفعات زیاد تولید و کمیت

$$\Lambda^B = -۲[\sum_{i=۱}^{k} n_i \ln(\frac{\hat{\mu}_i^B\hat{\phi}^B}{\hat{\sigma}_i^{۲B}})],$$

محاسبه می‌شود، که در آن $\hat{\mu}_i^B$، $\hat{\sigma}_i^{۲^B}$ و $\hat{\phi}^B$ برآوردگرهای ماکسیمم درستنمایی بر اساس مشاهدات خودگردانی تولید شده از $\bar{X}_i^B$ و $S_i^{۲^B}$ هستند. متوسط و واریانس Λ^B یعنی $m(\Lambda^B)$ و $\nu(\Lambda^B)$، به‌ترتیب تقریبی برای $m(\Lambda)$ و $\nu(\Lambda)$ خواهند بود که این خود مستلزم استفاده مجدد از روش ماکسیمم درستنمایی و روش‌های عددی در نمونه‌های خودگردانی می‌باشد. در روش کریشنامورتی و لی (۲۰۱۴) در سطح α فرض صفر زمانی رد می‌شود که

$$\Lambda_M > \mathcal{X}^۲_{(k-۱)}(\alpha),$$

که در آن $\mathcal{X}^۲_{(k-۱)}(\alpha)$ چندک $(۱-\alpha)$ام از توزیع خی دو با $k-۱$ درجه آزادی است.

۴.۲ آزمون پیشنهادی

نیری و رائو (۲۰۰۳) با استفاده از بسط تیلور، برآورد واریانس تقریبی $\bar{X}_i/S_i$ را (از مرتبه $n^{-۱}$) به‌صورت

$$R_i = \frac{۲ + (\frac{\bar{X}_i}{S_i})^۲}{۲n_i}$$

محاسبه نمودند. اگر قرار داده شود $\mathbf{R} = \mathrm{diag}\ \{R_۱, \ldots, R_k\}$ آن‌گاه آماره آزمون براساس ایده والد به‌صورت

$$WT \;\; = \;\; (H\tilde{C})'[HRH']^{-۱}(H\tilde{C})$$

$$= \sum_{i=1}^{k} W_i(\frac{\bar{X}_i}{S_i})^2 - \frac{1}{\sum_{i=1}^{k} W_i}(\sum_{i=1}^{k} W_i(\frac{\bar{X}_i}{S_i}))^2 \qquad (2)$$

خواهد بود، که در آن $W_i = 1/R_i$. نیری و رائو (۲۰۰۳) نشان دادند که WT تحت فرضیه صفر، به‌صورت مجانبی دارای توزیع خی دو با $k-1$ درجه آزادی است و فرضیه صفر زمانی رد می‌شود که $\mathrm{WT} > \mathcal{X}^2_{(k-1)}(\alpha)$. این آماره از لحاظ محاسباتی راحت‌تر از آماره کریشنامورتی و لی (۲۰۱۴) است ولی همچنان که نشان داده خواهد شد به لحاظ خطای نوع اول عملکرد مطلوبی برای حجم نمونه‌های کوچک ندارد. روش پیشنهادی با استفاده از روش خودگردانی پارامتری و بر اساس آماره WT است. آماره خودگردانی به‌صورت

$$WT_B = \sum_{i=1}^{k} W_i^B(\frac{\bar{X}_i^B}{S_i^B})^2 - \frac{1}{\sum_{i=1}^{k} W_i^B}(\sum_{i=1}^{k} W_i^B(\frac{\bar{X}_i^B}{S_i^B}))^2 \qquad (3)$$

در نظر گرفته می‌شود، که در آن $W_i^B = 1/R_i^B$، $R_i^B = (2 + (\frac{\bar{X}_i^B}{S_i^B})^2)/2n_i$، $\bar{X}_i^B \sim N(\tilde{\theta}, 1/n_i)$، $S_i^{2B} \sim \frac{1}{n_i-1}\mathcal{X}^2_{(n_i-1)}$ و $\tilde{\theta}$ برآوردگری مناسب برای مقدار مشترک θ_i می‌باشد. این برآوردگر می‌تواند میانگین وزنی $\bar{X}_i/S_i$ها، یعنی $\hat{\bar{\theta}}_w = \sum_{i=1}^{k} W_i(\frac{\bar{X}_i}{S_i})/\sum_{i=1}^{k} W_i$ باشد. لازم به ذکر است که آماره WT نسبت به پارامتر مقیاس ناوردا است. پس بدون از دست دادن کلیت مساله فرض شده است که $\sigma_i = 1$ برای $i = 1, \ldots, k$. در روش پیشنهادی فرضیه صفر در سطح α رد می‌شود اگر

$$P_{H_0}(WT_B \geq wt) \leq \alpha, \qquad (4)$$

که در آن wt مقدار مشاهده شدهٔ WT است. برای محاسبه pـمقدار با روش خودگردانی پارامتری، به دفعات زیاد از WT_B تحت H_0 مشاهده تولید می‌شود و نسبت دفعاتی که مشاهدات تولید شده بیشتر از wt هستند به‌عنوان برآورد pـمقدار ارائه می‌شود (برای الگوریتم محاسبه pـمقدار بخش ۳ را ملاحظه کنید).

گرچه به‌واسطه استفاده از ساختار آزمون والد، روش پیشنهادی و روش جعفری و کاظمی (۲۰۱۳) شباهت‌های ظاهری به هم دارند اما تفاوت‌های عمده این دو روش عبارتند از:

الف- برخلاف آنچه که جعفری و کاظمی (۲۰۱۳) بیان داشته‌اند به‌نظر می‌آید آماره Q در عبارت(۱) تحت فرضیه H_0 دارای توزیع خی دو با $k-1$ درجه آزادی نمی‌باشد. با استفاده از واریانس تقریبی $\bar{X}_i/S_i$ می‌توان نشان داد با در نظر گرفتن ضریب $2/(2+\theta^2)$ برای Q، این آماره تحت H_0 به‌صورت مجانبی دارای توزیع خی دو با $k-1$ درجه آزادی می‌شود یعنی

$$Q_c = (\frac{2}{2+\theta^2})Q \sim^{asy} \mathcal{X}^2_{(k-1)}.$$

در حالی که آماره آزمون پیشنهادی براساس ساختار آماره آزمون والد تحت فرضیه صفر دارای توزیع مجانبی خی دو با $k-1$ درجه آزادی است.

ب- عمده‌ترین تفاوت روش پیشنهادی و روش جعفری و کاظمی (۲۰۱۳)، عملکرد آن‌ها در کنترل خطای نوع اول بر اساس شبیه‌سازی‌ها می‌باشد. در واقع اگر تفاوتی بین این دو روش نبود این تفاوت قابل ملاحظه در خطای نوع اول آن‌ها نیز وجود نداشت. جعفری و کاظمی (۲۰۱۳) دو برآوردگر برای مقدار مشترک ضرایب تغییرات ارائه دادند. در صورت استفاده از برآوردگر وزنی $\sum_{i=1}^k n_i(\frac{\bar{X}_i}{S_i})/n$ برای θ، روش جعفری و کاظمی (۲۰۱۳) عملکرد بسیار ضعیفی در برآورد خطای نوع اول خواهد داشت و در بسیاری موارد مقدار صفر را به عنوان برآورد خطای نوع اول ارائه می‌دهد. (قسمت ۳ جداول ۱ و ۲ را ملاحظه کنید). پس وقتی که فقط اطلاعات میانگین و واریانس نمونه‌ای موجود باشد در حالی که خود مشاهدات در دسترس نباشند، استفاده از این روش مناسب نخواهد بود. در صورت استفاده از برآورد ماکسیمم درستنمایی برای θ، عملکرد این روش در برآورد خطای نوع اول کمی بهبود می‌یابد اما باز هم در برخی موارد مقادیر بسیار کوچکی را به عنوان برآورد خطای نوع اول ارائه می‌دهد (قسمت ۳ جداول ۱ و ۲ را ملاحظه کنید). لازم به ذکر است که کاهش خطای نوع اول باعث کاهش توان آزمون می‌شود.

ج- در روش پیشنهادی تفاوتی در استفاده از برآوردگر وزنی یا ماکسیمم درستنمایی برای θ نیست. پر واضح است که در این روش استفاده از برآوردگر وزنی $\hat{\bar{\theta}}_w = \sum_{i=1}^k W_i(\frac{\bar{X}_i}{S_i})/\sum_{i=1}^k W_i$ بسیار راحت‌تر از استفاده از برآوردگر ماکسیمم درستنمایی برای برآورد مقدار مشترک ضرایب تغییرات یعنی θ خواهد بود

زیرا برآورد ماکسیمم درستنمایی θ به‌صورت صریح به‌دست نمی‌آید و باید به‌صورت عددی محاسبه شود. لذا مانند روش‌های جعفری و کاظمی (۲۰۱۳) و کریشنامورتی و لی (۲۰۱۴) اجباری به یافتن برآورد ماکسیمم درستنمایی برای θ نیست.

لازم به ذکر است به دلیل اینکه آماره‌های آزمون والد و آزمون نسبت درستنمایی تحت فرضیه صفر به‌صورت مجانبی معادلند (انگل، ۱۹۸۴) این انتظار می‌رود که آزمون پیشنهادی با آزمون کریشنامورتی و لی (۲۰۱۴) تقریبا از لحاظ خطای نوع اول عملکردی شبیه به یکدیگر داشته باشند اما در توان آزمون با یکدیگر متفاوت باشند.

۳ مطالعه شبیه‌سازی

در این قسمت روش پیشنهادی با روش‌های لیو و همکاران (۲۰۱۱)، جعفری و کاظمی (۲۰۱۳)، والد کلاسیک نیری و رائو (۲۰۰۳) و کریشنامورتی و لی (۲۰۱۴) از لحاظ خطای نوع اول و توان در مطالعه‌ای شبیه‌سازی با یکدیگر مقایسه می‌شوند. برای روش جعفری و کاظمی (۲۰۱۳) دو حالت بررسی می‌شود. اول حالتی که مقدار مشترک ضرایب تغییرات از روش ماکسیمم درستنمایی برآورد و با علامت اختصاری JKL نمایش داده می‌شود. دوم حالتی که مقدار مشترک ضرایب تغییرات از میانگین وزنی $\bar{X}_i/S_i$ها برآورد و با علامت اختصاری JKW نمایش داده می‌شود. روش‌های لیو و همکاران (۲۰۱۱)، نیری ورائو (۲۰۰۳) و کریشنامورتی و لی (۲۰۱۴) نیز به ترتیب با علائم اختصاری GPT، WT و MLRT نمایش داده می‌شوند. همچنین روش پیشنهادی نیز با نماد New معرفی می‌گردد.

در شبیه‌سازی برای روش پیشنهادی، ناحیه بحرانی با روش خودگردانی پارامتری به‌دست آمده است. یعنی توزیع WT تحت H_0 و H_1 با نمونه‌گیری به روش خودگردانی پارامتری تخمین زده می‌شود. برای این کار فرض کنید $x_{i1},\dots,x_{in_i}$ برای $i=1,\dots,k$ داده شده باشد. حال مراحل زیر انجام می‌شود:

۱- محاسبه $\hat{\hat{\theta}}_w$ که در زیربخش ۲-۴ معرفی شده است.

۲- محاسبه مقدار آماره WT در عبارت (۲).

۳- تولید $S_i^{۲^B}$، $\bar{X}_i^B$ برای $i = ۱,\dots,k$، که در زیربخش ۴-۲ معرفی شده‌اند.

۴- محاسبه مقدار آماره WT_B بر اساس عبارت (۳).

۵- تکرار مراحل ۳ و ۴ (۱۰۰۰۰ مرتبه).

برآورد مونت کارلو برای pـمقدار در عبارت (۴) میانگین تعداد دفعاتی است که WT_B بیشتر از wt می‌شود. نسبت تعداد دفعاتی که در $N = ۱۰۰۰۰$ مرتبه، pـمقدار کمتر از α می‌شود برآورد خطای نوع اول (در صورتی که مقادیر WT_B تحت $H_۰$ تولید شوند) و یا توان آزمون (در صورتی که مقادیر WT_B تحت $H_۱$ تولید شوند) خواهد بود. در روش WT، برای بررسی خطای نوع اول از تقریب توزیع خی دو با $k - ۱$ درجه آزادی استفاده شده است (نیری و رائو، ۲۰۰۳). در روش‌های GPT، JKL و JKW با استفاده از روش مونت کارلو خطای نوع اول و توان آزمون با $N = ۱۰۰۰۰$ تکرار تخمین زده شده‌اند . نتایج برآورد احتمال خطای نوع اول برای $k = ۴,۷$ جامعه مستقل نرمال برای حجم نمونه و ضرایب تغییرات مختلف در جدول‌های ۱ و ۲ ارائه شده‌اند. در تمامی حالات، احتمال خطای نوع اول اسمی، ۰/۰۵ در نظر گرفته شده است. لازم به ذکر است که روش‌های ارائه شده در این مقاله دارای توزیع تقریبی به‌ازای حجم نمونه‌های بزرگ هستند؛ لذا در شبیه‌سازی، سعی بر این است که رفتار آزمون‌ها در حجم نمونه‌های کوچک بررسی شوند.

همان‌طور که در جدول‌های ۱ و ۲ ملاحظه می‌شود در تمامی موارد بررسی شده، برآورد احتمال خطای نوع اول روش‌های New و MLRT به سطح اسمی ۰/۰۵ نزدیک‌تر است.

روش تقریبی WT خطای نوع اول را کنترل نمی‌کند (مانند مقادیر ۰/۱۲ برای $k = ۷$، $n = (۲,۲,۲,۲,۲,۲,۲)$ و ۰/۱ برای $k = ۷$، $n = (۵,۲,۵,۲,۳,۳,۲)$). روش‌های JKW، JKL و GPT گرچه برآورد احتمال خطای نوع اول آن‌ها بیشتر از ۰/۰۵ نیست اما در برخی موارد خیلی کوچکتر از ۰/۰۵ می‌باشد؛ که این در عمل موجب کاهش توان آزمون خواهد شد. از بین این سه آزمون، روش‌های JKW و GPT عملکرد ضعیف‌تری در خطای نوع اول دارند؛ زیرا برآورد احتمال خطای نوع

جدول ۱: برآورد خطاهای نوع اول آ برای ۴ جامعه نرمال مستقل

حجم نمونه	آزمون	مقدار مشترک ضرایب تغییرات							
		۰/۰۵	۰/۱	۰/۱۵	۰/۲	۰/۲۵	۰/۳	۰/۳۵	۰/۴
	GPT	۰/۰۰۱	۰/۰۰۱	۰/۰۰۱	۰/۰۰۱	۰/۰۰۱	۰/۰۰۱	۰/۰۰۲	۰/۰۰۲
	JKL	۰/۰۳۰	۰/۰۳۲	۰/۰۲۵	۰/۰۲۷	۰/۰۲۹	۰/۰۳۳	۰/۰۳۰	۰/۰۳۱
۳, ۳, ۳, ۳	JKW	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰
	WT	۰/۰۶۹	۰/۰۶۹	۰/۰۷۱	۰/۰۷۰	۰/۰۷۴	۰/۰۷۲	۰/۰۷۷	۰/۰۷۹
	New	۰/۰۵۰	۰/۰۵۱	۰/۰۵۱	۰/۰۴۸	۰/۰۵۲	۰/۰۴۹	۰/۰۵۱	۰/۰۵۱
	$MLRT$	۰/۰۵۱	۰/۰۵۴	۰/۰۴۹	۰/۰۴۸	۰/۰۵۱	۰/۰۵۱	۰/۰۵۲	۰/۰۵۱
	GPT	۰/۰۰۸	۰/۰۰۶	۰/۰۰۶	۰/۰۰۷	۰/۰۰۶	۰/۰۰۶	۰/۰۰۵	۰/۰۰۵
	JKL	۰/۰۲۳	۰/۰۳۳	۰/۰۳۹	۰/۰۳۶	۰/۰۳۷	۰/۰۴۲	۰/۰۴۱	۰/۰۴۰
۵, ۲, ۵, ۲	JKW	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰
	WT	۰/۰۶۶	۰/۰۶۷	۰/۰۶۳	۰/۰۶۲	۰/۰۶۹	۰/۰۶۴	۰/۰۶۸	۰/۰۷۱
	New	۰/۰۵۰	۰/۰۵۲	۰/۰۴۷	۰/۰۴۷	۰/۰۵۱	۰/۰۴۹	۰/۰۴۸	۰/۰۵۰
	$MLRT$	۰/۰۵۱	۰/۰۴۷	۰/۰۵۰	۰/۰۴۹	۰/۰۵۱	۰/۰۵۲	۰/۰۵۱	۰/۰۵۰
	GPT	۰/۰۲۰	۰/۰۲۱	۰/۰۲۱	۰/۰۲۱	۰/۰۲۱	۰/۰۱۹	۰/۰۱۱	۰/۰۱۱
	JKL	۰/۰۳۵	۰/۰۳۶	۰/۰۳۸	۰/۰۳۹	۰/۰۴۱	۰/۰۴۱	۰/۰۳۹	۰/۰۳۶
۴, ۴, ۱۲, ۳	JKW	۰/۰۰۶	۰/۰۰۴	۰/۰۰۵	۰/۰۰۵	۰/۰۰۶	۰/۰۰۶	۰/۰۰۶	۰/۰۰۵
	WT	۰/۰۶۰	۰/۰۶۴	۰/۰۶۲	۰/۰۶۵	۰/۰۶۸	۰/۰۶۶	۰/۰۶۸	۰/۰۶۶
	New	۰/۰۴۸	۰/۰۴۹	۰/۰۴۹	۰/۰۵۱	۰/۰۵۴	۰/۰۵۱	۰/۰۵۴	۰/۰۵۰
	$MLRT$	۰/۰۴۸	۰/۰۴۸	۰/۰۴۹	۰/۰۵۰	۰/۰۵۲	۰/۰۵۲	۰/۰۵۰	۰/۰۴۹
	GPT	۰/۰۰۸	۰/۰۰۸	۰/۰۰۸	۰/۰۰۷	۰/۰۰۹	۰/۰۰۸	۰/۰۰۷	۰/۰۰۷
	JKL	۰/۰۳۲	۰/۰۳۵	۰/۰۴۱	۰/۰۴۰	۰/۰۴۰	۰/۰۳۹	۰/۰۴۱	۰/۰۴۱
۳, ۶, ۴, ۲	JKW	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰
	WT	۰/۰۶۴	۰/۰۶۶	۰/۰۶۳	۰/۰۷۰	۰/۰۶۶	۰/۰۶۶	۰/۰۶۸	۰/۰۷۴
	New	۰/۰۴۷	۰/۰۵۰	۰/۰۵۰	۰/۰۵۲	۰/۰۴۹	۰/۰۵۱	۰/۰۴۹	۰/۰۴۹
	$MLRT$	۰/۰۵۰	۰/۰۴۸	۰/۰۵۲	۰/۰۵۱	۰/۰۵۳	۰/۰۴۸	۰/۰۵۰	۰/۰۵۲
	GPT	۰/۰۲۷	۰/۰۲۸	۰/۰۲۶	۰/۰۲۵	۰/۰۲۶	۰/۰۲۷	۰/۰۲۸	۰/۰۲۵
	JKL	۰/۰۳۷	۰/۰۳۸	۰/۰۳۸	۰/۰۳۶	۰/۰۳۷	۰/۰۳۷	۰/۰۴۳	۰/۰۳۴
۴, ۶, ۸, ۱۰	JKW	۰/۰۱۵	۰/۰۱۷	۰/۰۱۵	۰/۰۱۶	۰/۰۱۵	۰/۰۱۶	۰/۰۱۶	۰/۰۱۵
	WT	۰/۰۶۲	۰/۰۵۹	۰/۰۶۲	۰/۰۵۹	۰/۰۵۹	۰/۰۶۲	۰/۰۶۸	۰/۰۶۱
	New	۰/۰۵۰	۰/۰۴۸	۰/۰۵۱	۰/۰۴۸	۰/۰۴۸	۰/۰۵۲	۰/۰۵۶	۰/۰۴۸
	$MLRT$	۰/۰۵۰	۰/۰۴۵	۰/۰۵۲	۰/۰۵۱	۰/۰۵۰	۰/۰۵۳	۰/۰۵۷	۰/۰۴۸
	GPT	۰/۰۳۶	۰/۰۳۶	۰/۰۳۴	۰/۰۳۷	۰/۰۳۶	۰/۰۳۵	۰/۰۳۷	۰/۰۳۶
	JKL	۰/۰۳۷	۰/۰۴۲	۰/۰۳۷	۰/۰۴۲	۰/۰۳۹	۰/۰۴۲	۰/۰۳۸	۰/۰۴۳
۸, ۱۲, ۷, ۲۰	JKW	۰/۰۱۹	۰/۰۲۳	۰/۰۲۱	۰/۰۲۴	۰/۰۲۳	۰/۰۲۵	۰/۰۲۲	۰/۰۲۴
	WT	۰/۰۵۶	۰/۰۶۰	۰/۰۵۶	۰/۰۶۱	۰/۰۵۸	۰/۰۶۱	۰/۰۵۵	۰/۰۶۱
	New	۰/۰۵۰	۰/۰۵۴	۰/۰۴۷	۰/۰۵۴	۰/۰۵۱	۰/۰۵۳	۰/۰۴۷	۰/۰۵۰
	$MLRT$	۰/۰۴۷	۰/۰۵۴	۰/۰۴۹	۰/۰۵۲	۰/۰۵۰	۰/۰۵۳	۰/۰۴۸	۰/۰۵۲

اول در این روش‌ها در برخی موارد صفر است. با توجه به عملکرد آزمون‌ها در برآورد احتمال خطای نوع اول، در ادامه فقط توان آزمون روش‌های New و MLRT با یکدیگر مقایسه می‌شوند. زیرا روش‌های دیگر عملکرد ضعیفی در برآورد خطای نوع اول داشتند. برای بررسی برآورد توان آزمون حالت‌های $k = ۳, ۴, ۵$، با حجم نمونه‌های متفاوت و مقادیر مختلف ضرایب تغییرات مدنظر قرار گرفته‌اند.

همچنین جایگشت‌های مختلف مقادیر ضرایب تغییرات نسبت به هم در حالت‌های مختلف در نظر گرفته شده‌اند. نتایج در جدول‌های ۳، ۴ و ۵ ارائه شده است. در جدول ۵ توان آزمون روش‌های New و MLRT در حالت حجم نمونه‌های برابر بررسی شده است. همان‌طور که در جداول ۳ و ۴ ملاحظه می‌شود، در اکثر حالات تحت بررسی، روش پیشنهادی دارای توان بالاتری نسبت به روش MLRT

جدول ۲: برآورد خطاهای نوع اول برای ۷ جامعه نرمال مستقل

حجم نمونه	آزمون	مقدار مشترک ضرایب تغییرات							
		۰/۰۵	۰/۱	۰/۱۵	۰/۲	۰/۲۵	۰/۳	۰/۳۵	۰/۴
	GPT	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰
	JKL	۰/۰۰۵	۰/۰۰۹	۰/۰۰۱	۰/۰۱۶	۰/۰۲۰	۰/۰۲۴	۰/۰۲۴	۰/۰۲۸
۲, ۲, ۲, ۲	JKW	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰
۲, ۲, ۲	WT	۰/۱۲۴	۰/۱۱۹	۰/۱۲۴	۰/۱۱۸	۰/۱۲۰	۰/۱۲۷	۰/۱۲۲	۰/۱۲۴
	New	۰/۰۵۳	۰/۰۵۲	۰/۰۵۱	۰/۰۴۶	۰/۰۴۸	۰/۰۴۹	۰/۰۴۶	۰/۰۴۵
	$MLRT$	۰/۰۵۰	۰/۰۵۳	۰/۰۴۶	۰/۰۴۶	۰/۰۴۷	۰/۰۵۳	۰/۰۴۱	۰/۰۴۸
	GPT	۰/۰۰۲	۰/۰۰۲	۰/۰۰۲	۰/۰۰۱	۰/۰۰۲	۰/۰۰۱	۰/۰۰۱	۰/۰۰۱
	JKL	۰/۰۰۷	۰/۰۱۷	۰/۰۲۵	۰/۰۳۲	۰/۰۳۴	۰/۰۳۸	۰/۰۳۶	۰/۰۳۸
۵, ۲, ۵, ۲,	JKW	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰
۳, ۳, ۲	WT	۰/۰۹۰	۰/۱۰۱	۰/۰۹۴	۰/۰۹۲	۰/۰۹۶	۰/۰۹۷	۰/۰۹۳	۰/۱۰۰
	New	۰/۰۴۹	۰/۰۵۳	۰/۰۵۰	۰/۰۴۹	۰/۰۵۳	۰/۰۵۱	۰/۰۴۷	۰/۰۴۵
	$MLRT$	۰/۰۵۰	۰/۰۵۰	۰/۰۴۷	۰/۰۵۲	۰/۰۵۰	۰/۰۵۲	۰/۰۴۶	۰/۰۵۰
	GPT	۰/۰۱۲	۰/۰۱۱	۰/۰۱۳	۰/۰۱۳	۰/۰۱۲	۰/۰۱۲	۰/۰۱۰	۰/۰۱۳
	JKL	۰/۰۲۷	۰/۰۳۸	۰/۰۳۸	۰/۰۳۷	۰/۰۴۰	۰/۰۴۴	۰/۰۴۵	۰/۰۴۴
۴, ۴, ۱۲, ۳,	JKW	۰/۰۰۱	۰/۰۰۲	۰/۰۰۱	۰/۰۰۱	۰/۰۰۱	۰/۰۰۲	۰/۰۰۱	۰/۰۰۱
۲, ۴, ۶	WT	۰/۰۸۲	۰/۰۸۰	۰/۰۷۸	۰/۰۷۹	۰/۰۸۰	۰/۰۸۶	۰/۰۸۵	۰/۰۸۲
	New	۰/۰۵۱	۰/۰۵۲	۰/۰۵۱	۰/۰۵۱	۰/۰۵۲	۰/۰۵۲	۰/۰۵۵	۰/۰۵۰
	$MLRT$	۰/۰۴۸	۰/۰۵۰	۰/۰۵۱	۰/۰۵۰	۰/۰۴۷	۰/۰۵۵	۰/۰۵۵	۰/۰۵۰
	GPT	۰/۰۰۸	۰/۰۰۸	۰/۰۰۷	۰/۰۰۷	۰/۰۰۵	۰/۰۰۵	۰/۰۰۵	۰/۰۰۵
	JKL	۰/۰۰۷	۰/۰۲۱	۰/۰۳۰	۰/۰۳۴	۰/۰۳۶	۰/۰۳۸	۰/۰۴۲	۰/۰۴۳
۵, ۳, ۲, ۴,	JKW	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰
۲, ۲, ۱۰	WT	۰/۰۸۶	۰/۰۸۷	۰/۰۸۸	۰/۰۸۹	۰/۰۹۴	۰/۰۹۲	۰/۰۹۶	۰/۱۰۱
	New	۰/۰۴۶	۰/۰۴۷	۰/۰۴۹	۰/۰۴۸	۰/۰۵۴	۰/۰۵۳	۰/۰۴۹	۰/۰۵۲
	$MLRT$	۰/۰۴۷	۰/۰۴۸	۰/۰۵۰	۰/۰۵۰	۰/۰۵۲	۰/۰۵۲	۰/۰۴۹	۰/۰۵۱
	GPT	۰/۰۲۲	۰/۰۲۲	۰/۰۲۵	۰/۰۲۰	۰/۰۲۰	۰/۰۱۹	۰/۰۱۸	۰/۰۲۱
	JKL	۰/۰۲۸	۰/۰۴۱	۰/۰۴۵	۰/۰۳۹	۰/۰۴۵	۰/۰۴۴	۰/۰۴۵	۰/۰۴۴
۳, ۶, ۴, ۲,	JKW	۰/۰۱۵	۰/۰۱۳	۰/۰۱۸	۰/۰۱۲	۰/۰۱۶	۰/۰۱۵	۰/۰۱۴	۰/۰۱۵
۲۰, ۱۰, ۷	WT	۰/۰۷۲	۰/۰۷۲	۰/۰۷۴	۰/۰۷۳	۰/۰۷۲	۰/۰۷۲	۰/۰۷۴	۰/۰۷۱
	New	۰/۰۴۸	۰/۰۴۹	۰/۰۴۸	۰/۰۴۹	۰/۰۴۹	۰/۰۴۷	۰/۰۴۷	۰/۰۴۵
	$MLRT$	۰/۰۴۵	۰/۰۴۶	۰/۰۵۰	۰/۰۴۷	۰/۰۴۸	۰/۰۴۸	۰/۰۵۱	۰/۰۴۷
	GPT	۰/۰۰۵	۰/۰۰۵	۰/۰۰۴	۰/۰۰۳	۰/۰۰۴	۰/۰۰۴	۰/۰۰۳	۰/۰۰۳
	JKL	۰/۰۰۷	۰/۰۲۲	۰/۰۲۹	۰/۰۳۰	۰/۰۳۳	۰/۰۳۷	۰/۰۳۸	۰/۰۳۹
۲, ۳, ۲, ۳,	JKW	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰	۰/۰۰۰
۲, ۳, ۱۰	WT	۰/۰۹۷	۰/۰۹۴	۰/۰۹۴	۰/۰۹۸	۰/۰۹۴	۰/۱۰۱	۰/۱۰۰	۰/۱۰۳
	New	۰/۰۵۰	۰/۰۵۰	۰/۰۴۹	۰/۰۵۲	۰/۰۴۸	۰/۰۴۹	۰/۰۴۹	۰/۰۵۳
	$MLRT$	۰/۰۴۹	۰/۰۴۶	۰/۰۴۷	۰/۰۴۹	۰/۰۴۸	۰/۰۴۹	۰/۰۵۰	۰/۰۴۶

جدول ۳: برآورد توان آزمون برای ۳ جامعه نرمال مستقل با روش‌های New و MLRT

حجم نمونه	آزمون	ضرایب تغییرات و جایگشت‌های آن					
		۰/۲, ۰/۴ ۰/۱	۰/۲, ۰/۱ ۰/۴	۰/۴, ۰/۲ ۰/۱	۰/۴, ۰/۱ ۰/۲	۰/۱/۰/۲ ۰/۴	۰/۱, ۰/۴ ۰/۲
۲, ۵, ۱۰	New	۰/۷۸۹	۰/۷۱۹	۰/۴۹۱	۰/۳۳۹	۰/۳۶۹	۰/۳۵۰
	$MLRT$	۰/۵۵۴	۰/۵۰۴	۰/۲۳۶	۰/۱۶۹	۰/۳۰۳	۰/۲۵۰
۳, ۵, ۷	New	۰/۶۸۵	۰/۶۴۳	۰/۵۱۹	۰/۴۱۸	۰/۴۳۵	۰/۴۰۲
	$MLRT$	۰/۵۸۲	۰/۵۹۳	۰/۴۰۲	۰/۳۴۶	۰/۴۶۲	۰/۴۰۰
۴, ۷, ۱۰	New	۰/۸۶۳	۰/۸۴۸	۰/۷۱۲	۰/۶۱۰	۰/۶۴۸	۰/۵۸۸
	$MLRT$	۰/۸۲۰	۰/۸۳۲	۰/۶۴۲	۰/۵۶۰	۰/۶۸۲	۰/۶۰۱
۱۰, ۱۵, ۲۰	New	۰/۹۹۶	۰/۹۹۸	۰/۹۸۶	۰/۹۷۲	۰/۹۸۷	۰/۹۶۹
	$MLRT$	۰/۹۹۵	۰/۹۹۸	۰/۹۸۴	۰/۹۷۲	۰/۹۹۰	۰/۹۷۴

می‌باشد و در چند حالت محدود رقابتی تنگاتنگ با روش MLRT داشته است. مانند جدول ۳ زمانی که حجم نمونه (۴ و ۷ و ۱۰) و ضرایب تغییرات (۰/۴ و ۰/۲ و ۰/۱) و (۰/۲ و ۰/۴ و ۰/۱) می‌باشد. در حالت حجم نمونه‌های برابر (جدول ۵) نیز دو روش New و MLRT تفاوت چندانی با یکدیگر ندارند.

همان‌طور که از جدول‌های ۴، ۳ و ۵ دیده می‌شود برای حجم نمونه ثابت، جایگشت‌های مختلف مقادیر ضرایب تغییرات منجر به تغییر در مقدار برآورد توان آزمون می‌شود. به منظور مقایسه بهتر روش‌های New و MLRT، حالت دیگری نیز در نظر گرفته شده است.

در این حالت از حجم نمونه و مقادیر متفاوت ضرایب تغییراتی استفاده شده که کریشنامورتی و لی (۲۰۱۴) برای مقایسه توان آزمون خود با سایر روش‌ها استفاده کرده‌اند. به‌علاوه برای حجم نمونه ثابت، برخی جایگشت‌های مختلف ضرایب تغییرات نیز در نظر گرفته شده است. بر اساس نتایج جدول ۶ برای حجم نمونه برابر و حجم نمونه بزرگ باز هم دو روش New و MLRT از لحاظ توان شبیه به هم هستند. در برخی موارد که توان روش MLRT بیشتر از روش جدید به نظر می‌آید، با در نظر گرفتن جایگشت دیگری از مقادیر ضرایب تغییرات این برتری به نفع روش New تغییر پیدا کرده است یا برآورد توان دو روش تقریباً یکسان شده‌اند.

۴ مثال عددی

داده‌های این مثال (نیری و رائو، ۲۰۰۳) مربوط به تعداد صید ۴ نوع ماهی در سال‌های ۱۹۹۱ الی ۱۹۹۹ در ایالت کارناتاکا هند است و اطلاعات مربوط به آن‌ها در جدول ۷ و نتایج آزمون‌ها در جدول ۸ ارائه شده‌اند. همان‌طور که دیده می‌شود روش‌های WT، MLRT و New فرض برابری ضرایب تغییرات را در سطح ۰/۰۵ رد می‌کنند. اما با استفاده از GPT، JKL و JKW این فرض رد نخواهد شد.

بحث و نتیجه‌گیری

همان‌طور که دیده می‌شود در روش‌های GPT، JKL و JKW وضعیت خوبی در خطای نوع اول نداریم و در برخی موارد برآورد احتمال خطای نوع اول بسیار

جدول ۴: برآورد توان آزمون برای ۴ جامعه نرمال مستقل با روش‌های New و MLRT

حجم نمونه		ضرایب تغییرات و جایگشت‌های آن					
		۰/۱, ۰/۲, ۰/۳۳, ۰/۴	۰/۱, ۰/۲, ۰/۴, ۰/۳۳	۰/۱, ۰/۴, ۰/۳۳, ۰/۲	۰/۱, ۰/۴, ۰/۲, ۰/۳۳	۰/۱/۰/۳۳, ۰/۲, ۰/۴۰	۰/۱, ۰/۳۳, ۰/۴, ۰/۲
۲, ۵, ۸, ۱۰	*New*	۰/۲۷۵	۰/۲۶۱	۰/۳۵۴	۰/۳۱۲	۰/۳۷۸	۰/۳۹۱
	MLRT	۰/۲۸۵	۰/۲۷۴	۰/۲۸۰	۰/۲۶۶	۰/۳۲۰	۰/۳۱۲
حجم نمونه		ضرایب تغییرات و جایگشت‌های آن					
		۰/۴, ۰/۱, ۰/۲, ۰/۳۳	۰/۴, ۰/۱, ۰/۳۳, ۰/۲	۰/۴, ۰/۳۳, ۰/۲, ۰/۱	۰/۴, ۰/۳۳, ۰/۱, ۰/۲	۰/۴, ۰/۲, ۰/۱, ۰/۳۳	۰/۴, ۰/۲, ۰/۳۳, ۰/۱
۲, ۵, ۸, ۱۰	*New*	۰/۵۲۴	۰/۵۰۸	۰/۶۸۰	۰/۵۹۷	۰/۷۱۶	۰/۷۶۶
	MLRT	۰/۳۵۴	۰/۳۳۴	۰/۴۲۸	۰/۳۶۸	۰/۴۹۶	۰/۵۳۹
حجم نمونه		ضرایب تغییرات و جایگشت‌های آن					
		۰/۳۳, ۰/۱, ۰/۲, ۰/۴	۰/۳۳, ۰/۱, ۰/۴, ۰/۲	۰/۳۳, ۰/۲, ۰/۱, ۰/۴	۰/۳۳, ۰/۲, ۰/۴, ۰/۱	۰/۳۳, ۰/۴, ۰/۲, ۰/۱	۰/۳۳, ۰/۴, ۰/۱, ۰/۲
۲, ۵, ۸, ۱۰	*New*	۰/۶۹۲	۰/۶۴۹	۰/۸۴۰	۰/۸۵۹	۰/۷۴۶	۰/۶۸۱
	MLRT	۰/۵۱۹	۰/۴۶۷	۰/۶۶۸	۰/۶۷۲	۰/۵۲۷	۰/۴۶۹
حجم نمونه		ضرایب تغییرات و جایگشت‌های آن					
		۰/۲, ۰/۴, ۰/۱, ۰/۳۳	۰/۲, ۰/۴, ۰/۳۳, ۰/۱	۰/۲, ۰/۳۳, ۰/۴, ۰/۱	۰/۲, ۰/۳۳, ۰/۱, ۰/۴	۰/۲, ۰/۱, ۰/۳۳, ۰/۴	۰/۲, ۰/۱, ۰/۴, ۰/۳۳
۲, ۵, ۸, ۱۰	*New*	۰/۷۸۵	۰/۸۵۸	۰/۸۸۱	۰/۸۳۳	۰/۵۶۲	۰/۵۴۳
	MLRT	۰/۶۰۱	۰/۶۷۰	۰/۷۱۶	۰/۶۶۹	۰/۴۷۴	۰/۴۵۷

جدول ۵: برآورد توان آزمون برای ۵ جامعه نرمال مستقل با روش‌های New و MLRT

حجم نمونه	آزمون	ضرایب تغییرات و جایگشت‌های آن					
		۰/۰۵, ۰/۰۵, ۰/۰۵, ۰/۱ ۰/۱	۰/۱, ۰/۱۵, ۰/۱۵, ۰/۱۵ ۰/۱۵	۰/۰۵, ۰/۰۶, ۰/۰۷, ۰/۰۸ ۰/۰۹	۰/۲, ۰/۲, ۰/۳, ۰/۳ ۰/۳	۰/۴, ۰/۴, ۰/۴, ۰/۳ ۰/۳	۰/۲, ۰/۱۵, ۰/۱۵, ۰/۱۵ ۰/۱۵
۴, ۴, ۴, ۴, ۴	New	۰/۲۷۲	۰/۰۷۹	۰/۱۰۱	۰/۰۹۴	۰/۰۷۰	۰/۰۷۲
	$MLRT$	۰/۲۳۰	۰/۰۷۲	۰/۰۹۱	۰/۰۸۹	۰/۰۶۵	۰/۰۶۵
۵, ۵, ۵, ۵, ۵	New	۰/۳۵۲	۰/۰۸۴	۰/۱۳۳	۰/۱۱۳	۰/۰۷۸	۰/۰۸۲
	$MLRT$	۰/۳۰۸	۰/۰۷۹	۰/۱۲۴	۰/۱۰۷	۰/۰۷۴	۰/۰۷۵
۶, ۶, ۶, ۶, ۶	New	۰/۴۴۸	۰/۰۹۴	۰/۱۵۸	۰/۱۳۴	۰/۰۹۴	۰/۰۹۲
	$MLRT$	۰/۴۰۹	۰/۰۹۵	۰/۱۴۹	۰/۱۲۶	۰/۰۸۹	۰/۰۸۳
۸, ۸, ۸, ۸, ۸	New	۰/۶۰۲	۰/۱۱۳	۰/۲۱۳	۰/۱۷۸	۰/۱۰۷	۰/۱۰۳
	$MLRT$	۰/۵۷۲	۰/۱۱۸	۰/۲۰۵	۰/۱۷۳	۰/۱۰۳	۰/۰۹۶

جدول ۶: برآورد توان آزمون برای ۳ جامعه نرمال مستقل بر اساس جدول کریشنامورتی و لی (۲۰۱۴)

ضرایب تغییرات	آزمون	حجم نمونه				
		۵, ۵, ۵	۵, ۱۰, ۵	۵, ۱۰, ۱۰	۱۰, ۱۰, ۱۰	۱۰, ۲۰, ۲۰
	New	۰/۰۵۰	۰/۰۴۸	۰/۰۵۲	۰/۰۴۹	۰/۰۴۹
۰/۱, ۰/۱, ۰/۱	$MLRT$	۰/۰۵۰	۰/۰۴۹	۰/۰۵۱	۰/۰۵۱	۰/۰۴۹
	New	۰/۱۷۶	۰/۱۸۲	۰/۱۸۰	۰/۴۳۲	۰/۵۰۵
۰/۱, ۰/۲, ۰/۲	$MLRT$	۰/۱۸۱	۰/۲۱۵	۰/۲۴۵	۰/۴۵۳	۰/۵۷۰
	New	–	۰/۳۴۸	۰/۴۰۶	–	۰/۷۸۷
۰/۲, ۰/۱, ۰/۲	$MLRT$	–	۰/۲۷۹	۰/۳۷۰	–	۰/۷۸۱
	New	–	۰/۱۸۵	۰/۴۱۲	–	۰/۷۸۶
۰/۲, ۰/۲, ۰/۱	$MLRT$	–	۰/۲۱۶	۰/۳۸۱	–	۰/۷۸۳
	New	۰/۵۴۴	۰/۵۹۶	۰/۶۱۴	۰/۹۷۵	۰/۹۹۵
۰/۱, ۰/۴, ۰/۴	$MLRT$	۰/۶۱۸	۰/۷۱۰	۰/۷۸۱	۰/۹۸۲	۰/۹۷۷
	New	–	۰/۹۰۱	۰/۹۵۴	–	۱
۰/۴, ۰/۱, ۰/۴	$MLRT$	–	۰/۸۷۱	۰/۹۴۹	–	۱
	New	–	۰/۵۸۹	۰/۹۵۵	–	۱
۰/۴, ۰/۴, ۰/۱	$MLRT$	–	۰/۷۱۳	۰/۹۵۱	–	۱
	New	۰/۶۳۷	۰/۷۱۳	۰/۷۱۵	۰/۹۹۱	۰/۹۹۹
۰/۱, ۰/۵, ۰/۴	$MLRT$	۰/۷۰۹	۰/۸۱۸	۰/۸۵۴	۰/۹۹۲	۱
	New	–	۰/۶۵۳	۰/۷۱۷	–	۰/۹۹۹
۰/۱, ۰/۴, ۰/۵	$MLRT$	–	۰/۷۶۷	۰/۸۵۷	–	۱
	New	–	۰/۷۱۸	۰/۹۸۳	–	۱
۰/۴, ۰/۵, ۰/۱	$MLRT$	–	۰/۸۲۰	۰/۹۸۱	–	۱
	New	–	۰/۹۳۳	۰/۹۶۹	–	۱
۰/۵, ۰/۱, ۰/۴	$MLRT$	–	۰/۹۱۲	۰/۹۶۶	–	۱
	New	–	۰/۶۵۴	۰/۹۷۳	–	۱
۰/۵, ۰/۴, ۰/۱	$MLRT$	–	۰/۷۶۷	۰/۹۷۰	–	۱
	New	–	۰/۹۳۷	۰/۹۸۳	–	۱
۰/۴, ۰/۱, ۰/۵	$MLRT$	–	۰/۹۱۷	۰/۹۸۱	–	۱

(–): به دلیل ثابت بودن حجم نمونه، نیازی به برآورد توان در جایگشت‌های مختلف مقادیر ضرایب تغییرات نبوده است.

جدول ۷: اطلاعات مربوط به تعداد صید ۴ نوع ماهی در سال‌های ۱۹۹۱ الی ۱۹۹۹ کارناتاکا هند

	نوع ماهی			
	۱	۲	۳	۴
حجم نمونه	۹	۹	۹	۹
میانگین نمونه‌ای	۶۰۵/۶	۱۰۹/۰	۳۰۳/۰	۹۳/۴
انحراف معیار نمونه‌ای	۲۱۰/۸۵	۱۱۵/۳۸	۱۱۳/۹۴	۸۲/۹۹
ضریب تغییرات نمونه‌ای	۰/۳۴۸	۱/۰۵۹	۰/۳۷۶	۰/۸۸۹

جدول ۸: نتایج آزمون

روش	p-مقدار	مقدار آماره
GPT	۰/۰۵۶	۷/۶۴۶
JKL	۰/۰۸۱	۲۷/۳۰۸
JKW	۰/۱۲۹	۲۷/۳۰۸
WT	۰/۰۳۰	۸/۹۴۳
$MLRT$	۰/۰۴۲	۸/۲۱۸
New	۰/۰۳۸	۸/۹۴۳

کمتر از سطح اسمی ۰/۰۵ است. آزمون مجانبی WT نیز خطای نوع اول را کنترل نمی‌کند. اما روش‌های New و MLRT هر دو وضعیت مطلوبی در کنترل خطای نوع اول دارند و برآورد احتمال خطای نوع اول در این دو روش حتی برای نمونه‌های کوچک بسیار نزدیک به سطح اسمی آزمون می‌باشد. در این بین روش‌های JKW و GPT عملکرد ضعیف‌تری نسبت به روش‌های دیگر دارند زیرا در برخی موارد احتمال خطای نوع اول آن‌ها صفر برآورد شده است. نکته دیگر در مورد روش جعفری و کاظمی (۲۰۱۳) این است که آماره آزمون در این روش، به صورت مجانبی تحت H_0 دارای توزیع خی دو با $k-1$ درجه آزادی نمی‌باشد و فقط می‌توان با روش خودگردانی پارامتری از آن استفاده کرد. بنابراین استفاده از روش‌های لیو و همکاران (۲۰۱۱)، جعفری و کاظمی (۲۰۱۳) و آماره مجانبی WT به دلیل عملکرد ضعیف در خطای نوع اول در عمل توصیه نمی‌گردد. لذا بر اساس این نتایج فقط توان آزمون روش‌های New و MLRT بررسی شده‌اند؛ زیرا با توجه به عملکرد GPT، JKL، JKW و WT در خطای نوع اول، لزومی به مقایسه توان آن‌ها نمی‌باشد. در برخی موارد توان آزمون در روش New بهتر از MLRT است و در برخی موارد بالعکس و در برخی موارد دیگر عملکرد دو روش مانند هم است. به عنوان نمونه در جدول ۶ در مواردی که توان MLRT بهتر از New است با در نظر گرفتن جایگشت‌های دیگری از ضرایب تغییرات، این برتری به نفع روش New تغییر پیدا کرده است یا توان دو روش تقریباً یکسان شده‌اند. زمانی که حجم نمونه‌ها با یکدیگر برابر باشند و همچنین برای حجم نمونه بزرگ، دو روش New و MLRT توان شبیه به یکدیگر دارند. ذکر این نکته الزامی است که در روش MLRT مجبور به استفاده از روش ماکسیمم درستنمایی برای برآورد مقدار مشترک ضرایب تغییرات در نمونه داده شده و نمونه‌های خودگردانی هستیم که این خود مستلزم استفاده از روش‌های عددی است. به نظر می‌آید استفاده از روش New به دلیل سادگی و سهولت بیشتر نسبت به روش MLRT برتری دارد. علاوه بر این، روش پیشنهادی از لحاظ خطای نوع اول و توان آزمون عملکرد مناسبی دارد. بنابراین استفاده از روش پیشنهادی در عمل به‌عنوان یک روش ساده‌تر و قابل اعتماد توصیه می‌شود.

تقدیر و تشکر

نویسندگان کمال تشکر و قدردانی را از داوران محترم مقاله که با پیشنهادات ارزنده خود باعث بهبود مقاله شدند دارند.

مراجع

Bennett, B. M. (1976), On Approximate Test for Homogeneity of Coefficients of Variation, *Contribution to Applied Statistics*, **22**, 169-171.

Engle, R. F. (1984), *Wald, Likelihood Ratio and Lagrange Multiplier Tests in Econometrics*, Volume II, Elsevier Science Publishers BV.

Gupta, R. C. and Ma, S. (1996), Testing the Equality of the Coefficients of Variation in k Normal Populations, *Communication in Statistics-Theory and Methods*, **25**, 115-132.

Jafari, A. and Kazemi, M. (2013), A Parametric Bootstrap Approach for the Equality of Coefficients of Variation, *Computational Statistics*, **28**, 2621-2639.

Krishnamoorthy, K. and Lee, M. (2014), Improved Tests for The Equality of Normal Coefficients of Variation, *Computational Statistics*, **29**, 215-232.

Liu, X., Xu, X. and Zhao J. (2011), A New Generalized p-value Approach for Testing Equality of Coefficients of Variation in k Normal Populations, *Journal of Statistical Computation and Simulation.*, **81**, 1121-1130.

Nairy, K. and Rao, K. A. (2003), Tests of Coefficients of Variation of Normal Population, *Communication in Statistics-Simulation and Computation.*, **32**, 641-661.

Rao, K. A. and Jose, C. T. (2001), *Tests for Equality of Coefficient of Variation of k Populations*, In: Proceeding the 53rd Session of International Statistical Institute, Seoul, Korea.

Tsou, T. S. (2009), A Robust Score Test for Testing Several Coefficients of Variation with Unknown Underlying Distributions, *Communication in Statistics-Theory and Methods*, **38**. 1350-1360.

Weerahandi, S. (1995), *Exact Statistical Methods for Data Analysis*, Springer, New York.