مجله علوم آماری، بهار و تابستان ۱۳۹۳
جلد ۸، شماره ۱، ص ۷۵-۹۲

برآوردگر انقباضی در توزیع نرمال چند متغیره تحت فضای پارامتر محدود

حمید کرمی‌کبیر، محمد آرشی
گروه آمار، دانشگاه شاهرود

تاریخ دریافت: ۱۳۹۲/۹/۲۲ تاریخ آخرین بازنگری: ۱۳۹۳/۳/۲۱

چکیده : در این مقاله مسئله برآورد بردار میانگین توزیع نرمال چند متغیره با واریانس نامعلوم تحت دو محدودیت مورد بررسی قرار می‌گیرد. ابتدا فرض می‌شود تمام مولفه‌های بردار میانگین نامنفی باشند و سپس تنها زیر مجموعه‌ای از مولفه‌های آن نامنفی در نظر گرفته می‌شوند. هدف یافتن رده‌ای از برآوردگرهای انقباضی برتر، در فضای پارامتر محدود شده، تحت تابع زیان توان دوم است. در این راستا رده برآوردگرهای نوع بارانچیک برای حالت فضای پارامتر محدود تعمیم داده و با استفاده از تکنیک امید ریاضی دوگانه رده‌ای از برآوردگرهای انقباضی معرفی می‌شود که دارای مخاطره کمتری نسبت به برآوردگر مینیماکس در توزیع نرمال است.

واژه‌های کلیدی : برآوردگر انقباضی، توزیع نرمال چند متغیره، فضای پارامتر محدود شده، لم استاین، مخاطره.

آدرس الکترونیک مسئول مقاله: حمید کرمی کبیر، h_karamikabir@yahoo.com
کد موضوع‌بندی ریاضی (۲۰۱۰): 62J07, 62H

۱ مقدمه

مسئله برآورد پارامتر مکان تحت محدودیت، در سال‌های اخیر پیشرفت زیادی داشته است. در این زمینه کسلا و استرادرمان (۱۹۸۱) و بیکل (۱۹۸۱) مسئله برآورد پارامتر مکان θ را تحت محدودیت $|\theta| < m$ در توزیع نرمال مورد مطالعه قرار دادند. در همین راستا گاتسونیس و همکاران (۱۹۸۷) برآوردگر بیز را با محدودیت مشابه با کسلا و استرادرمان برای میانگین توزیع نرمال ارائه کردند. همچنین مارچاند (۱۹۹۴) در توزیع نرمال چند متغیره $N_p(\mu, \Sigma)$ محدودیت $\mu^T\Sigma^{-1}\mu = \lambda_0$ (برای μ و Σ نامعلوم) و در سال (۱۹۹۳) در توزیع‌های متقارن کروی برای θ (اساسا برای توزیع‌های نرمال آمیخته) با محدودیت $\|\theta\| = (\theta^T\theta)^{1/2} = \lambda_0$ را در نظر گرفت. وی بهترین برآوردگر هم‌پایا[۱] (BEE) را یافت و ثابت کرد که BEE بهتر از برآوردگر ماکسیمم درستنمایی[۲] (MLE) و بهترین برآوردگر خطی ناریب[۳] $(BLUE)$ است. مارچاند و جیری (۱۹۹۳) رده‌ای از برآوردگرهای از نوع جیمز استاین را در نظر گرفته و نتایج را برای توزیع‌های نرمال آمیخته مقیاسی[۴] تعمیم دادند. فودینیر و اوسو (۲۰۰۰) توزیع کروی معمولی وقتی که مشاهدات به شکل (X, U) دارای توزیع متقارن کروی حول بردار (θ, o) بودند، را در حالت θ محدود شده مورد بررسی قرار دادند. در ادامه، وان و همکاران (۲۰۰۰) برآوردگرهای مینیماکس و گاما - مینیماکس[۵] در توزیع پواسن، وقتی که فضای پارامتر محدود به فاصله $\theta \in [0, \beta]$ است را به‌دست آوردند. همچنین اوسو و استرادرمان (۲۰۰۲) توزیع متقارن کروی را با محدودیت روی مخروط‌ها مورد بررسی قرار دادند و در همین راستا فودینیر و همکاران (۲۰۰۳) در توزیع متقارن کروی با در نظر گرفتن سه محدودیت بر روی فضای پارامتر مطالعاتی انجام دادند.

در زمینه مدل‌های محدود شده مارچاند و استرادرمان (۲۰۰۵) برای خانواده مکان با در نظر گرفتن محدودیتی به‌صورت $\theta > a$ کار را ادامه دادند. همچنین

۱ Best Equivariant Estimator

۲ Maximum Likelihood Estimator

۳ Best Linear Unbiased Estimator

۴ Scale mixture of normal distribution

۵ Γ - minimax

مارچاند و پرون (۲۰۰۵) نتایج را برای توزیع‌های متقارن کروی تحت محدودیت

$$\Theta(m) = \{\theta \in R^p : ||\theta|| \leq \theta : m > 0\}$$

به‌دست آوردند. مارچاند و پارسیان (۲۰۰۶)، محدودیت به شکل $\theta \in [0, m]$ را برای کلاس وسیعی از مدل‌های گسسته در نظر گرفتند. در ادامه فودینیر و همکاران (۲۰۰۶) و فودینیر و مارچاند (۲۰۱۰) برای توزیع‌های متقارن کروی پارامتر مکان را با نوع دیگری از محدودیت‌ها برآورد نمودند. مارچاند و استرادرمن (۲۰۱۲) رهیافت واحدی را برای برآورد مینیماکس در فضای پارامتر محدود شده ارائه داده‌اند. در نهایت کورتبی و مارچاند (۲۰۱۲) برآوردگر خطی بریده شده[۶] با محدودیت $||\theta|| < m$ در توزیع نرمال چند متغیره را ارائه کرده و رفتار آن را مورد بررسی قرار دادند.

در اغلب پدیده‌های طبیعی، با توجه به شرایط خاص طبیعت، ممکن است محدودیت‌هایی روی صفت‌ها و مشخصه‌های متغیر گذاشته شود که این مورد، موجب تخمین این مشخصه‌ها در مدل‌های محدودشده می‌شود. برای مثال در یک فرآیند تولید لامپ، متوسط طول عمر همواره عددی مثبت است، بنابراین برای تخمین طول عمر، باید محدودیت مثبت بودن، به مدل مورد بررسی اضافه شود. لازم به ذکر است چنانچه از توزیع گاما برای مدل‌سازی طول عمر لامپ‌ها استفاده شود، محدودیت مثبت بودن در ذات تکیه‌گاه و فضای پارامتر توزیع گاما است. ولی چنانچه از توزیع نرمال (بنابه اطلاعات نمونه) استفاده شود، باید حتما محدودیت مثبت بودن بر روی برآوردگر پارامتر مکان اعمال شود.

بنابراین برآورد پارامتر محدودشده، رده‌ای وسیع از مثال‌های کاربردی را شامل می‌شود. چراکه در اغلب این مثال‌ها محدودیت‌هایی وجود دارد که توسط محقق اتخاذ می‌شود. مقاله حاضر تعمیمی برای مقاله فودینیر و همکاران (۲۰۰۳) در حالت توزیع نرمال چندمتغیره با تغییر نوع برآوردگر و تابع زیان است.

---
۶ Truncated linear estimator

۲ پیش نیازها

فرض کنید بردار تصادفی p بعدی X دارای توزیع نرمال چند متغیره $N_p(\theta, \sigma^2 I_p)$ با پارامتر مکان θ و مقیاس $\sigma^2 I_p$ باشد، که در آن σ^2 نامعلوم است.
هدف برآورد بردار $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_p)$ تحت تابع زیان توان دوم زیر است.

$$L(\theta, \delta) = \frac{1}{\sigma^2}(\delta - \theta)^T(\delta - \theta) = \frac{1}{\sigma^2}\|\delta - \theta\|^2. \quad (1)$$

در سراسر مقاله منظور از T ترانهاده بردار یا ماتریس است. در مرحله بعد با استفاده از تابع زیان توان دوم (۱)، تابع مخاطره به‌صورت $R(\theta, \delta) = E_\theta[L(\theta, \delta)]$ محاسبه می‌شود.

در این مقاله هدف برآورد پارامتر تحت دو محدودیت زیر می‌باشد.

۱. مولفه θ_i، $i = 1, \ldots, p$ در بردار پارامتر θ نامنفی است.

۲. تنها زیر مجموعه‌ای از θ_i ها نامنفی هستند.

تعریف ۱ : (لهمن و کسلا، ۱۹۹۸) تابع $p_{\theta+\Delta}(x)/p_\theta(x)$ در θ مشتق‌پذیر ضعیف[7] است اگر تابع اندازه‌پذیر q، به‌ازای هر $h(\cdot)$ با شرط $\int h^2(x)p_\theta(x)d\mu(x) < \infty$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که

$$\lim_{\Delta \to 0} \int h(x)\{[\Delta^{-1}(\frac{p_{\theta+\Delta}(x)}{p_\theta(x)} - 1)] - q(x)\}p_\theta(x)d\mu(x) = 0.$$

در واقع شرط لازم و کافی برای مشتق‌پذیر ضعیف بودن معادل است با وجود تابع $q_\theta(x)$ طوری که $(\partial/\partial\theta)E_\theta\delta = E\delta q$، که در آن δ یک آماره دلخواه است طوری که $E_\theta(|\delta|^2) < \infty$.

تعریف ۲ : (لهمن و کسلا، ۱۹۹۸) اگر تابع $f : R^p \to R$ دارای مشتق دوم باشد، آن‌گاه f در R^p زبرهمساز[8] است اگر و تنها اگر به‌ازای هر $x = (x_1, \ldots, x_p) \in R^p$، داشته باشیم

$$\sum_{i=1}^{p} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} f(x) \leq 0.$$

[7] Weakly differentiable function

[8] Superharmonic function

لم ۱ : (فودینیر و همکاران، ۲۰۰۳) اگر r تابع نامنفی، مقعر و مشتق‌پذیر باشد، آن‌گاه r روی R_+ نانزولی است و تابع $t \to \frac{r(t)}{t}$ روی R_+ ناصعودی است. به‌علاوه اگر r دارای مشتق دوم باشد، آن‌گاه تابع $x \to \frac{r(\|x\|)^{۲}}{(\|x\|^{۲})}$ برای $p \geq ۴$ زبرهمساز است.

لم ۲ : فرض کنید X یک متغیر تصادفی حقیقی مقدار با توزیع متقارن تک‌مدی برای $\theta \in R_+$ و $\sigma^۲ \geq ۰$ باشد. اگر f تابع نامنفی روی R_+ باشد، آن‌گاه

$$E_\theta[f(X^۲)\frac{X^۲}{\sigma^۲}I_{[X<۰]}] \leq \frac{۱}{۲}E_\theta[\frac{(X-\theta)^۲}{\sigma^۲}f(X^۲)]$$

برهان : چون توزیع X متقارن تک‌مدی است، می‌توان چگالی آن را به فرم $g(X-\theta)^۲$ در نظر گرفت، که در آن g یک تابع ناصعودی است. بنابراین

$$\begin{aligned}
E & \{\frac{f(X^۲)}{\sigma^۲}[X^۲I_{[X<۰]} - \frac{۱}{۲}(X^۲+\theta^۲-۲\theta X)]\} \\
= & E\{\frac{f(X^۲)}{\sigma^۲}[(\frac{۱}{۲}X^۲+\theta X-\frac{۱}{۲}\theta^۲)I_{[X<۰]} \\
& -(\frac{۱}{۲}X^۲-\theta X+\frac{۱}{۲}\theta^۲)I_{[X\geq۰]}]\} \\
= & E[\frac{f(X^۲)}{\sigma^۲}(\frac{۱}{۲}X^۲+\theta X-\frac{۱}{۲}\theta^۲)I_{[X<۰]}||X|] \\
& -E[\frac{f(X^۲)}{\sigma^۲}(\frac{۱}{۲}X^۲-\theta X+\frac{۱}{۲}\theta^۲)I_{[X\geq۰]}||X|] \\
= & \int_{I_{[\frac{۱}{۲}x^۲-\theta|x|-\frac{۱}{۲}\theta^۲>۰]}} \frac{f(x^۲)}{\sigma^۲}(\frac{۱}{۲}x^۲-\theta|x|-\frac{۱}{۲}\theta^۲)g((-|x|-\theta)^۲)dx \\
& -\int_{I_{[\frac{۱}{۲}x^۲-\theta|x|-\frac{۱}{۲}\theta^۲>۰]}} \frac{f(x^۲)}{\sigma^۲}(\frac{۱}{۲}x^۲-\theta|x|+\frac{۱}{۲}\theta^۲)g((|x|-\theta)^۲)dx \quad (۲)
\end{aligned}$$

از طرف دیگر همواره به‌ازای هر $\theta > ۰$ داریم

$$(-|X|-\theta)^۲ \geq (|X|-\theta)^۲$$

چون $g(\cdot)$ ناصعودی است، می‌توان نوشت

$$g((-|X|-\theta)^۲) \leq g((|X|-\theta)^۲)$$

از این‌رو کران بالای رابطه (۲) به‌صورت زیر است.

$$\int_{I_{[\frac{1}{2}x^2-\theta|x|-\frac{1}{2}\theta^2>0]}} \frac{f(x^2)}{\sigma^2}(\frac{1}{2}x^2-\theta|x|-\frac{1}{2}\theta^2)g((|x|-\theta)^2)dx$$
$$-\int_{I_{[\frac{1}{2}x^2-\theta|x|-\frac{1}{2}\theta^2>0]}} \frac{f(x^2)}{\sigma^2}(\frac{1}{2}x^2+\theta|x|+\frac{1}{2}\theta^2)g((|x|-\theta)^2)dx$$
$$=\int_{I_{[\frac{1}{2}x^2-\theta|x|-\frac{1}{2}\theta^2>0]}} \frac{f(x^2)}{\sigma^2}(-\theta^2)g((|x|-\theta)^2))dx \qquad (3)$$

چون $f(\cdot)$ تابعی نامنفی، $g(\cdot)$ تابعی ناصعودی و کران انتگرال مثبت است، به علت ضریب منفی θ^2، در رابطه (۳) داریم

$$\int_{I_{[\frac{1}{2}x^2-\theta|x|-\frac{1}{2}\theta^2>0]}} \frac{f(x^2)}{\sigma^2}(-\theta^2)g((|x|-\theta)^2))dx$$
$$=E[f(X^2)I_{[\frac{1}{2}X^2-\theta|X|-\frac{1}{2}\theta^2>0]}(-\theta^2)]\leq 0$$

اثبات کامل است.

لم ۳ : (پلسیس، ۱۹۷۰) اگر g یک تابع زبرهمساز روی R^p و z یک متغیر تصادفی با توزیع یکنواخت روی کره به مرکز مبدا و شعاع τ باشد، آن‌گاه به ازای هر $\theta\in R^2$ امیدریاضی $E[(g+Z)]$ تابعی ناصعودی از τ است.

لم ۴ : (میرهد، ۱۹۸۲) فرض کنید X دارای توزیع $N_p(\theta,\sigma^2 I_p)$، که در آن σ^2 معلوم است، آنگاه

$$\frac{(X-\theta)^T(X-\theta)}{\sigma^2}\sim\chi_p^2.$$

لم ۵ : (استاین، ۱۹۸۱) اگر بردار X دارای توزیع نرمال استاندارد باشد، آن‌گاه به ازای تمام توابع پیوسته $g:R\to R$ که $E|g'|<\infty$، داریم

$$E[g'(X)]=E[Xg(X)].$$

برعکس، اگر رابطه بالا به ازای همه توابع g کراندار، پیوسته و قطعه قطعه مشتق‌پذیر و $E|g'|<\infty$ برقرار باشد، آن‌گاه X دارای توزیع نرمال استاندارد است.

لم ۶ : (تعمیم لم استاین، ۱۹۸۱) فرض کنید $X \sim N_p(\theta, \sigma^2 I_p)$، که در آن σ^2 معلوم است، اگر $g : R^p \to R^p$، آن‌گاه

$$E[(X-\theta)^T g(X)] = \sigma^2 E[\nabla \cdot g(X)].$$

۳ رده برآوردگر انقباضی

برآوردگر انقباضی برآوردگری است که به‌طور واضح یا مجازی در اثر انقباض به‌دست آید. به عبارت دیگر از ترکیب اطلاعات نمونه‌ای یعنی برآوردگر خام یا اولیه (MLE، برآوردگر کمترین توان‌های دوم، بیز و غیره) با اطلاعات غیر نمونه‌ای که معمولاً در غالب یک یا چند محدودیت به مدل اضافه می‌شوند، به‌صورت برآوردگری جدید بهبود می‌یابد. این بهبود در جهت مقادیری است که از اطلاعات دیگر به دست آمده نه در جهت برآوردگر اولیه.
برآوردگر طبیعی [۹] θ به‌صورت

$$\delta_0(X) = (\delta_{01}, \ldots, \delta_{0p}),$$

نشان داده می‌شود، که در آن

$$\delta_{0i}(X) = \max(X_i, 0), \quad i = 1, \ldots, p.$$

واضح است که برآوردگر طبیعی را می‌توان به‌صورت

$$\delta_0(X) = X + \gamma(X).$$

نیز نشان داد، که در آن $\gamma(X) = (\gamma_1(X), \ldots, \gamma_p(X))$ و هر مولفه آن عبارت است از

$$\gamma_i(X) = \begin{cases} -X_i, & X_i < 0, \\ 0, & X_i \geq 0. \end{cases}$$

۹ Natural estimator

حال رده‌ای از برآوردگرهای انقباضی به‌صورت

$$\delta(X) = \delta_\circ(X) + g(X,S) = X + \gamma(X) + g(X,S). \qquad (۴)$$

را در نظر بگیرید، که در آن $g : R^p \to R^p$ تابعی حقیقی با خواصی است که در ادامه به آن اشاره می‌شود. ابتدا تفاضل مخاطره به‌صورت

$$\begin{aligned} \Delta R(\theta) &= R(\theta,\delta) - R(\theta,\delta_\circ) \\ &= E_\theta[\frac{\|\delta-\theta\|^۲}{\sigma^۲} - \frac{\|\delta_\circ-\theta\|^۲}{\sigma^۲}] \\ &= \frac{۱}{\sigma^۲}E_\theta[\|g(X,S)\|^۲ + ۲(g(X,S))^T(X-\theta) \\ &\quad + ۲(g(X,S))^T\gamma(X)]. \end{aligned} \qquad (۵)$$

محاسبه می‌شود، که برای متناهی بودن، باید $E_\theta[\|X\|^۲] < \infty$ و $E_\theta[\|g\|^۲] < \infty$ برقرار باشند. بنابراین با استفاده از لم ۶ در حالتی که $\sigma^۲$ معلوم است داریم

$$\Delta R(\theta) = \frac{۱}{\sigma^۲}E_\theta[\|g(X,S)\|^۲ + ۲\sigma^۲\nabla\cdot g(X,S) + ۲g(X,S)^T\gamma(X)]. \qquad (۶)$$

در مرحله بعد برای حالتی که تنها زیر مجموعه‌ای از θ_iها دارای محدودیت نامنفی بودن باشند، فرض کنید که q تا از θ_iها نامنفی باشند. به عبارتی $\theta_۱ \geq \circ, \theta_۲ \geq \circ, \ldots, \theta_q \geq \circ$ و $\theta_{q+۱},\ldots,\theta_p$ هیچ محدودیتی نداشته باشند. آن‌گاه مشابه قبل برآوردگر طبیعی را به‌صورت

$$\delta_\circ^q(X) = X + \gamma_q(X).$$

در نظر گرفته می‌شود. که در آن

$$\gamma_{q,j}(X) = \begin{cases} -X_j, & X_j < \circ, \\ \circ, & X_j \geq \circ. \end{cases}$$

و

$$\gamma_{q,j}(X) = \circ \quad if \quad j > q.$$

حال ردهٔ برآوردگرهای انقباضی به‌صورت

$$\delta^q(X,U) = X + \gamma_q(X) + g(X,S). \qquad (۷)$$

در نظر گرفته می‌شود و مشابه قبل تفاضل مخاطره به‌صورت

$$\begin{aligned} \Delta R(\theta) &= R(\theta,\delta^q) - R(\theta,\delta^q_0) \\ &= \frac{1}{\sigma^2} E_\theta[\|g(X,S)\|^2 + 2(g(X,S))^T(X-\theta) \\ &\quad + 2(g(X,S))^T\gamma_q(X)]. \end{aligned} \qquad (۸)$$

محاسبه می‌شود.

۴ شرایط برتری ردهٔ برآوردگرهای انقباضی بر برآوردگر مینیماکس

هدف این بخش اثبات برتری برآوردگر انقباضی بر برآوردگر مینیماکس X است (برای بررسی مینیماکس بودن X سیلواپول و سن، ۲۰۰۵ را ببینید). به این معنی که مخاطره هر عضو کلاس برآوردگرهای انقباضی کمتر از مخاطره $\delta_0(X)$ باشد. ابتدا فرض کنید S^2 برآوردگر نااریب σ^2 بوده که از X مستقل است. به‌ازای مقدار ثابت c، مشابه با بارانچیک (۱۹۷۰) تابع

$$g(X,S) = -\frac{cr(F)}{F}X, \qquad F = \frac{\|X\|^2}{S^2}$$

را در نظر بگیرید، که در آن تابع $r : R_+ \to [0,1]$ دارای مشتق دوم و مقعراست. با در نظر گرفتن محدودیت این که تمام مولفه‌های θ_i $(i = 1,\ldots,p)$ نامنفی باشند، قضیه زیر را داریم.

قضیه ۱ : فرض کنید $p \geq 4$ و X دارای توزیع $N_p(\theta,\sigma^2 I_p)$ با σ^2 نامعلوم است و S^2 برآوردگر نااریب σ^2 و مستقل از X باشد. برآوردگر انقباضی $\delta(X)$ به فرم (۴) به‌ازای هر $\theta \in R^p_+$ بر برآوردگر معمولی $\delta_0(X) = X + \gamma(X)$ برتری دارد اگر شرط زیر برقرار باشد.

$$0 < c \leq \frac{2E_{\sigma=1}(S^2)(p-2)}{E_{\sigma=1}(S^4)} - \frac{pE_{\sigma=1}(S^2)}{E_{\sigma=1}(S^4)}.$$

برهان : با استفاده از رابطه (۵) با جایگذاری مقدار $g(X,S)$ داریم

$$\begin{aligned}\Delta R(\theta) &= \frac{1}{\sigma^2}E_\theta[\|g(X,S)\|^2 + 2(g(X,S))^T(X-\theta) \\ &\quad +2(g(X,S))^T\gamma(X)] \\ &= \frac{1}{\sigma^2}E_\theta[\| - \frac{cr(\frac{\|X\|^2}{S^2})}{\frac{\|X\|^2}{S^2}}X\|^2 + 2(-\frac{cr(\frac{\|X\|^2}{S^2})}{\frac{\|X\|^2}{S^2}}X)^T(X-\theta) \\ &\quad +2(-\frac{cr(\frac{\|X\|^2}{S^2})}{\frac{\|X\|^2}{S^2}}X)^T\gamma(X)]. \qquad (9)\end{aligned}$$

با شرطی کردن روی ($S^2 = s^2$) و با استفاده از تعمیم لم استاین در رابطه (۶)، تفاضل مخاطره (۹) برابر است با

$$\begin{aligned}\Delta R(\theta) &= \frac{1}{\sigma^2}E_\theta[\|g(X,S)\|^2 + 2\sigma^2\nabla\cdot g(X,S) + 2g(X,S)^T\gamma(X)] \\ &= \frac{1}{\sigma^2}E_{S^2}\{E_\theta[c^2\frac{r^2(\frac{\|X\|^2}{S^2})S^4}{\|X\|^4}\|X\|^2 + 2c\frac{r(\frac{\|X\|^2}{S^2})S^2}{\|X\|^2}\sum_{i=1}^{p}X_i^2 I_{[X_i\leq 0]} \\ &\quad -2c(\frac{2r'(\frac{\|X\|^2}{S^2})\frac{\|X\|^4}{S^4} + pr(\frac{\|X\|^2}{S^2})\frac{\|X\|^2}{S^2} - 2r(\frac{\|X\|^2}{S^2})\frac{\|X\|^2}{S^2}}{\frac{\|X\|^4}{S^4}})]|S=s\} \\ &= \frac{1}{\sigma^2}E_{S^2}\{E_\theta[c^2\frac{r^2(\frac{\|X\|^2}{S^2})S^4}{\|X\|^2} + 2c\frac{r(\frac{\|X\|^2}{S^2})S^2}{\|X\|^2}\sum_{i=1}^{p}X_i^2 I_{[X_i\leq 0]} \\ &\quad -2c(p-2)\frac{r(\frac{\|X\|^2}{S^2})S^2}{\|X\|^2} - 4cr'(\frac{\|X\|^2}{S^2})]|S=s\} \\ &\leq \frac{1}{\sigma^2}E_{S^2}\{E_\theta[c\frac{r(\frac{\|X\|^2}{S^2})}{\|X\|^2}(cr(\frac{\|X\|^2}{S^2})S^4 - 2S^2(p-2) \\ &\quad +2S^2\sum_{i=1}^{p}X_i^2 I_{[X_i\leq 0]})]|S=s\}. \qquad (10)\end{aligned}$$

بنابر لم ۱، که در آن $r'(\cdot) \geq 0$ و با توجه به فرض مقعر و دارای مشتق دوم بودن r، یک کران بالا برای تفاضل مخاطره (۱۰) عبارت است از

$$\Delta R(\theta) = \frac{1}{\sigma^2}E_{S^2}\{E_\theta[c\frac{r(\frac{\|X\|^2}{S^2})}{\|X\|^2}(cS^4 - 2S^2(p-2)$$

$$+\text{۲}S^{\text{۲}}\sum_{i=\text{۱}}^{p}X_i^{\text{۲}}I_{[X_i\leq \circ]})]|S=s\}. \qquad (\text{۱۱})$$

لازم به ذکر است از این حقیقت که مقدار ماکسیمم $r(\|X\|^{\text{۲}})$ برابر با ۱ است، در رابطه (۱۱) استفاده شده است. در این قسمت مشابه استدلال فودینیر و همکاران (۲۰۰۳) در رابطه (۱۱) ابتدا برای i معین جمله

$$(\frac{r(\frac{\|X\|^{\text{۲}}}{S^{\text{۲}}})}{\|X\|^{\text{۲}}}S^{\text{۲}})(\sum_{i=\text{۱}}^{p}X_i^{\text{۲}}I_{[X_i\leq\circ]})$$

در نظر گرفته می‌شود و درباره امید ریاضی شرطی روی $(X_j-\theta_j)^{\text{۲}}$ به ازای $j\neq i$ بحث می‌شود.

چون r نامنفی، مقعر و مشتق‌پذیر است و با استفاده از لم ۱، $\frac{r(\frac{\|X\|^{\text{۲}}}{S^{\text{۲}}})}{\|X\|^{\text{۲}}}S^{\text{۲}}$ در $\frac{\|X\|^{\text{۲}}}{S^{\text{۲}}}$ ناصعودی است. به‌علاوه توزیع شرطی X_i بر روی $(X_j-\theta_j)^{\text{۲}}$ به‌ازای $j\neq i$، متقارن و تک‌مدی برای θ_i است. با در نظر گرفتن $Z=\sigma^{-\text{۱}}(X-\theta)$ و با استفاده از لم ۲ داریم

$$\begin{aligned}&cE[\frac{r(\frac{\|X\|^{\text{۲}}}{S^{\text{۲}}})}{\frac{\|X\|^{\text{۲}}}{S^{\text{۲}}}}\frac{X_i^{\text{۲}}}{\sigma^{\text{۲}}}I_{[X_i\leq\circ]}|\frac{(X_j-\theta_j)^{\text{۲}}}{\sigma^{\text{۲}}}=Z_j^{\text{۲}},j\neq i]\\ &\leq\frac{c}{\text{۲}}E[\frac{r(\frac{\|X\|^{\text{۲}}}{S^{\text{۲}}})}{\frac{\|X\|^{\text{۲}}}{S^{\text{۲}}}}\frac{Z_i^{\text{۲}}}{\sigma^{\text{۲}}}|\frac{(X_j-\theta_j)^{\text{۲}}}{\sigma^{\text{۲}}}=Z_j^{\text{۲}},j\neq i].\end{aligned}$$

بنابراین تفاضل مخاطره در (۱۱) دارای کران بالای به‌صورت

$$\frac{\text{۱}}{\sigma^{\text{۲}}}E_{S^{\text{۲}}}\{E_\theta[c\frac{r(\frac{\|\sigma Z+\theta\|^{\text{۲}}}{S^{\text{۲}}})}{\|\sigma Z+\theta\|^{\text{۲}}}(cS^{\text{۴}}-\text{۲}S^{\text{۲}}(p-\text{۲})+S^{\text{۲}}Z^TZ)]|S=s\} \qquad (\text{۱۲})$$

است. حال با قرار دادن $\sigma=\text{۱}$ و شرطی کردن روی Z^TZ، عبارت شرطی (۱۲) دارای کران بالای زیر است.

$$\begin{aligned}cE\quad&[E(\frac{r(\frac{\|Z+\theta\|^{\text{۲}}}{s^{\text{۲}}})}{\|Z+\theta\|^{\text{۲}}}|Z^TZ)(cs^{\text{۴}}-\text{۲}s^{\text{۲}}(p-\text{۲})+s^{\text{۲}}Z^TZ)|Z^TZ]\\ \leq\quad&cE[E(\frac{r(\frac{\|Z+\theta\|^{\text{۲}}}{s^{\text{۲}}})}{\|Z+\theta\|^{\text{۲}}}|Z^TZ)]\\ &\times E[cs^{\text{۴}}-\text{۲}s^{\text{۲}}(p-\text{۲})+s^{\text{۲}}Z^TZ|Z^TZ]. \qquad (\text{۱۳})\end{aligned}$$

با استفاده از لم ۱ واضح است که $\frac{r(\|X\|^{2}/S^{2})}{\|X\|^{2}/S^{2}}$ برای $p \geq 4$، زبرهمساز و در نتیجه بنابر تعریف ۲ نامثبت است. از آن‌جایی که توزیع Z نرمال بوده و حالتی از توزیع متقارن کروی است، $E[r(\frac{\|Z+\theta\|^{2}}{s^{2}})/||Z+\theta||^{2}]$ با استفاده از لم ۳ در Z^TZ ناصعودی است. از این‌رو تنها کافیست نشان داده شود دومین امید ریاضی شرطی در (۱۳) نامثبت است. بنابر لم ۴، Z^TZ دارای توزیع χ^2_p بوده و از این‌رو $E[Z^TZ] = p$. در این صورت تفاضل مخاطره شرطی ΔR نامثبت است اگر

$$cE_{\sigma=1}(S^{4}) - 2E_{\sigma=1}(S^{2})(p-2) + pE_{\sigma=1}(S^{2}) \leq 0$$

بنابراین

$$c \leq \frac{2E_{\sigma=1}(S^{2})(p-2)}{E_{\sigma=1}(S^{4})} - \frac{pE_{\sigma=1}(S^{2})}{E_{\sigma=1}(S^{4})}$$

و در نتیجه

$$0 < c \leq \frac{2E_{\sigma=1}(S^{2})(p-2)}{E_{\sigma=1}(S^{4})} - \frac{pE_{\sigma=1}(S^{2})}{E_{\sigma=1}(S^{4})}$$

اثبات کامل است.

قضیه ۲ : فرض کنید $p \geq q \geq 4$ و X دارای توزیع $N_p(\theta, \sigma^{2}I_p)$ با σ^{2} نامعلوم است. همچنین فرض کنید S^{2} برآوردگر نااریب σ^{2} و مستقل از X باشد. برآوردگر انقباضی $\delta(X)$ به شکل (۷) به‌ازای هر $\theta \in R^q_+$ بر برآوردگر معمولی $\delta^q_0(X) = X + \gamma_q(X)$ برتری دارد اگر شرط زیر برقرار باشد.

$$0 < c \leq \frac{2E_{\sigma=1}(S^{2})(p-2)}{E_{\sigma=1}(S^{4})} - \frac{qE_{\sigma=1}(S^{2})}{E_{\sigma=1}(S^{4})}.$$

برهان : با استفاده از روابط (۸) و (۹) با شرطی کردن روی $(S^{2} = s^{2})$ و با استفاده از تعمیم لم استاین در رابطه (۶)، مشابه با قضیه ۱ و رابطه (۱۰) و با اندکی تغییر در کران عبارت مجموع، تفاضل مخاطره برابر است با

$$\Delta R(\theta) = \frac{1}{\sigma^{2}}E_\theta[\|g(X,S)\|^{2} + 2\sigma^{2}\nabla\cdot g(X,S) + 2g(X,S)^T\gamma(X)]$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sigma^2}E_{S^2}[E_\theta(c^2\frac{r^2(\frac{\|X\|^2}{S^2})S^4}{\|X\|^2}+2c\frac{r(\frac{\|X\|^2}{S^2})S^2}{\|X\|^2}\sum_{i=1}^{q}X_i^2 I_{[X_i\leq 0]}\\
&\quad -2c(p-2)\frac{r(\frac{\|X\|^2}{S^2})S^2}{\|X\|^2}-4cr'(\frac{\|X\|^2}{S^2}))|S=s]\\
&\leq \frac{1}{\sigma^2}E_{S^2}\{E_\theta[c\frac{r(\frac{\|X\|^2}{S^2})}{\|X\|^2}(cr(\frac{\|X\|^2}{S^2})S^4-2S^2(p-2)\\
&\quad +2S^2\sum_{i=1}^{q}X_i^2 I_{[X_i\leq 0]})]|S=s\}. \qquad (14)
\end{aligned}$$

مشابه با قضیه ۱ و با استفاده از لم ۱ که در آن $r'(\cdot) \geq 0$ و با توجه به این‌که r مقعر و دارای مشتق دوم است، با قرار دادن مقدار ماکسیمم $r(\frac{\|X\|^2}{S^2})$ که بنابر فرض برابر با ۱ است، یک کران بالا برای تفاضل مخاطره (۱۴) عبارت است از

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\sigma^2}E_{S^2}\{E_\theta[c\frac{r(\frac{\|X\|^2}{S^2})}{\|X\|^2}(cS^4-2S^2(p-2)\\
&\quad +2S^2\sum_{i=1}^{p}X_i^2 I_{[X_i\leq 0]})]|S=s\}. \qquad (15)
\end{aligned}$$

در ادامه با فرض $Z=\sigma^{-1}(X-\theta)$، مجدداً فرض می‌شود

$$\begin{aligned}
&V=(Z_1,\ldots,Z_q), T=(Z_{q+1},\ldots,Z_p),\\
&\eta=(\theta_1,\ldots,\theta_q), \mu=(\theta_{q+1},\ldots,\theta_p).
\end{aligned}$$

در نتیجه داریم

$$V=\sigma^{-1}(X-\eta), T=\sigma^{-1}(X-\mu).$$

بنابراین می‌توان نوشت

$$X_1^q=\sigma V+\eta, X_{q+1}^p=\sigma T+\mu.$$

به‌علاوه با قراردادن $\sigma = 1$ داریم $\|X\|^2=\|X_1^q\|^2+\|X_{q+1}^p\|^2$. با استفاده از لم ۲ می‌توان تفاضل مخاطره در (۱۵) را به‌صورت

$$E_{S^2}\{E_\theta[c\frac{r(\frac{\|X_1^q\|^2+\|X_{q+1}^p\|^2}{S^2})}{\|X_1^q\|^2+\|X_{q+1}^p\|^2}(cS^4-2S^2(p-2)+S^2V^TV)]|S=s\}$$

کراندار کرد، که با شرطی کردن آن بر حسب V^TV و T داریم

$$\begin{aligned}
&cE_\theta[\frac{r(\frac{\|X_1^q\|^2+\|X_{q+1}^p\|^2}{s^2})}{\|X_1^q\|^2+\|X_{q+1}^p\|^2}(cs^4-2s^2(p-2)+s^2V^TV)|V^TV,T]\\
&\le cE_\theta[\frac{r(\frac{\|X_1^q\|^2+\|X_{q+1}^p\|^2}{s^2})}{\|X_1^q\|^2+\|X_{q+1}^p\|^2}|V^TV,T]\\
&\times E[(cs^4-2s^2(p-2)+s^2V^TV)|V^TV,T]. \qquad (16)
\end{aligned}$$

با استفاده از لم ۱ و فرضیات داریم $r(\|X_1^q\|^2+\|X_{q+1}^p\|^2/s^2)$ برای $p \ge 4$ زبرهمساز و در نتیجه بنابر تعریف ۲ نامثبت است. با در نظر گرفتن V^TV، از آن‌جایی که توزیع V نرمال بوده و توزیع متقارن کروی است، عبارت

$$E_\theta[\frac{r(\frac{\|X_1^q\|^2+\|X_{q+1}^p\|^2}{s^2})}{\|X_1^q\|^2+\|X_{q+1}^p\|^2}|V^TV,T]$$

با استفاده از لم ۳ در V^TV ناصعودی است. بنابراین مشابه قضیه ۱ تنها کافیست نشان داده شود دومین امید ریاضی شرطی در (۱۶) نامثبت است. V^TV بنابر لم ۴ دارای توزیع χ_q^2 است. بنابراین $E[V^TV]=q$. در این صورت تفاضل مخاطره شرطی ΔR نامثبت است اگر

$$cE_{\sigma=1}(S^4)-2E_{\sigma=1}(S^2)(p-2)+qE_{\sigma=1}(S^2)\le 0$$

بنابراین

$$c\le \frac{2E_{\sigma=1}(S^2)(p-2)}{E_{\sigma=1}(S^4)}-\frac{qE_{\sigma=1}(S^2)}{E_{\sigma=1}(S^4)}$$

و در نتیجه

$$0<c\le \frac{2E_{\sigma=1}(S^2)(p-2)}{E_{\sigma=1}(S^4)}-\frac{qE_{\sigma=1}(S^2)}{E_{\sigma=1}(S^4)}$$

اثبات کامل است.

تذکر ۱ : چون $q\le p$ داریم

$$\frac{2E_{\sigma=1}(S^2)(p-2)}{E_{\sigma=1}(S^4)}-\frac{qE_{\sigma=1}(S^2)}{E_{\sigma=1}(S^4)}>\frac{2E_{\sigma=1}(S^2)(p-2)}{E_{\sigma=1}(S^4)}-\frac{pE_{\sigma=1}(S^2)}{E_{\sigma=1}(S^4)}.$$

بنابراین قضیه ۱ حالت خاصی از قضیه ۲ است.

بحث و نتیجه‌گیری

در این مقاله رده‌ای از برآوردگرهای انقباضی برای پارامتر مکان در توزیع نرمال چندمتغیره با میانگین و واریانس مجهول معرفی شد. در این خصوص نتایجی ارائه گردید که هر عضو رده فوق در فضای پارامتر محدود، دارای مخاطره کمتری نسبت به برآوردگر مینیماکس مکان بود. نتایج این مقاله از دو منظر قابل اهمیت است. اول این‌که رده برآوردگرهای نوع بارانچیک (۱۹۷۰) به حالت فضای پارامتر محدود تعمیم داده شده و دوم این‌که کلاس برآوردگرهای انقباضی ارائه شده توسط فودینیر و همکاران (۲۰۰۳) در توزیع نرمال به حالت وارایانس نامعلوم گسترش داده شده است. در پایان به عنوان تحقیقی بیشتر می‌توان نتایج آرشی و طباطبایی (۲۰۱۰) را به حالت فضای پارامتر محدود تعمیم داد.

تقدیر و تشکر

نویسندگان مقاله از نظرات و پیشنهادات داوران محترم و هیئت تحریریه مجله علوم آماری که باعث ارتقای کیفی مقاله شد، کمال تشکر و قدردانی را دارند.

مراجع

Arashi, M. and Tabatabaey, S. M. M. (2010), A Note on Classical Stein-Type Estimators in Elliptically Contoured Models, *Journal of Statistical Planning and Inference*, **140**, 1206-1213.

Bickel, P. J. (1981), Minimax Estimation of the Mean of a Normal Distribution when the Parameter Space is Restrictead, *Annals of Statistics*, **6**, 1301-1309.

Baranchik, A. J. (1970), A Family of Minimax Estimation of the Mean of a Multivariate Normal Distribution, *The Annals of Mathematical*

Statistics, **41**, 642-645.

Casella, G. and Strawderman, W. (1981), Estimating a Bounded Normal Mean, *Annals of Statistics*, **9**, 870-878.

Du Plessis, N. (1970), *An Introduction to Potential Theory*, Oliver and Boyd, Edinburgh, UK.

Fourdrinier,D. and Ouassou, I. (2000), Estimation of the Mean of a Spherically Symmetric Distribution with Constraints on the Norm, *Canadian Journal of Statistic*, **28**, 399-415.

Fourdrinier, D., Ouassou, I. and Strawderman, W. (2003), Estimation of a Parameter Vector when some Component are Restricted, *Journal of Multivariate Analysis*, **86**, 14-27.

Fourdrinier, D., Strawderman, W. and Wells, M. T. (2006), Estimation of a Location Parameter with Restrictions or Vague Information for Spherically Symmetric Distribution, *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, **58**, 73-92.

Fourdrinier, D. and Marchand, E. (2010), On Bayes Estimators with Uniform Priors on Spheres and their Comparative Performance with Maximum Likelihood Estimators for Estimating Bounded Multivariate Normal Means, *Journal of Multivariate Analysis*, **101**, 1390-1399.

Gatsonis, C., MacGibbon, B. and Strawderman, W. (1987), On the Estimation of a Restricted Normal Mean, *Statistics and Probability Letters*, **6**, 21-30.

Kortbi, O. and Marchand, E. (2012), Truncated Linear Estimation of a Bounded Multivariate Normal Mean, *Journal of Statistical Planning* *and Inference*, **142**, 2607-2618.

Lehmann, E. L. and Casella, G. (1998), *Theory of Point Estimation*, 2nd Edt., Springer, New York.

Marchand, E. (1993), Estimation of a Multivariate Normal Mean with Constraints on the Norm, *Canadian Journal of Statistic*, **21**, 359-366.

Marchand, E. and Giri, N. (1993), James-Stein Estimation with Constraints on the Norm, *Canadian Journal of Statistic*, **22**, 2903-2924.

Marchand, E. (1994), On the Estimation of th Mean of a $N_p(\mu, \Sigma)$ Population with $\mu'\mu$ known, *Statistics and Probability Letters*, **21**, 69-75.

Marchand, E. and Strawderman, W. (2005), Improving on the Minimum Risk Equivariant Estimator of a Location Parameter which is Constrained to an Interval or a Half - Interval, *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, **57**, 129-15.

Marchand, E. and Perron, F. (2005), Improving on the MLE of a Bounded Location Parameter for Spherical Distributions, *Journal of Multivariate Analysis*, **92**, 547-554.

Marchand, E. and Parsian, A. (2006), Minimax Estimation of a Bounded Parameter of a Discrete Distribution, *Statistics and Probability Letters*, **76**, 547-554.

Marchand, E. and Strawderman, W. (2012), A Unified Minimax Result for Restricted Parameter Spaces, *Bernoulli*, **18**, 635-643.

Muirhead, R. J. (1982), *Aspects of Multivariate Statistical Theory*, John Wiley, New York.

Ouassou, I. and Strawderman, W. E. (2002), Estimation of a Parameter Vector when some Components are Restricted to a Cone, *Statistics and Probability Letters*, **56**, 121-129.

Silvapulle, M. J. and Sen, P. K. (2005), *Constrained Statistical Inference Inequality, Order, and Shape Restrictions*, John Wiley, New Jersey.

Stein, C. M. (1981), Estimation of the Mean of a Multivariate Normal Distribution, *The Annals of Statistics*, **9**, 1135-1151.

Wan, A. T. K., Zou, G. and Lee, A. H. (2000), Minimax and γ- Minimax Estimation for the Poisson Distribution under LINEX Loss when the Parameter Space is Restricted, *Statistics and Probability Letters*, **50**, 23-32.