

مجله علوم آماری، بهار و تابستان ۱۳۹۳

جلد ۸، شماره ۱، ص ۹۳-۱۰۹

## برآورد پارامترهای توزیع بور نوع سوم نمایی تحت داده‌های سانسوریده نوع دوم

نسرین مرادی، عبدالرضا سیاره، هانیه پناهی

گروه آمار، دانشگاه رازی کرمانشاه

تاریخ دریافت: ۱۳۹۳/۲/۹ تاریخ آخرین بازنگری: ۱۳۹۳/۵/۲۰

**چکیده:** در این مقاله پارامترهای توزیع بور نوع سوم نمایی تحت داده‌های سانسوریده نوع دوم با روش ماکسیمم درست‌نمایی با الگوریتم امید میانگین و با رهیافت بیزی با در نظر گرفتن توزیع پیشین گاما و توابع زیان توان دوم خطا، لاینکس و آنتروپی برآورد شده‌اند. از روش نمونه‌گیری از نقاط مهم و تقریب لیندلی برای تقریب برآوردهای بیزی استفاده شده و برآوردگر بیزی حاصل با برآوردگر ماکسیمم درست‌نمایی مقایسه شده است. نتایج به کمک مطالعه شبیه‌سازی و تحلیل داده‌های واقعی مربوط به بیماری سرطان گلبول‌های سفید بررسی شده است. در حالت کلی برآوردگر بیزی بهتر از برآوردگر ماکسیمم درست‌نمایی عمل می‌کند و برآورد پارامترها با افزایش حجم نمونه بهتر می‌شود.

**واژه‌های کلیدی:** الگوریتم EM، تقریب لیندلی، توزیع بور نوع سوم نمایی، سانسور نوع دوم، نمونه‌گیری از نقاط مهم.

آدرس الکترونیک مسئول مقاله: عبدالرضا سیاره، [asayyareh@razi.ac.ir](mailto:asayyareh@razi.ac.ir)  
کد موضوع بندی ریاضی (۲۰۱۰): ۶۲۴۱۰

در بسیاری از مطالعات طول عمر ممکن است آزمایشگر اطلاعات کاملی از زمان های شکست تمام واحدهای آزمایش نداشته باشد. به داده های به دست آمده از چنین آزمایش هایی، داده های سانسوریده گویند. یکی از انواع سانسورها، سانسور نوع دوم است که در آن مطالعه تا رخداد پیشامد مورد نظر، زمان شکست  $r$  مولفه اول،  $X_{(1)}, \dots, X_{(r)}$ ، (برای سادگی آماره ترتیبی به صورت  $X_1, \dots, X_r$  در نظر گرفته شده است) ادامه می یابد.  $r$  یک ثابت از پیش تعیین شده است. در این مورد همه آزمودنی ها به طور هم زمان به آزمون گذاشته می شوند و با رخداد پیشامد مورد نظر برای  $r$  مورد، مطالعه به پایان می رسد. تابع درستیابی تحت داده های سانسوریده نوع دوم<sup>۱</sup> برای تابع چگالی  $h(\cdot)$  و تابع توزیع  $H(\cdot)$  به صورت

$$L(\theta; x) = \frac{n!}{(n-r)!} \prod_{i=1}^r h(x_i) [1 - H(x_r)]^{n-r}$$

است. بور (۱۹۴۲) دوازده نوع توزیع معرفی کرد، که در این میان بر<sup>۲</sup> نوع ۳ و ۱۲ بیشتر مورد توجه قرار گرفتند. توزیع بور یک توزیع احتمال پیوسته برای متغیرهای تصادفی غیر منفی است. توزیع مورد نظر پایه در این مقاله، بور نوع سوم با پارامترهای  $\beta$  و  $\gamma$  به ترتیب دارای تابع توزیع تجمعی و تابع چگالی به صورت

$$G(x | \beta, \gamma) = (1 + x^{-\beta})^{-\gamma}, \quad x > 0, \beta > 0, \gamma > 0$$

$$g(x | \beta, \gamma) = \beta \gamma x^{-\beta-1} (1 + x^{-\beta})^{-\gamma-1}$$

است. در حالت کلی توزیع بور نوع سوم تقریب مناسبی برای بسیاری از توزیع های رایج از جمله لگ نرمال، گاما، وایبل و نمایی است. اضافه کردن یک یا چند پارامتر به توزیع منجر به انعطاف پذیرتر شدن توزیع نسبت به مدل بندی داده ها می شود. اضافه کردن پارامتر به روش نمایی<sup>۳</sup>، اولین بار توسط ورهالست (۱۸۴۵) معرفی شد که تابع توزیع تجمعی لجستیک را به صورت

$$H(x) = [G(x)]^\alpha, \quad x > 0, \alpha > 0$$

<sup>۱</sup> Type II censoring

<sup>۲</sup> Burr

<sup>۳</sup> Exponentiated

به توان مثبتی رساند که در آن تابع توزیع تجمعی پایه است. فرض کنید متغیر تصادفی  $X$  دارای توزیع بور نوع سوم نمایی به ترتیب با تابع توزیع و تابع چگالی

$$H(x) = (1 + x^{-\beta})^{-\alpha\gamma}, \quad x > 0, \quad \alpha, \beta, \gamma > 0$$

$$h(x) = \alpha\beta\gamma x^{-\beta-1}(1 + x^{-\beta})^{-\alpha\gamma-1}$$

باشد. این توزیع نقش بسیار مهمی را در قابلیت اعتماد و کنترل کیفیت ایفا می‌کند. تادیکامالا (۱۹۸۰) به مطالعه انواع توزیع بور و روابط بین توزیع‌ها پرداخت. در سال‌های اخیر بسیاری از محققان به مطالعه و گسترش توزیع بور و خانواده توزیع‌های نمایی پرداختند. از جمله آن می‌توان به پناهی و سیاره (۲۰۱۴)، محمودی و سپهدار (۲۰۱۳)، راستجی و تریپاتی (۲۰۱۳)، عبدالفتاح و همکاران (۲۰۱۲)، فلیح و همکاران (۲۰۱۲)، لیندسی و همکاران (۱۹۹۶)، پایادوپولس (۱۹۷۸)، ونگ و همکاران (۱۹۹۶)، الدیان (۱۹۹۹)، گوپتا و کوندو (۲۰۰۱)، نثار و عیسی (۲۰۰۳ و ۲۰۰۴) اشاره کرد.

هدف این مقاله، برآورد پارامترهای توزیع بور نوع سوم است. چون برآورد ماکسیمم درستنمایی پارامترها به صورت فرم صریحی در نمی‌آید، الگوریتم EM به کار گرفته می‌شود. برای محاسبه برآورد بیزی پارامترها نیز از روش نمونه‌گیری از نقاط مهم<sup>۴</sup> و تقریب لیندلی<sup>۵</sup> استفاده خواهد شد. ابتدا در بخش ۲، برآورد پارامترهای توزیع بور نوع سوم نمایی به روش ماکسیمم درستنمایی و رهیافت بیزی تحت داده‌های سانسوریده نوع دوم به صورت عددی پرداخته شده است. در بخش ۳ عملکرد سه روش به منظور برآورد بهتر پارامترهای توزیع مقایسه شده است. در بخش ۴ داده‌های واقعی مورد بررسی قرار گرفته است.

## ۲ برآورد پارامترهای توزیع

### ۱.۲ برآوردگرهای ماکسیمم درستنمایی

تابع درستنمایی توزیع بور نوع سوم نمایی تحت داده‌های سانسوریده نوع دوم به صورت

$$L(\underline{\theta}; x) \propto \prod_{i=1}^r h(x_i)[1 - H(x_r)]^{n-r}$$

$$= \prod_{i=1}^r \alpha\beta\gamma x_i^{-\beta-1}(1 + x_i^{-\beta})^{-\alpha\gamma-1} [1 - (1 + x_r^{-\beta})^{-\alpha\gamma}]^{n-r} \quad (1)$$

<sup>۴</sup> Importance sampling

<sup>۵</sup> Lindley approximation

۹۶. ... برآورد پارامترهای توزیع بور نوع سوم نمایی تحت داده های سانسوریده نوع دوم

است. تابع لگاریتم درستنمایی به صورت

$$\begin{aligned} \ell(\theta; x) &= r \log \alpha + r \log \beta + r \log \gamma + (-\beta - 1) \sum_{i=1}^r \log x_i \\ &+ (-\alpha\gamma - 1) \sum_{i=1}^r \log(1 + x_i^{-\beta}) + (n-r) \log(1 - (1 + x_r^{-\beta})^{-\alpha\gamma}) \end{aligned}$$

معرفی می شود. با مشتق گیری از لگاریتم درستنمایی نسبت به پارامترهای مدل معادلات به صورت

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ell(\theta; x)}{\partial \alpha} &= \frac{r}{\alpha} - \gamma \sum_{i=1}^r \log(1 + x_i^{-\beta}) + (n-r) \left[ \frac{\gamma \log(1 + x_r^{-\beta})(1 + x_r^{-\beta})^{-\alpha\gamma}}{(1 - (1 + x_r^{-\beta})^{-\alpha\gamma})} \right], \\ \frac{\partial \ell(\theta; x)}{\partial \beta} &= \frac{r}{\beta} - \sum_{i=1}^r \log x_i - (-\alpha\gamma - 1) \sum_{i=1}^r \left[ \frac{\log x_i x_i^{-\beta}}{1 + x_i^{-\beta}} \right] \quad (2) \\ &- (n-r) \left[ \frac{\alpha\gamma \log x_r x_r^{-\beta} (1 + x_r^{-\beta})^{-\alpha\gamma - 1}}{(1 - (1 + x_r^{-\beta})^{-\alpha\gamma})} \right], \\ \frac{\partial \ell(\theta; x)}{\partial \gamma} &= \frac{r}{\gamma} - \alpha \sum_{i=1}^r \log(1 + x_i^{-\beta}) + (n-r) \left[ \frac{\alpha \log(1 + x_r^{-\beta})(1 + x_r^{-\beta})^{-\alpha\gamma}}{(1 - (1 + x_r^{-\beta})^{-\alpha\gamma})} \right] \end{aligned}$$

به دست می آیند. برآورد پارامترها با استفاده از الگوریتم EM که توسط دمپستر و همکاران (۱۹۷۷) معرفی شد، انجام می شود.

به طور کلی الگوریتم EM در مسائلی به کار می رود که هدف تخمین مجموعه ای از پارامترهای مدل بر اساس داده هایی است که مبتنی بر یک توزیع احتمالی اند و تنها بخشی از آنها در اختیار قرار دارد. گام E یا مرحله محاسبه امیدریاضی و گام M یا مرحله ماکسیمم سازی، الگوریتم EM را به وجود می آورند. لگاریتم تابع درستنمایی بر اساس مشاهدات کامل به صورت

$$\begin{aligned} \ell(\theta; x) &= n \log \alpha + n \log \beta + n \log \gamma + (-\beta - 1) \left( \sum_{i=1}^r \log x_i + \sum_{i=r+1}^n \log x_i \right) \\ &+ (-\alpha\gamma - 1) \left[ \sum_{i=1}^r \log(1 + x_i^{-\beta}) + \sum_{i=r+1}^n \log(1 + x_i^{-\beta}) \right] \end{aligned}$$

است. در گام E، عبارت  $E(\log L(\theta | x))$ ، که در آن  $\theta = (\alpha, \beta, \gamma)$  به صورت

$$\begin{aligned} E(\log L(\theta | x)) &= n \log \alpha + n \log \beta + n \log \gamma \\ &+ (-\beta - 1) \left[ \sum_{i=1}^r \log x_i + \sum_{i=r+1}^n E(\log X_i | X_i > x_r) \right] \end{aligned}$$

$$+ (-\alpha\gamma - 1) \left[ \sum_{i=1}^r \log(1 + x_i^{-\beta}) + \sum_{i=r+1}^n E(\log(1 + X_i^{-\beta}) | X_i > x_r) \right]$$

محاسبه می‌شود. در گام M برای ماکسیمم‌سازی  $E(\log L(\theta | x))$  معادله

$$\frac{\partial E(\ell(\theta | x))}{\partial \theta} = E\left(\frac{\partial \ell(\theta | x)}{\partial \theta}\right) = 0$$

در نظر گرفته می‌شود. بنابراین توزیع بور نوع سوم نمایی معادله اخیر برای  $\theta = (\alpha, \beta, \gamma)$  به صورت زیر خواهد بود:

$$E\left(\frac{\partial \ell(\theta | x)}{\partial \alpha}\right) = \frac{n}{\alpha} - \gamma \left[ \sum_{i=1}^r \log(1 + x_i^{-\beta}) + \sum_{i=r+1}^n E(\log(1 + X_i^{-\beta}) | X_i > x_r) \right] = 0$$

$$E\left(\frac{\partial \ell(\theta | x)}{\partial \beta}\right) = \frac{n}{\beta} - \left[ \sum_{i=1}^r \log x_i - \sum_{i=r+1}^n E(\log X_i | X_i > x_r) \right] + (-\alpha\gamma - 1) \left[ \sum_{i=1}^r \frac{\log x_i x_i^{-\beta}}{1 + x_i^{-\beta}} - \sum_{i=r+1}^n E\left(\frac{\log X_i X_i^{-\beta}}{1 + X_i^{-\beta}} | X_i > x_r\right) \right] = 0$$

$$E\left(\frac{\partial \ell(\theta | x)}{\partial \gamma}\right) = \frac{n}{\gamma} - \alpha \left[ \sum_{i=1}^r \log(1 + x_i^{-\beta}) + \sum_{i=r+1}^n E(\log(1 + X_i^{-\beta}) | X_i > x_r) \right] = 0$$

بنابراین برآورد پارامترها به ترتیب به صورت

$$\hat{\alpha} = \frac{n}{\gamma \left[ \sum_{i=1}^r \log(1 + x_i^{-\beta}) + (n-r)B(\alpha, \beta, \gamma) \right]} \quad (3)$$

$$\hat{\beta} = \frac{n}{\sum_{i=1}^r \log x_i + (n-r)A(\alpha, \beta, \gamma) + (-\alpha\gamma - 1)} \times \frac{1}{\left[ - \sum_{i=1}^r \frac{\log x_i x_i^{-\beta}}{1 + x_i^{-\beta}} - (n-r)C(\alpha, \beta, \gamma) \right]} \quad (4)$$

$$\hat{\gamma} = \frac{n}{\alpha \left[ \sum_{i=1}^r \log(1 + x_i^{-\beta}) + (n-r)B(\alpha, \beta, \gamma) \right]} \quad (5)$$

به دست می‌آیند. به طوری که

$$\begin{aligned} A(\alpha, \beta, \gamma) &= E(\log X_i | X_i > x_r) \\ &= \int_{x_r}^{\infty} \log x_i \left[ \frac{\alpha\beta\gamma x_i^{-\beta-1} (1 + x_i^{-\beta})^{-\alpha\gamma-1}}{1 - (1 + x_i^{-\beta})^{-\alpha\gamma}} \right] dx_i \\ &= \frac{\alpha\beta\gamma x_r^{-\beta}}{1 - (1 + x_r^{-\beta})^{-\alpha\gamma}} \int_0^1 \log\left(\frac{x_r}{y}\right) y^{-\alpha\beta\gamma-1} (y^{-\beta} + x_r^{-\beta})^{-\alpha\gamma-1} dy \end{aligned}$$

انتگرال فوق با تغییر متغیر  $\frac{1}{y} = \frac{x_i}{x_r}$  به دست آمده است. همچنین

$$B(\alpha, \beta, \gamma) = E(\log(1 + X_i^{-\beta}) | X_i > x_r)$$

۹۸. ... برآورد پارامترهای توزیع بور نوع سوم نمایی تحت داده های سانسوریده نوع دوم

$$= \frac{\alpha\beta\gamma x_r^{-\beta}}{1 - (1 + x_r^{-\beta})^{-\alpha\gamma}} \int_0^1 \log\left(1 + \left(\frac{x_r}{y}\right)^{-\beta}\right) y^{-\alpha\beta\gamma-1} (y^{-\beta} + x_r^{-\beta})^{-\alpha\gamma-1} dy$$

$$C(\alpha, \beta, \gamma) = E\left(\frac{\log X_i X_i^{-\beta}}{1 + X_i^{-\beta}} \mid X_i > x_r\right)$$

$$= \frac{\alpha\beta\gamma x_r^{-\beta}}{1 - (1 + x_r^{-\beta})^{-\alpha\gamma}} \int_0^1 \log\left(\frac{x_r}{y}\right) y^{-\alpha\beta\gamma-1} (y^{-\beta} + x_i^{-\beta})^{-\alpha\gamma-1} dy$$

چون معادلات (۳) تا (۵) برحسب  $\alpha, \beta$  و  $\gamma$  خطی نیستند، ریشه معادلات بالا با استفاده از روش تکرار نقطه ثابت به دست خواهد آمد.

## ۲.۲ برآورد بیزی

در این بخش برآورد بیزی پارامترهای  $\alpha, \beta$  و  $\gamma$  تحت توابع زیان توان دوم خطا، لاینکس و آنتروپی به دست می آید. این توابع زیان به ترتیب به صورت

$$L_{SB}(d(\mu), \hat{d}(\mu)) = (\hat{d}(\mu) - d(\mu))^2$$

$$L_{LB}(d(\mu), \hat{d}(\mu)) = e^{(d(\mu) - \hat{d}(\mu)) - c(d(\mu) - \hat{d}(\mu))^{-1}}, \quad c \neq 0$$

$$L_{EB}(d(\mu), \hat{d}(\mu)) = \left(\frac{\hat{d}(\mu)}{d(\mu)}\right)^v - v \log\left(\frac{\hat{d}(\mu)}{d(\mu)}\right) - 1, \quad v \neq 0$$

تعریف می شوند. که در آن  $\hat{d}(\mu)$  بیانگر برآورد پارامتر  $d(\mu)$  است. برآورد بیزی مطلوب تحت تابع زیان توان دوم خطا، میانگین توزیع پسین  $d(\mu)$  است. تحت تابع زیان لاینکس، برآورد بیزی به صورت

$$\hat{d}_{LB}(\mu) = -\frac{1}{c} \ln\{E_{\mu}(e^{-c\alpha} \mid x)\}, \quad c \neq 0$$

حاصل می شود. همچنین تحت تابع زیان آنتروپی، برآورد بیزی به صورت

$$\hat{d}_{EB}(\mu) = \{E_{\mu}((d(\mu))^{-v} \mid x)\}^{-\frac{1}{v}}, \quad c \neq 0$$

است. فرض کنید  $\alpha \sim \Gamma(b_1, b_2)$ ،  $\beta \sim \Gamma(b_3, b_4)$  و  $\gamma \sim \Gamma(b_5, b_6)$  باشند. بنابراین تابع چگالی احتمال پیشین  $\theta = (\alpha, \beta, \gamma)$  به صورت

$$\pi(\theta) = (\alpha^{b_1-1} e^{-b_2\alpha}) (\beta^{b_3-1} e^{-b_4\beta}) (\gamma^{b_5-1} e^{-b_6\gamma}) \quad \alpha, \beta, \gamma > 0, \quad b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6 > 0$$

است (راستی و تریپاتی، ۲۰۱۳). بنابراین تابع چگالی پسین توام  $\alpha, \beta$  و  $\gamma$  به صورت

$$\begin{aligned} \pi(\theta | x) &\propto L(\underline{x} | \theta)\pi(\theta) \\ &= \prod_{i=1}^r \alpha\beta\gamma x_i^{-\beta-1} (\lambda + x_i^{-\beta})^{-\alpha\gamma-1} [\lambda - (\lambda + x_r^{-\beta})^{-\alpha\gamma}]^{n-r} \\ &\times \{(\alpha^{b_1-1} e^{-b_1\alpha})(\beta^{b_2-1} e^{-b_2\beta})(\gamma^{b_3-1} e^{-b_3\gamma})\} \\ &= (\alpha^{r+b_1-1} \beta^{r+b_2-1} \gamma^{r+b_3-1}) e^{-b_1\alpha - b_2\beta - b_3\gamma} [\lambda - (\lambda + x_r^{-\beta})^{-\alpha\gamma}]^{n-r} \\ &\times \left\{ \prod_{i=1}^r x_i^{-\beta-1} (\lambda + x_i^{-\beta})^{-\alpha\gamma-1} \right\} \end{aligned}$$

به دست می آید. برآورد بیزی  $\alpha$ ،  $\beta$  و  $\gamma$  تحت تابع زیان دوم خطا به ترتیب به صورت

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}_{SB} &= E(\alpha | x) \\ &\propto \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty (\alpha^{r+b_1-1} \beta^{r+b_2-1} \gamma^{r+b_3-1}) e^{-b_1\alpha - b_2\beta - b_3\gamma} \\ &\times [\lambda - (\lambda + x_r^{-\beta})^{-\alpha\gamma}]^{n-r} \left\{ \prod_{i=1}^r x_i^{-\beta-1} (\lambda + x_i^{-\beta})^{-\alpha\gamma-1} \right\} d\alpha d\beta d\gamma \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{\beta}_{SB} &= E(\beta | x) \\ &\propto \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty (\alpha^{r+b_1-1} \beta^{r+b_2-1} \gamma^{r+b_3-1}) e^{-b_1\alpha - b_2\beta - b_3\gamma} \\ &\times [\lambda - (\lambda + x_r^{-\beta})^{-\alpha\gamma}]^{n-r} \left\{ \prod_{i=1}^r x_i^{-\beta-1} (\lambda + x_i^{-\beta})^{-\alpha\gamma-1} \right\} d\alpha d\beta d\gamma \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{\gamma}_{SB} &= E(\gamma | x) \\ &\propto \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty (\alpha^{r+b_1-1} \beta^{r+b_2-1} \gamma^{r+b_3-1}) e^{-b_1\alpha - b_2\beta - b_3\gamma} \\ &\times [\lambda - (\lambda + x_r^{-\beta})^{-\alpha\gamma}]^{n-r} \left\{ \prod_{i=1}^r x_i^{-\beta-1} (\lambda + x_i^{-\beta})^{-\alpha\gamma-1} \right\} d\alpha d\beta d\gamma \end{aligned}$$

حاصل می شود. تحت تابع زیان لاینکس، برآورد بیزی پارامترها به صورت

$$\hat{\alpha}_{LB} = -\frac{1}{c} \ln\{E(e^{-c\alpha} | x)\},$$

$$\hat{\beta}_{LB} = -\frac{1}{c} \ln\{E(e^{-c\beta} | x)\},$$

$$\hat{\gamma}_{LB} = -\frac{1}{c} \ln\{E(e^{-c\gamma} | x)\},$$

تعیین می شود، که در آن ها  $c \neq 0$

$$E(e^{-c\alpha} | x) \propto \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty (\alpha^{r+b_1-1} \beta^{r+b_2-1} \gamma^{r+b_3-1}) e^{-(c+b_1)\alpha - b_2\beta - b_3\gamma}$$

۱۰۰ ... برآورد پارامترهای توزیع بور نوع سوم نمایی تحت داده های سانسوریده نوع دوم

$$\begin{aligned}
 E(e^{-c\beta} | x) &\propto \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty (\alpha^{r+b_1-\lambda} \beta^{r+b_2-\lambda} \gamma^{r+b_3-\lambda}) e^{-b_1\alpha - (c+b_2)\beta - b_3\gamma} \\
 &\times [\lambda - (\lambda + x_r^{-\beta})^{-\alpha\gamma}]^{n-r} \left\{ \prod_{i=1}^r x_i^{-\beta-\lambda} (\lambda + x_i^{-\beta})^{-\alpha\gamma-\lambda} \right\} d\alpha d\beta d\gamma \\
 E(e^{-c\gamma} | x) &\propto \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty (\alpha^{r+b_1-\lambda} \beta^{r+b_2-\lambda} \gamma^{r+b_3-\lambda}) e^{-b_1\alpha - b_2\beta - (c+b_3)\gamma} \\
 &\times [\lambda - (\lambda + x_r^{-\beta})^{-\alpha\gamma}]^{n-r} \left\{ \prod_{i=1}^r x_i^{-\beta-\lambda} (\lambda + x_i^{-\beta})^{-\alpha\gamma-\lambda} \right\} d\alpha d\beta d\gamma
 \end{aligned}$$

تعریف می شود. به طور مشابه برآورد بیزی پارامترها تحت تابع زیان آنتروپی به صورت

$$\hat{\alpha}_{EB} = \{E(\alpha^{-v} | x)\}^{-\frac{1}{v}},$$

$$\hat{\beta}_{EB} = \{E(\beta^{-v} | x)\}^{-\frac{1}{v}},$$

$$\hat{\gamma}_{EB} = \{E(\gamma^{-v} | x)\}^{-\frac{1}{v}},$$

به دست می آیند، که در آنها

$$\begin{aligned}
 E(\alpha^{-v} | x) &\propto \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty (\alpha^{r+b_1-v-\lambda} \beta^{r+b_2-\lambda} \gamma^{r+b_3-\lambda}) e^{-b_1\alpha - b_2\beta - b_3\gamma} \\
 &\times [\lambda - (\lambda + x_r^{-\beta})^{-\alpha\gamma}]^{n-r} \left\{ \prod_{i=1}^r x_i^{-\beta-\lambda} (\lambda + x_i^{-\beta})^{-\alpha\gamma-\lambda} \right\} d\alpha d\beta d\gamma \\
 E(\beta^{-v} | x) &\propto \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty (\alpha^{r+b_1-\lambda} \beta^{r+b_2-v-\lambda} \gamma^{r+b_3-\lambda}) e^{-b_1\alpha - b_2\beta - b_3\gamma} \\
 &\times [\lambda - (\lambda + x_r^{-\beta})^{-\alpha\gamma}]^{n-r} \left\{ \prod_{i=1}^r x_i^{-\beta-\lambda} (\lambda + x_i^{-\beta})^{-\alpha\gamma-\lambda} \right\} d\alpha d\beta d\gamma \\
 E(\gamma^{-v} | x) &\propto \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty (\alpha^{r+b_1-\lambda} \beta^{r+b_2-\lambda} \gamma^{r+b_3-v-\lambda}) e^{-b_1\alpha - b_2\beta - b_3\gamma} \\
 &\times [\lambda - (\lambda + x_r^{-\beta})^{-\alpha\gamma}]^{n-r} \left\{ \prod_{i=1}^r x_i^{-\beta-\lambda} (\lambda + x_i^{-\beta})^{-\alpha\gamma-\lambda} \right\} d\alpha d\beta d\gamma
 \end{aligned}$$



### ۳.۲ نمونه‌گیری از نقاط مهم

به دلیل این‌که برآوردگرهای بیزی به‌صورت تحلیلی قابل محاسبه نیستند، برای برآورد پارامترها از روش نمونه‌گیری از نقاط مهم استفاده می‌کنیم. با توجه به (۱) و (۶) تابع چگالی پسین توام به‌صورت

$$\begin{aligned} \pi(\theta | x) &= L(x | \theta)\pi(\theta) \\ &= [\alpha^{r+b_1-1} e^{-\alpha(b_1+\gamma \sum_{i=1}^r \log(1+x_i^{-\beta}))}] [\beta^{r+b_2-1} e^{-\beta(b_2+\sum_{i=1}^r \log x_i)}] \\ &\quad \times [\gamma^{r+b_3-1} e^{-b_3\gamma}] \times e^{-\sum_{i=1}^r \log x_i - \sum_{i=1}^r \log(1+x_i^{-\beta}) + (n-r) \log[1-(1+x_r^{-\beta})^{-\alpha\gamma}]} \end{aligned}$$

به‌دست می‌آید. بنابراین

$$\begin{aligned} \pi(\theta | x) &= \Gamma_{\alpha|\beta,\gamma}(r+b_1, b_2+\gamma \sum_{i=1}^r \log(1+x_i^{-\beta})) \Gamma_{\beta}(r+b_2, (b_2+\sum_{i=1}^r \log x_i)) \\ &\quad \times \Gamma_{\gamma}(r+b_3, b_3) h(\alpha, \beta, \gamma) \end{aligned}$$

که در آن

$$h(\alpha, \beta, \gamma) = \frac{e^{-\sum_{i=1}^r \log x_i - \sum_{i=1}^r \log(1+x_i^{-\beta}) + (n-r) \log[1-(1+x_r^{-\beta})^{-\alpha\gamma}]} (b_2+\gamma \sum_{i=1}^r \log(1+x_i^{-\beta}))^{(r+b_1)}}{\Gamma_{\alpha|\beta,\gamma}(r+b_1, b_2+\gamma \sum_{i=1}^r \log(1+x_i^{-\beta})) \Gamma_{\beta}(r+b_2, (b_2+\sum_{i=1}^r \log x_i)) \Gamma_{\gamma}(r+b_3, b_3)}$$

حال برآورد بیزی  $u(\alpha, \beta, \gamma)$  با الگوریتم زیر به‌دست می‌آید:

گام ۱)  $\gamma_1$  از توزیع  $\Gamma_{\gamma}(r+b_3, b_3)$  تولید شود.

گام ۲)  $\beta_1$  از توزیع  $\Gamma_{\beta}(r+b_2, (b_2+\sum \log x_i))$  تولید شود.

گام ۳)  $\alpha_1$  از توزیع  $\Gamma_{\alpha|\beta,\gamma}(r+b_1, b_2+\gamma \sum \log(1+x_i^{-\beta}))$  تولید شود.

گام ۴) با  $m$  بار تکرار گام‌های ۱ تا ۳، مقادیر  $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1), \dots, (\alpha_m, \beta_m, \gamma_m)$  به‌دست آیند.

بنابراین

$$\hat{u}(\alpha, \beta, \gamma) \approx \frac{\sum_{i=1}^m u(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i) h(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i)}{\sum_{i=1}^m h(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i)}$$

$$\hat{u}(\alpha, \beta, \gamma) \approx \frac{-1}{c} \log \left[ \frac{\sum_{i=1}^m e^{-c u(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i) h(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i)}}{\sum_{i=1}^m h(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i)} \right], \quad c \neq 0$$

$$\hat{u}(\alpha, \beta, \gamma) \approx \left[ \frac{\sum_{i=1}^m u(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i)^{-v} h(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i)}{\sum_{i=1}^m h(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i)} \right]^{-\frac{1}{v}}$$

۱۰۲ ... برآورد پارامترهای توزیع بور نوع سوم نمایی تحت داده های سانسوریده نوع دوم

#### ۴.۲ تقریب لیندلی

تا اینجا برآورد بیزی پارامترهای مدل بر اساس داده های سانسوریده نوع دوم تحت توابع زیان توان دوم خطا، لاینکس و آنتروپی به دست آورده شد. همان طور که مشاهده می شود، برآوردگرها به صورت نسبت دو انتگرال هستند که به صورت تحلیلی قابل محاسبه نیستند. بنابراین برای ارزیابی پارامترها نیازمند استفاده از روش های عددی مانند تقریب لیندلی هستیم (لیندلی، ۱۹۸۰). از این رو برآوردهای بیز که شامل نسبت دو انتگرال هستند به صورت

$$I(x) = E(u(\alpha, \beta, \gamma)) = \frac{\int \int \int u(\alpha, \beta, \gamma) e^{l(\alpha, \beta, \gamma) + \rho(\alpha, \beta, \gamma)} d\alpha d\beta d\gamma}{\int \int \int e^{l(\alpha, \beta, \gamma) + \rho(\alpha, \beta, \gamma)} d\alpha d\beta d\gamma}$$

تعریف می شود، که در آن  $u(\alpha, \beta, \gamma)$  تابعی فقط از  $\alpha$ ،  $\beta$  و  $\gamma$  است.  $\rho(\alpha, \beta, \gamma)$  لگاریتم پیشین توام  $\alpha$ ،  $\beta$ ،  $\gamma$  و  $l(\alpha, \beta, \gamma)$  تابع لگاریتم درستنمایی تعریف شده در (۲) است. با تعریف  $\varphi(\alpha, \beta, \gamma) = \log \pi(\alpha, \beta, \gamma)$  تقریب لیندلی به صورت

$$I(x) = u(\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\gamma}) + (u_1 a_1 + u_2 a_2 + u_3 a_3 + a_4 + a_5) + \frac{1}{\varphi} [A(u_1 \sigma_{11} + u_2 \sigma_{12} u_3 \sigma_{13}) + B(u_1 \sigma_{21} + u_2 \sigma_{22} + u_3 \sigma_{23}) + C(u_1 \sigma_{31} + u_2 \sigma_{32} + u_3 \sigma_{33})]$$

تقریب زده می شود، که در آن  $\hat{\alpha}$ ،  $\hat{\beta}$  و  $\hat{\gamma}$  برآوردگرهای ماکسیم درستنمایی  $\alpha$ ،  $\beta$  و  $\gamma$  هستند، همچنین

$$a_i = \rho_1 \sigma_{i1} + \rho_2 \sigma_{i2} + \rho_3 \sigma_{i3} \quad i = 1, 2, 3$$

$$a_4 = u_{12} \sigma_{12} + u_{13} \sigma_{13} + u_{23} \sigma_{23}$$

$$a_5 = \frac{1}{\varphi} (u_{11} \sigma_{11} + u_{22} \sigma_{22} + u_{33} \sigma_{33})$$

$$A = \sigma_{11} \ell_{111} + 2\sigma_{12} \ell_{121} + 2\sigma_{13} \ell_{131} + 2\sigma_{22} \ell_{221} + \sigma_{22} \ell_{221} + \sigma_{22} \ell_{221}$$

$$B = \sigma_{11} \ell_{112} + 2\sigma_{12} \ell_{122} + 2\sigma_{13} \ell_{132} + 2\sigma_{22} \ell_{222} + \sigma_{22} \ell_{222} + \sigma_{22} \ell_{222}$$

$$C = \sigma_{11} \ell_{113} + 2\sigma_{12} \ell_{123} + 2\sigma_{13} \ell_{133} + 2\sigma_{22} \ell_{223} + \sigma_{22} \ell_{223} + \sigma_{22} \ell_{223}$$

برای سادگی فرض کنید  $\theta = (\alpha, \beta, \gamma) = (\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ ، بنابراین

$$\rho_i = \frac{\partial \rho}{\partial \theta_i}, \quad u_i = \frac{\partial u(\theta_1, \theta_2, \theta_3)}{\partial \theta_i}, \quad i = 1, 2, 3$$

$$u_{ij} = \frac{\partial^2 u(\theta_1, \theta_2, \theta_3)}{\partial \theta_i \partial \theta_j}, \quad i, j = 1, 2, 3$$

$$\ell_{ij} = \frac{\partial^2 \ell(\theta_1, \theta_2, \theta_3)}{\partial \theta_i \partial \theta_j}, \quad i, j = 1, 2, 3$$

$$\ell_{ijk} = \frac{\partial^3 \ell(\theta_1, \theta_2, \theta_3)}{\partial \theta_i \partial \theta_j \partial \theta_k}, \quad i, j = 1, 2, 3$$

$$\rho = \log \pi(\alpha, \beta, \gamma)$$

$$= (b_1 - 1) \log \alpha + (b_2 - 1) \log \beta + (b_3 - 1) \log \gamma - b_2 \alpha - b_4 \beta - b_6 \gamma$$

$$\rho_1 = \frac{b_1 - 1}{\alpha} - b_2, \quad \rho_2 = \frac{b_2 - 1}{\beta} - b_4, \quad \rho_3 = \frac{b_3 - 1}{\gamma} - b_6$$

$\sigma_{ij}, j, i$  امین مولفه معکوس ماتریس  $[\frac{\partial^2 \ell(\theta|x)}{\partial \theta^2}]^{-1}$  است. تمامی مقادیر در مقدار درست‌نمایی ماکزیمم پارامترها ارزیابی می‌شوند.

### ۳ مطالعه شبیه‌سازی

در این بخش نتایج شبیه‌سازی برای مقایسه عملکرد روش درست‌نمایی ماکزیمم و روش بیزی ارائه شده است. برای این منظور، نمونه تصادفی به حجم‌های  $n = 15, 40, 50$  از چگالی بور نوع سوم نمایی تولید شده است. ابتدا پارامترها با الگوریتم EM برآورد شده‌اند. برآورد بیزی نیز با روش نمونه‌گیری از نقاط مهم و تقریب لیندلی تحت توابع زیان توان دوم خطا، لاینکس و آنتروپی به‌ازای  $b_1 = 2, b_2 = 1, b_3 = 2, b_4 = 1, b_5 = 2, b_6 = 17$  و  $c = v = 0/1$  با تکرار ۱۰۰۰۰ به‌دست آمده است. به کمک نمونه‌های شبیه‌سازی شده به روش تقریب مونت کارلو، پارامترهای توزیع تحت حالت‌های مختلف سانسور برآورد شده‌اند. همچنین توان دوم خطا ( $MSE$ ) برآوردگرها در جدول‌های ۱، ۲ و ۳ به‌ازای  $n$  و  $r$  مختلف محاسبه شده و ملاحظه می‌شود با افزایش  $r$ ، یعنی هرچه تعداد سانسور کمتر باشد، توان دوم خطا کاهش یافته و برآورد پارامترها به مقدار واقعی نزدیک‌تر می‌شوند. نتایج شبیه‌سازی نشان می‌دهد در حالت کلی برآوردگر بیزی با توزیع پیشین گاما، بهتر از برآوردگر ماکسیمم درست‌نمایی عمل می‌کند.

۱۰۴ ... برآورد پارامترهای توزیع بور نوع سوم نمایی تحت داده های سانسوریده نوع دوم

جدول ۱: برآورد و توان دوم خطا برای  $\alpha$  با تکرار ۱۰۰۰۰

نقاط مهم			لیندلی			ML	r	n
EB	LB	SB	EB	LB	SB			
۱/۶۷۵۶ ۰/۰۳۱۷	۱/۶۴۶۰ ۰/۰۲۷۸	۱/۶۶۳۱ ۰/۰۳۱۸	۱/۵۳۲۲ ۰/۰۲۲۸	۱/۵۳۰۸ ۰/۰۱۲۳	۱/۵۳۵۵ ۰/۰۱۱۵	۱/۶۸۵۴ ۰/۰۳۴۴	۱۰	۱۵
۱/۶۵۵۰ ۰/۰۲۵۶	۱/۵۸۹۳ ۰/۰۱۳۸	۱/۵۷۱۵ ۰/۰۲۸۳	۱/۵۲۹۲ ۰/۰۲۱۲	۱/۵۲۹۲ ۰/۰۱۱۷	۱/۵۱۳۲ ۰/۰۱۱۳	۱/۶۷۶۳ ۰/۰۳۱۱	۱۵	
۱/۵۸۸۰ ۰/۰۱۷۵	۱/۵۹۳۴ ۰/۰۱۲۴	۱/۵۷۴۵ ۰/۰۲۶۶	۱/۵۳۵۰ ۰/۰۱۱۸	۱/۵۳۵۱ ۰/۰۱۱۰	۱/۵۳۷۶ ۰/۰۱۱۱	۱/۵۷۱۰ ۰/۰۲۷۳	۳۵	۴۰
۱/۵۵۴۷ ۰/۰۰۸۷	۱/۵۴۵۳ ۰/۰۰۷۱	۱/۵۱۷۱ ۰/۰۱۹۵	۱/۵۳۵۸ ۰/۰۱۰۷	۱/۵۳۵۷ ۰/۰۱۰۷	۱/۵۳۷۵ ۰/۰۱۰۶	۱/۵۶۷۳ ۰/۰۲۰۱	۴۰	
۱/۵۲۸۲ ۰/۰۰۳۷	۱/۵۵۴۴ ۰/۰۰۳۵	۱/۵۴۶۵ ۰/۰۰۲۵	۱/۵۵۷۳ ۰/۰۱۰۴	۱/۵۲۸۳ ۰/۰۱۰۴	۱/۵۳۳۹ ۰/۰۰۹۵	۱/۵۷۵۰ ۰/۰۱۵۶	۴۵	۵۰
۱/۵۲۳۳ ۰/۰۰۳۳	۱/۵۱۴۰ ۰/۰۰۲۶	۱/۵۴۱۹ ۰/۰۰۱۸	۱/۵۳۶۸ ۰/۰۰۸۳	۱/۵۳۳۳ ۰/۰۰۹۹	۱/۵۴۲۳ ۰/۰۰۸۱	۱/۵۶۵۳ ۰/۰۱۴۳	۵۰	

جدول ۲: برآورد و توان دوم خطا برای  $\beta$  با تکرار ۱۰۰۰۰

نقاط مهم			لیندلی			ML	r	n
EB	LB	SB	EB	LB	SB			
۱/۱۷۳۹ ۰/۰۳۳۲	۱/۱۵۷۷ ۰/۰۳۱۰	۱/۱۳۶۰ ۰/۰۲۲۰	۱/۰۵۸۲ ۰/۰۱۳۰	۱/۰۵۸۳ ۰/۰۱۲۶	۱/۰۵۸۴ ۰/۰۱۲۷	۱/۱۷۶۶ ۰/۰۳۱۲	۱۰	۱۵
۱/۰۹۴۳ ۰/۰۱۱۸	۱/۱۴۵۸ ۰/۰۲۱۳	۱/۱۳۶۳ ۰/۰۱۹۴	۱/۰۶۵۹ ۰/۰۱۲۸	۱/۰۶۵۹ ۰/۰۱۲۳	۱/۰۶۰۹ ۰/۰۱۱۸	۱/۱۷۳۷ ۰/۰۳۰۲	۱۵	
۱/۰۸۳۶ ۰/۰۱۰۴	۱/۰۲۳۳ ۰/۰۱۷۰	۱/۱۰۷۳ ۰/۰۱۲۲	۱/۰۵۶۱ ۰/۰۱۱۳	۱/۰۵۶۶ ۰/۰۱۱۸	۱/۰۵۲۹ ۰/۰۱۱۵	۱/۱۱۳۱ ۰/۰۱۲۸	۳۵	۴۰
۱/۰۴۸۴ ۰/۰۰۸۳	۱/۰۹۸۰ ۰/۰۱۵۶	۱/۰۸۱۴ ۰/۰۱۰۸	۱/۰۵۲۳ ۰/۰۱۰۵	۱/۰۵۲۶ ۰/۰۱۱۶	۱/۰۶۰۰ ۰/۰۱۱۰	۱/۱۰۹۵ ۰/۰۱۲۰	۴۰	
۱/۰۴۰۹ ۰/۰۰۸۰	۱/۱۱۱۷ ۰/۰۰۵۴	۱/۰۲۸۷ ۰/۰۰۳۰	۱/۰۵۱۸ ۰/۰۱۰۱	۱/۰۵۶۳ ۰/۰۱۱۲	۱/۰۵۲۸ ۰/۰۱۰۳	۱/۰۷۸۰ ۰/۰۰۶۲	۴۵	۵۰
۱/۰۳۰۷ ۰/۰۰۷۶	۱/۰۲۹۹ ۰/۰۰۰۹	۱/۰۲۶۴ ۰/۰۰۱۵	۱/۰۵۴۱ ۰/۰۰۹۸	۱/۰۵۴۱ ۰/۰۱۰۹	۱/۰۶۰۹ ۰/۰۱۰۱	۱/۰۳۴۸ ۰/۰۰۱۲	۵۰	

جدول ۳: برآورد و توان دوم خطا برای  $\gamma$  با تکرار ۱۰۰۰۰

نقاط مهم			لیندلی			ML	r	n
EB	LB	SB	EB	LB	SB			
۱/۷۲۵۹ ۰/۰۰۶۱	۱/۷۴۷۹ ۰/۰۰۴۵	۱/۷۵۹۱ ۰/۰۰۹۳	۱/۷۳۸۳ ۰/۰۱۰۴	۱/۷۲۸۳ ۰/۰۱۷۵	۱/۷۲۸۳ ۰/۰۱۰۸	۱/۷۹۶۳ ۰/۰۰۹۳	۱۰	۱۵
۱/۷۰۲۵ ۰/۰۰۵۸	۱/۷۳۸۵ ۰/۰۰۳۰	۱/۷۲۷۵ ۰/۰۰۵۳	۱/۷۳۲۱ ۰/۰۱۰۱	۱/۷۳۲۱ ۰/۰۱۰۲	۱/۷۳۲۱ ۰/۰۱۰۵	۱/۷۹۳۸ ۰/۰۰۸۸	۱۵	
۱/۷۳۴۷ ۰/۰۰۵۰	۱/۷۳۹۴ ۰/۰۰۲۰	۱/۷۴۱۳ ۰/۰۰۳۷	۱/۷۳۰۱ ۰/۰۰۹۹	۱/۷۳۰۱ ۰/۰۰۹۹	۱/۷۳۸۱ ۰/۰۱۰۱	۱/۷۸۲۰ ۰/۰۰۶۷	۳۵	۴۰
۱/۷۲۵۶ ۰/۰۰۴۳	۱/۷۲۹۲ ۰/۰۰۱۶	۱/۷۰۳۸ ۰/۰۰۲۵	۱/۷۲۴ ۰/۰۰۸۴	۱/۷۳۶۸ ۰/۰۰۸۲	۱/۷۳۷۵ ۰/۰۰۹۲	۱/۷۷۳۵ ۰/۰۰۵۴	۴۰	
۱/۷۳۴۵ ۰/۰۰۱۱	۱/۷۲۲۳ ۰/۰۰۱۴	۱/۷۳۷۵ ۰/۰۰۱۴	۱/۷۳۱۶ ۰/۰۰۷۶	۱/۷۳۱۶ ۰/۰۰۶۱	۱/۷۳۱۶ ۰/۰۰۶۵	۱/۷۶۶۵ ۰/۰۰۴۴	۴۵	۵۰
۱/۷۰۹۳ ۰/۰۰۰۲	۱/۷۰۸۸ ۰/۰۰۱۲	۱/۷۰۹۲ ۰/۰۰۰۹	۱/۷۳۸۰ ۰/۰۰۶۲	۱/۷۳۸۸ ۰/۰۰۵۳	۱/۷۳۸۰ ۰/۰۰۴۲	۱/۷۵۸۶ ۰/۰۰۳۴	۵۰	

#### ۴ مثال کاربردی

در این بخش، روش‌های مطرح شده برای داده‌های مربوط به طول عمر بیماران مبتلا به سرطان گلبول‌های سفید، (روپرت و میلر، ۱۹۹۷) به کار گرفته می‌شود. این داده‌ها نشان دهنده طول عمر ۲۳ بیمار مبتلا به سرطان گلبول‌های سفید می‌باشد که به صورت ۳۳، ۴۳، ۴۵، ۹، ۱۳، ۱۳، ۱۸، ۲۳، ۲۸، ۳۱، ۳۴، ۴۵، ۴۸، ۱۶۱، ۵، ۵، ۸، ۸، ۱۲، ۱۶، ۲۳، ۲۷، ۳۰ است. با روش ماکسیمم درست‌نمایی توزیع‌های برنوع سوم (BIII) و بور نوع سوم نمایی (EBIII) را به داده‌ها برازش داده می‌شود. برآورد ماکسیمم درست‌نمایی این پارامترها و کلموگروف اسمیرنف در جدول ۴ آورده شده است. برای مشاهده این‌که کدام توزیع برازش بهتری به داده‌ها دارد، با استفاده از آماره کولموگروف اسمیرنف فاصله بین توزیع تجربی و مدل برازش داده شده محاسبه می‌شود. بر پایه این داده‌ها هر دو توزیع برازش مناسبی دارند ولی توزیع بور نوع سوم نمایی با  $KS$  کمتر، اختلاف در ۶ رقم اعشار، برازش بهتری نسبت به توزیع بور نوع سوم پیشنهاد می‌کند.

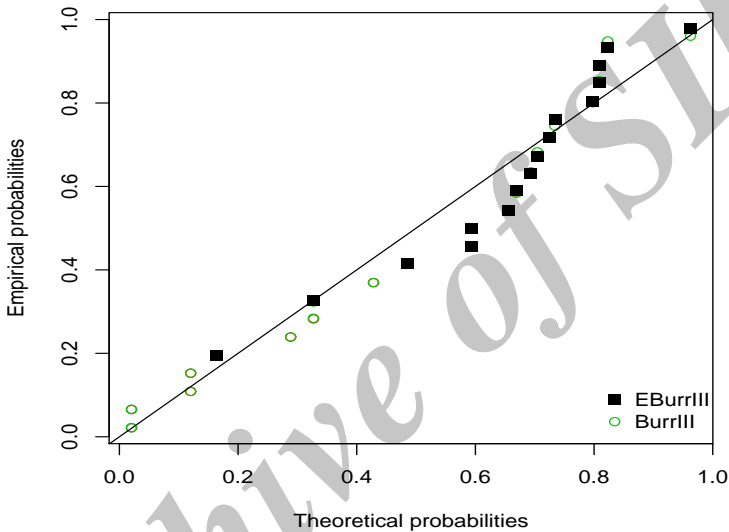
با توجه به شکل ۱، از آنجا که نقاط تقریباً نزدیک به خط رسم شده‌اند می‌توان نتیجه گرفت داده‌ها به توزیع برازش مناسبی دارند.

بر اساس این داده‌ها برآورد پارامترها به روش ماکسیمم درست‌نمایی و رهیافت بیزی روش‌های مطرح شده برای  $r = ۱۳, ۱۸, ۲۳$  در جداول ۵ تا ۷ آورده شده‌اند.

۱۰۶ ... برآورد پارامترهای توزیع بور نوع سوم نمایی تحت داده های سانسوریده نوع دوم

جدول ۴:  $MLE$  پارامترها،  $KS$  و  $p\text{-value}$  برای داده های سرطان گلبول های سفید

$p\text{-value}$	$KS$	$\gamma$	$\beta$	$\alpha$	مدل
۰/۵۵۹۱	۰/۱۵۸۲	۴۷/۷۲۳۹	۱/۷۵۲۶	۱/۳۴۶۸	EBIII
۰/۵۵۹۱	۰/۱۵۸۲	۱/۳۴۷۴۵	۳۵/۹۸۸۷	-	BIII



شکل ۱: نمودار  $PP$  احتمالات تجربی در مقابل احتمالات نظری

جدول ۵: برآورد بیزی پارامترها برای داده های سرطان گلبول های سفید  $r = 13$

نقاط مهم			لیندلی			ML	پارامتر
EB	LB	SB	EB	LB	SB		
۳/۸۷۷۲	۳/۶۳۰۲	۳/۵۲۸۹	۳/۸۶۷۰	۳/۹۱۱۱	۳/۹۱۶۱	۴/۴۴۲۱	$\alpha$
۱/۴۸۷۴	۱/۲۶۰۶	۱/۶۹۸۷	۱/۳۵۸۱	۱/۳۲۹۲	۱/۳۲۳۰	۱/۴۴۶۱	$\beta$
۴/۰۰۴۳	۳/۷۵۸۹	۳/۳۳۱۷	۴/۰۶۶۹	۴/۰۶۹۹	۴/۰۶۰۶	۴/۹۲۰۷	$\gamma$

جدول ۶: برآورد بیزی پارامترها برای داده های سرطان گلبول های سفید  $r = 18$

نقاط مهم			لیندلی			ML	پارامتر
EB	LB	SB	EB	LB	SB		
۳/۵۸۵۲	۳/۴۱۱۷	۳/۴۲۸۷	۳/۶۲۲۰	۳/۷۱۷۶	۳/۷۱۸۸	۴/۲۶۵۱	$\alpha$
۱/۱۲۰۷	۱/۰۶۹۵	۱/۳۱۷۸	۱/۲۴۸۴	۱/۲۹۳۰	۱/۲۹۲۹	۱/۳۷۶۰	$\beta$
۳/۷۹۷۸	۳/۴۰۳۵	۳/۱۱۵۰	۳/۷۲۲۹	۳/۷۷۱۳	۳/۷۷۱۳	۴/۸۰۴۳	$\gamma$

جدول ۷: برآورد بیزی پارامترها برای داده‌های سرطان گلوبول‌های سفید  $r = 23$

نقاط مهم			لیندلی			ML	پارامتر
EB	LB	SB	EB	LB	SB		
۳/۳۴۵۹	۳/۳۴۶۶	۳/۰۳۷۲	۳/۴۰۱۹	۳/۶۸۲۶	۳/۶۸۳۷	۴/۱۷۱۶	$\alpha$
۰/۹۹۴۲	۰/۹۸۰۴	۱/۲۷۹۶	۱/۱۴۴۹	۱/۲۵۰۴	۱/۲۵۵۹	۱/۱۴۷۱	$\beta$
۳/۵۸۸۴	۳/۱۸۷۹	۲/۹۲۸۱	۳/۵۹۱۹	۳/۶۷۰۴	۳/۶۷۴۳	۴/۸۰۳۳	$\gamma$

همان‌طور که ملاحظه می‌شود مقادیر برآورد هر پارامتر تحت روش‌های ML، بیزی بر اساس نمونه‌گیری از نقاط مهم و بیزی بر اساس تقریب لیندلی با تقریب خوبی به یکدیگر نزدیک هستند.

### بحث و نتیجه‌گیری

در این مقاله استنباط کلاسیک و بیزی را برای توزیع بور نوع سوم نمایی تحت داده‌های سانسوریده نوع دوم در نظر گرفتیم. به دلیل این‌که برآوردهای ماکسیمم درست‌نمایی به‌صورت فرم بسته‌ای در نمی‌آیند از الگوریتم EM برای محاسبه آنها استفاده می‌کنیم. الگوریتم EM یک روش مفید و کاربردی در آنالیز داده‌های سانسوریده است. برای برآورد بیز پارامترهای مجهول تحت توابع زیان توان دوم خطا، لاینکس و آنتروپی، چون نمی‌توان به‌صورت مستقیم از چگالی هدف نمونه تولید کرد، از روش نمونه‌گیری از نقاط مهم و تقریب لیندلی استفاده شده است. روش نمونه‌گیری از نقاط مهم تابع چگالی پیشنهادی را به‌گونه‌ای اختیار می‌کند که رفتار آن تا حد زیادی شبیه به رفتار تابع چگالی هدف باشد. برآوردهای مختلف با استفاده از شبیه‌سازی مونت کارلو و با انتخاب متفاوت  $n$  و  $r$  مقایسه شده‌اند. میانگین برآوردها و توان دوم خطا با تکرار ۱۰۰۰۰ به‌وسیله روش تقریب مونت کارلو محاسبه شده است. با مطالعه نتایج، برای  $n$  ثابت، با کاهش تعداد سانسورها، توان دوم خطا کاهش پیدا می‌کند و برآوردها به مقدار واقعیشان نزدیک‌تر می‌شوند. بر اساس نتایج حاصل از این مقاله برآوردهای بیزی دارای توان خطای کوچکتری نسبت به روش ماکسیمم درست‌نمایی بوده است. این مقاله روی سانسور نوع دوم انجام شده است که می‌تواند بر روی سانسورهای دیگر انجام شود.

### تقدیر و تشکر

نویسندگان از پیشنهادات ارزنده داوران و ویراستار محترم مجله که موجب بهبود مقاله گردید کمال تشکر و سپاسگزاری را دارند.

- Aldayian, G. R. (1999), Burr Type III Distribution: Properties and Estimation, *The Egyptian Statistical Journal*, **43**, 102-116.
- Abdelfattah, A. M., Essawy, A. and Mubarak, S. (2012), Cumulative Exposure Model for XII Distribution Based on Type II Censoring Datavia EM-algorithm, *Australian Journal of Basic and Applied Sciences*, **6**, 422-430.
- Burr, I. W. (1942), Cumulative Frequency Functions, *The Annals of Mathematical Statistics*, **1**, 215-232.
- Dempster, A. P., Laird, N. M. and Rubin, D. B. (1977), Maximum Likelihood from Incomplete Data, *Royal Statistical Society*, **39**, 1-38.
- Flaih, A., Elsalloukh, H., Mendi, E. and Milanova, M. (2012), The Exponentiated Inverted Weibull Distribution, *Journal of Applied Statistics*, **6**, 167-171.
- Gupta, R. D. and Kundu, D. (2001), Exponentiated Exponential Family: an Alternative to Gamma and Weibull Distributions, *Biometrika*, **43**, 117-130.
- Lindley, D. V. (1980), Approximate Bayesian Methods, *Trabajos de Estadística*, **31**, 223-237.
- Lindsay, S. R., Wood, G. R. and Woollons, R. C. (1996), Modeling the Diameter Distribution of Forest Stands Using the Burr Distribution, *Journal of Applied Statistics*, **23**, 609-619.
- Mahmoudi, E. and Sepahdar, A. (2013), Exponentiated Weibull-Poisson Distribution Model, Properties and Applications, *Mathematics and Computers in Simulation*, **92**, 76-97.
- Nassar, M. and Eissa, F. H. (2003), On the Exponentiated Weibull Distribution, *Communications in Statistics-Theory and Methods*, **32**, 1317-1336.
- Nassar, M. and Eissa, F. H. (2004), Bayesian Estimation for the Exponentiated Weibull Model, *Communications in Statistics-Theory and Methods*, **33**, 2343-2362.



- Panahi, H. and Sayyareh, A. (2014), Parameters Estimation and Prediction of Order Statistics for the Burr Type XII Distribution with Type II Censoring, *Journal of Applied Statistics*, **41**, 215-232.
- Papadopoulos, A. S. (1978), The Burr Distribution as a Failure Model from a Bayesian Approach, *IEEE Transactions on Reliability*, **27**, 367-371.
- Rastogi, M. K. and Tripathi, Y. M. (2013), Inference on Unknown Parameters of a Burr Distribution under Hybrid Censoring, *Statistical Papers*, **54**, 619-643.
- Rupert, G. and Miller, J. R. (1997), *Survival Analysis*, John Wiley, 0-471-25218-2.
- Tadikamalla, P. (1980), A Look at the Burr and Related Distributions, *International Statistical Review*, **48**, 337-344.
- Verhulst, P. F. (1845), Recheches Mathematiques Sur La Loi d'Accroissement de la Population, *Nouveaux Memoire de l'Academie Royale de Sciences et BelleLettres de Bruxelles*, **18**, 1-42.
- Wang, F. K., Keats, J. B. and Zimmer, W. J. (1996), Maximum Likelihood Estimation of the Burr XII Distribution with Censored and Uncensored Data, *Reliability*, **36**, 359-362.