مجله علوم آماری، بهار و تابستان ۱۳۹۴
جلد ۹، شماره ۱، ص ۱-۱۴

مقایسه چند روش آزمون فرض میانگین‌های جوامع لگ‌نرمال

صبا آقادوست[۱]، کامل عبدالله‌نژاد[۱]، فرهاد یغمایی[۱]، علی اکبر جعفری[۲]
[۱] گروه آمار، دانشگاه گلستان
[۲] گروه آمار، دانشگاه یزد

تاریخ دریافت: ۱۳۹۳/۲/۲۳   تاریخ آخرین بازنگری: ۱۳۹۴/۲/۲۳

چکیده : توزیع لگ‌نرمال برای توصیف داده‌های مثبت و دارای توزیع چوله به راست با میانگین کم و واریانس زیاد به‌کار می‌رود. این توزیع در بسیاری از علوم نظیر پزشکی، اقتصاد، زیست‌شناسی، علوم غذایی دارای کاربرد است. مقایسه میانگین‌های چند جامعه لگ‌نرمال همواره مورد توجه محققان بوده است ولی ارائه یک آماره آزمون کارآمد برای این مقایسه بسیار مشکل است. در اینجا روش‌های مختلفی برای آزمون برابری میانگین‌ها در چند جامعه لگ‌نرمال مورد مطالعه قرار می‌گیرند که عبارتند از آزمون F، آزمون‌های نسبت درستنمایی، روش‌های مقدار احتمال تعمیم‌یافته و روش آزمون محاسباتی. اندازه و توان این آزمون‌ها در مطالعه‌های شبیه‌سازی مقایسه خواهند شد.

واژه‌های کلیدی : توزیع لگ‌نرمال، آزمون فرض، اندازه آزمون، توان آزمون، برآورد ماکسیمم درستنمایی.

آدرس الکترونیک مسئول مقاله: کامل عبدالله‌نژاد، k.abdollahnezhad@gu.ac.ir
کد موضوع‌بندی ریاضی (۲۰۱۰): ۶۲F۰۳

۱ مقدمه

یکی از مسایل مهم در توزیع لگ‌نرمال، آزمون برابری میانگین‌های چند جامعه لگ‌نرمال است که مورد توجه بسیاری از آماردانان می‌باشد. دو روش کلاسیک برای این مساله، آزمون F و آزمون نسبت درستنمایی هستند. گیل (۲۰۰۴) آزمون نسبت درستنمایی اصلاح‌شده[۱] را برای آزمون برابری میانگین‌های چند جامعه لگ‌نرمال به‌کار برد و با مقایسه این روش‌ها به این نتیجه رسید که آزمون نسبت درستنمایی تصحیح‌شده نسبت به آزمون F و آزمون نسبت درستنمایی از توان بالاتری برخوردار است.

روش مقدار احتمال تعمیم‌یافته[۲]، که توسط تسوی و ویراهندی (۱۹۸۹) مطرح شد، هنگامی استفاده می‌شود که در مساله مورد بررسی پارامتر مزاحم وجود داشته باشد. این روش توسط بهبودیان و جعفری (۲۰۰۶)، لین و همکاران (۲۰۰۷)، تیان و وو (۲۰۰۷)، لین و ونگ (۲۰۰۹) و جعفری (۲۰۱۲) مورد استفاده قرار گرفته است. کریشنامورتی و متیو (۲۰۰۳) و عبداله‌نژاد و همکاران (۲۰۱۲) این روش را برای آزمون تساوی میانگین‌های دو جامعه لگ‌نرمال به‌کار بردند. لی (۲۰۰۹) نیز برای آزمون برابری میانگین‌های چند جامعه لگ‌نرمال، این روش را به‌کار برد. لین و وانگ (۲۰۱۳) ادعا کردند که به‌طورکلی روش مقدار احتمال تعمیم‌یافته برای توزیع‌های نامتقارن نظیر لگ‌نرمال چندان مناسب نیست و روش مقدار احتمال تعمیم‌یافته اصلاح‌شده را برای این مساله ارائه دادند و نشان دادند که این روش برای توزیع‌های متقارن و نامتقارن از توان بهتری برخوردار است.

پال و همکاران (۲۰۰۷) یک روش خودگردان پارامتری[۳] بر اساس برآورد ماکسیمم درستنمایی مطرح کردند که به روش آزمون محاسباتی[۴] معروف است. این روش نیازی به توزیع دقیق آماره آزمون ندارد و در مواردی‌که توزیع آماره آزمون به آسانی به‌دست نمی‌آید یا بسیار پیچیده است می‌توان آن‌را به‌کار برد. این روش

۱ Modified likelihood ratio test
۲ Generalized p-value
۳ Parameteric bootstrap
۴ Computational approach test

توسط چانگ و پال (۲۰۰۸) برای مساله بهرنس-فیشر، چانگ و همکاران (۲۰۱۰) برای تحلیل واریانس یک‌طرفه تحت برابری واریانس‌های خطا به‌کار برده شد و نتیجه‌گیری کردند که نسبت به روش‌های دیگر از لحاظ خطای نوع اول، عملکرد بهتری دارند. همچنین سلطانی و عبداله‌نژاد (۲۰۱۳) این روش را برای استنباط درباره میانگین یک جامعه لگ‌نرمال به‌کار بردند و آن را با سه روش دیگر مقایسه کردند. در اینجا، روش آزمون محاسباتی را برای آزمون برابری میانگین‌های چند جامعه لگ‌نرمال به‌کار می‌بریم.

فرض کنید X_{ij}، $i = 1, \ldots, k$، $j = 1, \ldots, n_i$ نمونه‌های تصادفی مستقل با اندازه n_i از k جامعه‌ی لگ‌نرمال باشند. بنابراین $\varphi_i = \exp(\mu_i + \frac{1}{2}\sigma_i^2)$ میانگین جامعه iام خواهد بود. می‌دانیم که

$$Y_{ij} = \log(X_{ij}) \sim N(\mu_i, \sigma_i^2), \quad i = 1, \ldots, k, \; j = 1, \ldots, n_i$$

بنابراین برآوردگر ماکسیمم درستنمایی μ_i و σ_i^2 را که به ترتیب با $\hat{\mu}_i$ و $\hat{\sigma}_i^2$ نشان داده می‌شوند، عبارتند از

$$\bar{Y}_i = \frac{1}{n_i}\sum_{j=1}^{n_i} Y_{ij}, \qquad S_i^2 = \frac{1}{n_i}\sum_{j=1}^{n_i}(Y_{ij} - \bar{Y}_i)^2$$

انجام آزمون فرضیه‌های

$$H_0 : \varphi_1 = \ldots = \varphi_k \quad \text{در مقابل} \quad H_1 : \varphi_i \neq \varphi_j \quad \text{برای برخی} \quad i \neq j,$$

اگر $\eta_i = \log(\varphi_i) = \mu_i + \frac{1}{2}\sigma_i^2$ باشد، معادل با آزمون فرضیه‌های

$$H_0 : \eta_i = \eta \; (i = 1, \ldots, k) \quad \text{در مقابل} \quad H_1 : \eta_i \neq \eta \quad \text{برای برخی} \quad i \neq j, \qquad (1)$$

است، که در آن η مقداری نامعلوم است. برآوردگر ماکسیمم درستنمایی η_i برابر با $\hat{\eta}_i = \hat{\mu}_i + \frac{1}{2}\hat{\sigma}_i^2$ است که به‌طورتقریبی دارای توزیع نرمال با میانگین η_i و واریانس $\nu_i = \frac{\sigma_i^2}{n_i} + \frac{(n_i-1)\sigma_i^4}{2n_i^2}$ است (ژو و همکاران، ۱۹۹۷).

در بخش ۲، روش‌های آزمون برابری میانگین‌های چند جامعه لگ‌نرمال شامل آزمون F، آزمون نسبت درستنمایی و اصلاح‌شده آن، روش مقدار احتمال تعمیم‌یافته

و اصلاح‌شده آن بیان می‌شوند. همچنین یک روش آزمون محاسباتی را برای این مساله ارائه می‌کنیم. در بخش ۳، اندازه و توان آزمون هر یک از روش‌ها به کمک شبیه‌سازی مورد مقایسه قرار می‌گیرند و نقاط ضعف و قوت هر یک بیان می‌شوند.

۲ روش‌های آزمون برابری میانگین‌های چند جامعه لگ‌نرمال

۱.۲ آزمون F

با فرض برابری σ_i^2 ها، آزمون فرضیه‌های (۱) با آزمون فرضیه‌های

$$H_0 : \mu_1 = \ldots = \mu_k, \quad \text{در مقابل} \quad H_1 : \mu_i \neq \mu_j \quad \text{برای برخی} \quad i \neq j,$$

معادل است که همان آزمون تساوی میانگین‌ها تحت برابری واریانس‌ها است. در این حالت از آزمون F با آماره

$$F = (\frac{S}{N-k})^{-1} \sum_{i=1}^{k} \frac{n_i(\bar{Y}_i - \bar{Y}_{..})^2}{k-1}$$

استفاده می‌شود، که در آن $\bar{Y}_{..} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k} n_i\bar{Y}_i$، $S = \sum_{i=1}^{k}(n_i - 1)S_i^2$ و $N = \sum_{i=1}^{k} n_i$. فرضیه H_0 رد می‌شود اگر $F > F_\alpha(k-1, N-k)$، که در آن $F_\alpha(k-1, N-k)$ صدک $100(1-\alpha)$ام توزیع فیشر با درجات آزادی $k-1$ و $N-k$ است.

۲.۲ آزمون نسبت درستنمایی

قرار دهید $\boldsymbol{\Psi} = (\mu_1, \ldots, \mu_k, \sigma_1^2, \ldots, \sigma_k^2)'$. لگاریتم تابع درستنمایی بر اساس مشاهدات تبدیل‌یافته Y_{ij} به‌صورت

$$\ell(\boldsymbol{\Psi}) \propto -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k} n_i \log(\sigma_i^2) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i} \frac{(y_{ij} - \mu_i)^2}{\sigma_i^2}$$

است. بنابراین $\hat{\boldsymbol{\Psi}} = (\bar{y}_1, ..., \bar{y}_k, s_1^2, \ldots, s_k^2)'$ برآورد ماکسیمم درستنمایی $\boldsymbol{\Psi}$ خواهد بود، که $\bar{y}_i$ و s_i^2 به‌ترتیب مقادیر مشاهده شده $\bar{Y}_i$ و S_i^2 هستند. تحت فرضیه (۱)

تابع لگاریتم درستنمایی به‌صورت

$$\ell(\boldsymbol{\Psi}_0) \propto -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k} n_i \log(\sigma_i^2) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}\frac{(y_{ij}-\eta+\frac{1}{2}\sigma_i^2)^2}{\sigma_i^2}$$

خواهد بود که در آن $\boldsymbol{\Psi}_0 = (\eta, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \ldots, \sigma_k^2)'$. برآورد ماکسیمم درستنمایی $\boldsymbol{\Psi}_0$ که برآورد ماکسیمم درستنمایی مقید[5] (RMLE) نامیده می‌شود، از حل دستگاه معادلات

$$\begin{aligned} \hat{\eta}_{RML} &= (\sum_{i=1}^{k}\frac{n_i}{\hat{\sigma}^2_{i(RML)}})^{-1}(\frac{N}{2}+\sum_{i=1}^{k}\frac{n_i\bar{Y}_i}{\hat{\sigma}^2_{i(RML)}}), \\ \hat{\sigma}^2_{i(RML)} &= -2+2(1+\frac{\sum_{j=1}^{n_i}(Y_{ij}-\hat{\eta}_{RML})^2}{n_i})^{\frac{1}{2}}, \quad i=1,\ldots,k, \end{aligned} \tag{2}$$

به‌دست می‌آید. گیل (۲۰۰۴) یک روش عددی برای به‌دست آوردن برآوردهای ماکسیمم درستنمایی مقید بر اساس این معادلات ارائه کرد. بنابراین $\tilde{\boldsymbol{\Psi}}_0 = (\hat{\eta}_{RML}, \hat{\sigma}^2_{1(RML)}, \ldots, \hat{\sigma}^2_{k(RML)})'$ برآوردگر ماکسیمم درستنمایی $\boldsymbol{\Psi}_0$ است و منهای دو برابر لگاریتم آماره آزمون نسبت درستنمایی به‌صورت

$$\omega = 2l(\hat{\boldsymbol{\Psi}}) - 2l(\tilde{\boldsymbol{\Psi}}_0)$$

خواهد بود. برای آزمون فرضیه (۱)، H_0 رد می‌شود اگر $\omega > \chi^2_\alpha(k-1)$، که در آن $\chi^2_\alpha(k-1)$ صدک $100(1-\alpha)$ام توزیع کای‌دو با $k-1$ درجه آزادی است.

۳.۲ آزمون نسبت درستنمایی اصلاح‌شده

گیل (۲۰۰۴) روش آزمون نسبت درستنمایی اصلاح‌شده را برای آزمون فرضیه (۱) با آماره

$$\omega^* = \omega(1-\omega^{-1}\log(\gamma))^2$$

ارائه داد، که در آن γ مطابق با اسکووارد (۲۰۰۱) به‌صورت

$$\gamma = \frac{(\boldsymbol{t}-\tilde{\boldsymbol{\tau}})'\tilde{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{t}-\tilde{\boldsymbol{\tau}})^{\frac{k}{2}}}{\omega^{\frac{k}{2}-1}(\hat{\boldsymbol{\lambda}}-\tilde{\boldsymbol{\lambda}})'(\boldsymbol{t}-\tilde{\boldsymbol{\tau}})}(\frac{|\tilde{\Sigma}|}{|\hat{\Sigma}|})^{\frac{1}{2}}$$

[5] Restricted maximum likelihood estimation

در نظر گرفته می‌شود به‌طوری‌که

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\lambda} &= (\frac{\mu_1}{\sigma_1^2},\ldots,\frac{\mu_k}{\sigma_k^2},\frac{1}{\sigma_1^2},\ldots,\frac{1}{\sigma_k^2})' \\
\boldsymbol{t} &= (n_1\bar{y}_1,\ldots,n_k\bar{y}_k,-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n_1}y_{1j}^2,\ldots,-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n_k}y_{kj}^2)' \\
\boldsymbol{\tau} &= (n_1\mu_1,\ldots,n_k\mu_k,-\frac{n_1}{2}(\mu_1^2+\sigma_1^2),\ldots,-\frac{n_k}{2}(\mu_k^2+\sigma_k^2))' \\
\Sigma &= \begin{bmatrix} \text{diag}\,\{n_i\sigma_i^2\}_{i=1,\ldots,k} & \text{diag}\,\{-n_i\mu_i\sigma_i^2\}_{i=1,\ldots,k} \\ \text{diag}\,\{-n_i\mu_i\sigma_i^2\}_{i=1,\ldots,k} & \text{diag}\,\{n_i\sigma_i^2(\mu_i^2+\frac{1}{2}\sigma_i^2)\}_{i=1,\ldots,k} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

از حل دستگاه معادلات در (۲)، $\hat{\mu}_{i(RML)} = \hat{\eta}_{RML} - \frac{1}{2}\hat{\sigma}^2_{i(RML)}$ حاصل می‌شود. $\tilde{\boldsymbol{\tau}}$، $\tilde{\boldsymbol{\lambda}}$ و $\tilde{\Sigma}$ از جایگذاری $\hat{\mu}_{i(RML)}$ و $\hat{\sigma}_{i(RML)}$ به‌ترتیب به جای μ_i و σ_i^2 در $\boldsymbol{\tau}$، $\boldsymbol{\lambda}$ و Σ به‌دست می‌آیند. همچنین $\hat{\boldsymbol{\lambda}}$ و $\hat{\Sigma}$ از جایگذاری $\hat{\mu}_i$ و $\hat{\sigma}_i$ به‌ترتیب به جای μ_i و σ_i^2 در $\boldsymbol{\lambda}$ و Σ به‌دست می‌آیند. بنابراین برای آزمون فرض (۱)، H_0 رد می‌شود اگر $\omega^* > \chi^2_\alpha(k-1)$.

۴.۲ روش‌های مقدار احتمال تعمیم‌یافته و اصلاح‌شده

مفهوم متغیر آزمون تعمیم‌یافته[۶] و مقدار احتمال تعمیم‌یافته توسط تسو و ویراهاندی (۱۹۸۹) معرفی شدند و برای انجام آزمون در مواردی که پارامتر مزاحم وجود دارد، به‌کار می‌رود. همچنین، مفهوم کمیت تعمیم‌یافته توسط ویراهاندی (۱۹۹۳) معرفی شد. در اینجا، این مفاهیم برای آزمون فرضیه (۱) به‌کار برده می‌شوند.

یک کمیت تعمیم‌یافته برای η_i توسط کریشنامورتی و متیو (۲۰۰۳) به‌صورت

$$T_i = \bar{y}_i - \frac{Z_i\, s_i}{U_i} + \frac{1}{2}\frac{n_i s_i^2}{U_i^2},\ \ i = 1,\ldots,k$$

ارائه شده که در آن

$$Z_i = \sqrt{n_i}\frac{\bar{Y}_i - \mu_i}{\sigma_i} \sim N(0,1),\ \ U_i^2 = \frac{n_i s_i^2}{\sigma_i^2} \sim \chi^2(n_i - 1)$$

[۶] Generalized test varaible

با در نظر گرفتن بردار $\boldsymbol{\Upsilon} = (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_k)'$ و ماتریس $k \times (k-1)$ به‌صورت

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

آزمون فرضیه (۱) با آزمون فرضیه‌های

$$H_0 : H\boldsymbol{\Upsilon} = \mathbf{0} \quad \text{در مقابل} \quad H_1 : H\boldsymbol{\Upsilon} \neq \mathbf{0}, \qquad (3)$$

معادل است، که در آن $\mathbf{0}$ بردار صفر مرتبه $k-1$ است. بنابرین بردار کمیت تعمیم‌یافته برای $H\boldsymbol{\Upsilon}$ به‌صورت $\boldsymbol{T} = H(T_1, \ldots, T_k)'$ خواهد بود. فرض کنید $\boldsymbol{\mu}_T$ و Σ_T به ترتیب بردار میانگین و ماتریس کوواریانس $\boldsymbol{T}$ باشد. فرم استاندارد شده $\boldsymbol{T}$ به‌صورت $\tilde{\boldsymbol{T}} = \Sigma_T^{-\frac{1}{2}}(\boldsymbol{T} - \mu_T)$ است. اگر $\tilde{\boldsymbol{t}}$ مقدار مشاهده شده $\tilde{\boldsymbol{T}}$ باشد مقدار احتمال تعمیم‌یافته برای آزمون فرضیه (۳) به‌صورت

$$\begin{aligned} p &= P(\|\tilde{\boldsymbol{T}}\|^2 \geq \|\tilde{\boldsymbol{t}}\|^2 | H_0) \\ &= P((\boldsymbol{T} - \mu_T)'\Sigma_T^{-1}(\boldsymbol{T} - \mu_T) \geq \mu_T'\Sigma_T^{-1}\mu_T) \end{aligned}$$

است. برای بیان روش اصلاح‌شده لین و وانگ (۲۰۱۳)، فرض کنید $\tilde{e}$ یک نقطه دلخواه در دامنه $\tilde{\boldsymbol{T}}$ و e نقطه متناظر با $\tilde{e}$ در دامنه $\boldsymbol{T}$ باشد و $d_{\tilde{e}} = E_{\tilde{T}}(\|\tilde{\boldsymbol{T}} - \tilde{e}\|)$. برای آزمون فرضیه (۳) مقدار احتمال تعمیم‌یافته به‌صورت

$$p = P\{d_e \geq E_{\tilde{T}}(\|\Sigma_T^{-\frac{1}{2}}(\boldsymbol{T} - \boldsymbol{\Upsilon}_0)\|) | \bar{\boldsymbol{y}}, \boldsymbol{s}^2, \boldsymbol{\Upsilon}_0 = \mathbf{0}\}$$

تعریف می‌شود، که در آن $\bar{\boldsymbol{y}} = (\bar{y}_1, \bar{y}_2, \ldots, \bar{y}_k)'$ و $\boldsymbol{s}^2 = (s_1^2, s_2^2, \ldots, s_k^2)'$.

۵.۲ روش آزمون محاسباتی

نخست لازم است که‌این فرض به‌صورت تابعی از یک اسکالر مناسب بیان شود. بدین منظور θ را به‌صورت

$$\theta = h(\mu_i; \sigma_i^2) = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{\nu_i}(\eta_i - \bar{\eta})^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{\eta_i^2}{\nu_i} - \frac{(\sum_{i=1}^{k} \frac{\eta_i}{\nu_i})^2}{\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{\nu_i}}$$

تعریف می‌کنیم، که در آن $\bar{\eta} = \frac{\sum_{i=1}^{k} \frac{\eta_i}{\nu_i}}{\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{\nu_i}}$ و $\nu_i = \frac{\sigma_i^2}{n_i} + \frac{(n_i-1)\sigma_i^4}{2n_i^2}$. بنابراین آزمون فرضیه (۱) با آزمون فرضیه

$$H_0 : \theta = 0 \quad \text{در مقابل} \quad H_1 : \theta > 0 \tag{۴}$$

معادل است. روش آزمون محاسباتی بر اساس گام‌های زیر است:

گام ۱: برآوردگرهای ماکسیمم درستنمایی پارامترهای μ_i و σ_i^2 یعنی $\hat{\mu}_i = \bar{Y}_i$ و $\hat{\sigma}_i^2 = S_i^2$ را به‌دست آورده و برآوردگر ماکسیمم درستنمایی θ یعنی $\hat{\theta} = h(\hat{\mu}_i; \hat{\sigma}_i^2)$ به‌دست آید.

گام ۲: تحت فرض H_0، برآوردگر ماکسیمم درستنمایی $\sigma_1^2, \ldots, \sigma_k^2$ و η که به‌ترتیب با $\hat{\sigma}_{1(RML)}^2, \ldots, \hat{\sigma}_{k(RML)}^2$ و $\hat{\eta}_{RML}$ نشان داده می‌شود، از حل دستگاه معادلات (۲) به‌دست آید. بنابراین

$$\hat{\mu}_{i(RML)} = \hat{\eta}_{RML} - \frac{1}{2}\hat{\sigma}_{i(RML)}^2, \; i = 1, \ldots, k$$

گام ۳: برای $i = 1, \ldots, k$ نمونه مصنوعی $Y_{i1}, \ldots, Y_{in_i}$ از توزیع $N(\hat{\mu}_{i(RML)}, \hat{\sigma}_{i(RML)}^2)$ تولید شود. برای هر کدام از این نمونه‌ها برآورد ماکسیمم درستنمایی μ_i و σ_i^2 به‌دست آورده شود تا برآورد ماکسیمم درستنمایی θ به‌دست آید.

گام ۴ : گام ۳ به تعداد دفعات زیاد (M بار) انجام شود و برآوردهای به‌دست آمده θ از کوچک به بزرگ مرتب گردد:

$$\hat{\theta}_{(1)} \leq \hat{\theta}_{(2)} \leq \ldots \leq \hat{\theta}_{(M)}$$

برای آزمون فرضیه (۴) نقطه بحرانی $\hat{\theta}_U = \hat{\theta}_{((1-\alpha)M)}$ در نظر گرفته می‌شود و با $\hat{\theta}$ در گام اول مقایسه می‌شود. اگر $\hat{\theta} > \hat{\theta}_U$ فرض H_0 رد می‌شود، در غیر این صورت فرض H_0 پذیرفته می‌شود. مقدار احتمال هم برابر با $\frac{1}{M}\sum_{l=1}^{M} I(\hat{\theta}_{(l)} > \hat{\theta})$ است.

۳ مطالعه شبیه‌سازی

در این قسمت برای مقایسه اندازه و توان روش‌های معرفی شده در بخش ۲ از شبیه‌سازی مونت‌کارلو استفاده می‌شود که نتایج آن در جدول ۲ آمده است. بدین

منظور نمونه تصادفی به حجم n_i از جامعه لگ‌نرمال با پارامترهای μ_i و σ_i^2 تولید شده‌است. تعداد تکرارها ۵۰۰۰ و برای روش آزمون محاسباتی $M = ۱۰۰۰۰$ در نظر گرفته‌شد. برای محاسبه اندازه و توان آزمون، طرح‌هایی در جدول ۱ در نظر گرفته‌شد. توجه شود که برای محاسبه اندازه آزمون، پارامترهای μ_i و σ_i^2 طوری در نظر گرفته‌شد که میانگین‌های k جامعه برابر باشند (طرح‌های ۱ تا ۸) و برای محاسبه توان آزمون، طرح‌های ۹ تا ۱۲ در نظر گرفته‌شد. در جدول ۲، LRT ،CAT، MLRT، GPV، MGPV و F به‌ترتیب نمایانگر روش آزمون محاسباتی، آزمون نسبت درستنمایی، آزمون نسبت درستنمایی اصلاح‌شده، روش مقدار احتمال تعمیم‌یافته، روش مقدار احتمال تعمیم‌یافته‌ی اصلاح‌شده و آزمون F هستند.

جدول ۱: طرح‌های شبیه‌سازی

طرح	$(\mu_1, \ldots, \mu_k)$	$(\sigma_1^2, \ldots, \sigma_k^2)$
۱	(−۰/۵، −۰/۵)	(۴،۴)
۲	(−۱،۰)	(۳،۱)
۳	(۰/۵،۰/۵،۰/۵)	(۱،۱،۱)
۴	(۱، ۱/۵ ،۰/۵)	(۲،۱،۳)
۵	(−۱/۵،−۱/۵،−۱/۵، −۱/۵)	(۴،۴،۴،۴)
۶	(۰/۵،۰،−۰/۵، −۱)	(۱،۲،۳،۴)
۷	(۰،۰،۰،۰،۰)	(۲/۵،۲/۵،۲/۵،۲/۵،۲/۵)
۸	(۱،۰،−۱،۲،۰/۵)	(۴،۶،۸،۲،۵)
۹	(۱/۵،۱/۵)	(۰/۵،۱)
۱۰	(۲،۱،۲)	(۱/۵،۱،۲)
۱۱	(۲/۵،۱/۵،۱/۵،۱/۵)	(۱،۱،۱،۱)
۱۲	(۳،۳/۵،۳/۵،۳،۴)	(۱/۵،۱،۱/۷۵،۱/۲۵،۲)

۱– اندازه آزمون روش آزمون محاسباتی معمولا نزدیک به سطح معنی‌داری است. در مواردی که حجم نمونه بسیار کوچک است این روش محافظه‌کار[۷] است یعنی اندازه آزمون کمتر از سطح معنی‌داری است و با افزایش حجم نمونه، به سطح معنی‌داری نزدیک می‌شود.

۷ Conservative

جدول ۲: اندازه و توان آزمون‌ها در سطح معناداری ۰/۰۵

طرح	$(n_1, \ldots, n_k)$	CAT	LRT	MLRT	GPV	MGPV	F
۱	(۵،۵)	۰/۰۱۶۶	۰/۰۸۷۶	۰/۰۵۵۴	۰/۰۰۱۴	۰/۰۰۱۴	۰/۰۵۴۸
	(۱۰،۱۵)	۰/۰۳۹۶	۰/۰۶۲۴	۰/۰۴۸۴	۰/۰۰۹۶	۰/۰۰۸۶	۰/۰۵۱۰
	(۳۰،۳۰)	۰/۰۴۸۲	۰/۰۵۲۶	۰/۰۴۹۲	۰/۰۳۰۲	۰/۰۲۸۰	۰/۰۵۳۰
۲	(۵،۵)	۰/۰۳۸۲	۰/۰۹۱۰	۰/۰۵۶۰	۰/۰۱۱۰	۰/۰۰۹۸	۰/۱۷۷۰
	(۱۰،۱۵)	۰/۰۴۴۴	۰/۰۵۸۸	۰/۰۴۵۴	۰/۰۲۲۲	۰/۰۲۱۴	۰/۳۳۹۴
	(۳۰،۳۰)	۰/۰۴۷۴	۰/۰۵۴۴	۰/۰۴۹۸	۰/۰۳۶۸	۰/۳۶۲	۰/۷۶۸۶
۳	(۵،۵،۵)	۰/۰۲۴۸	۰/۱۰۲۶	۰/۰۵۱۴	۰/۰۰۳۶	۰/۰۰۳۰	۰/۰۵۰۲
	(۱۰،۱۵،۱۰)	۰/۰۴۵۰	۰/۰۶۹۰	۰/۰۵۰۰	۰/۰۲۰۲	۰/۰۱۸۸	۰/۰۴۸۸
	(۳۰،۳۰،۳۰)	۰/۰۴۷۸	۰/۰۵۷۶	۰/۰۵۱۲	۰/۰۳۵۶	۰/۰۳۵۰	۰/۰۴۷۰
۴	(۵،۵،۵)	۰/۰۲۷۸	۰/۱۰۲۶	۰/۰۵۳۶	۰/۰۰۵۴	۰/۰۰۵۰	۰/۱۳۱۴
	(۱۰،۱۵،۱۰)	۰/۰۵۱۰	۰/۰۷۷۲	۰/۰۵۷۰	۰/۰۳۰۰	۰/۰۲۸۲	۰/۳۳۹۲
	(۳۰،۳۰،۳۰)	۰/۰۴۵۸	۰/۰۵۳۰	۰/۰۴۷۴	۰/۰۳۱۲	۰/۰۳۰۲	۰/۶۷۳۴
۵	(۵،۵،۵،۵)	۰/۰۲۰۲	۰/۱۱۱۶	۰/۰۴۶۰	۰/۰۰۲۸	۰/۰۰۲۸	۰/۰۴۴۴
	(۱۰،۱۵،۱۰،۱۵)	۰/۰۴۶۶	۰/۰۷۷۴	۰/۰۵۳۴	۰/۰۲۳۲	۰/۰۲۲۶	۰/۰۴۸۴
	(۳۰،۳۰،۳۰،۳۰)	۰/۰۴۷۸	۰/۰۵۸۶	۰/۰۵۰۴	۰/۰۳۸۲	۰/۰۳۷۴	۰/۰۵۱۶
۶	(۵،۵،۵،۵)	۰/۰۲۴۶	۰/۱۰۹۶	۰/۰۴۳۸	۰/۰۰۴۶	۰/۰۰۴۲	۰/۱۸۹۰
	(۱۰،۱۵،۱۰،۱۵)	۰/۰۴۹۴	۰/۰۷۹۰	۰/۰۵۲۴	۰/۰۲۳۸	۰/۰۲۳۴	۰/۴۶۳۶
	(۳۰،۳۰،۳۰،۳۰)	۰/۰۴۸۶	۰/۰۵۸۸	۰/۰۵۱۰	۰/۰۳۴۴	۰/۰۳۳۰	۰/۹۱۰۲
۷	(۵،۵،۵،۵،۵)	۰/۰۱۴۸	۰/۱۳۳۲	۰/۰۴۸۶	۰/۰۰۱۰	۰/۰۰۰۶	۰/۰۴۴۰
	(۱۰،۱۵،۱۰،۱۵،۱۰)	۰/۰۳۶۴	۰/۰۷۷۴	۰/۰۵۰۶	۰/۰۰۸۶	۰/۰۰۸۶	۰/۰۵۰۰
	(۳۰،۳۰،۳۰،۳۰،۳۰)	۰/۰۴۵۰	۰/۰۵۸۲	۰/۰۴۸۶	۰/۰۲۷۶	۰/۰۲۷۰	۰/۰۴۴۴
۸	(۵،۵،۵،۵،۵)	۰/۰۲۱۶	۰/۱۴۱۲	۰/۰۴۹۸	۰/۰۰۴۶	۰/۰۰۴۲	۰/۳۱۹۶
	(۱۰،۱۵،۱۰،۱۵،۱۰)	۰/۰۴۹۲	۰/۰۸۲۴	۰/۰۵۲۰	۰/۰۲۲۲	۰/۰۲۱۲	۰/۸۰۶۶
	(۳۰،۳۰،۳۰،۳۰،۳۰)	۰/۰۴۹۴	۰/۰۶۲۴	۰/۰۵۱۸	۰/۰۳۲۴	۰/۰۳۱۸	۰/۹۹۸۲
۹	(۵،۵)	۰/۰۳۵۶	۰/۰۹۵۶	۰/۰۵۰۸	۰/۰۰۶۲	۰/۰۰۵۰	۰/۰۵۳۲
	(۱۰،۱۵)	۰/۰۵۱۶	۰/۱۱۰۴	۰/۰۸۷۶	۰/۰۲۹۴	۰/۰۲۷۸	۰/۰۷۱۲
	(۳۰،۳۰)	۰/۱۳۱۸	۰/۱۶۸۸	۰/۱۵۷۴	۰/۱۲۳۰	۰/۱۲۱۶	۰/۰۵۳۶
۱۰	(۵،۵،۵)	۰/۱۲۰۴	۰/۳۰۹۴	۰/۱۸۴۰	۰/۰۱۷۲	۰/۰۱۴۲	۰/۲۰۴۲
	(۱۰،۱۵،۱۰)	۰/۵۴۴۰	۰/۶۲۹۲	۰/۵۹۸۸	۰/۳۵۳۴	۰/۳۳۴۰	۰/۵۶۵۸
	(۳۰،۳۰،۳۰)	۰/۹۶۰۸	۰/۹۴۶۴	۰/۹۴۶۸	۰/۹۳۹۶	۰/۹۳۸۸	۰/۹۲۵۶
۱۱	(۵،۵،۵،۵)	۰/۰۱۴۸	۰/۱۳۳۲	۰/۰۴۸۶	۰/۰۰۱۰	۰/۰۰۰۶	۰/۰۴۴۰
	(۱۰،۱۵،۱۰،۱۵)	۰/۴۰۸۸	۰/۵۹۲۶	۰/۴۴۸۸	۰/۱۹۴۲	۰/۱۹۱۸	۰/۶۰۴۰
	(۳۰،۳۰،۳۰،۳۰)	۰/۹۳۲۸	۰/۹۵۳۰	۰/۹۲۸۸	۰/۸۹۸۴	۰/۸۹۹۶	۰/۹۸۹۶
۱۲	(۵،۵،۵،۵،۵)	۰/۰۵۲۸	۰/۳۰۸۸	۰/۱۰۴۲	۰/۰۰۶۸	۰/۰۰۶۰	۰/۱۶۸۸
	(۱۰،۱۵،۱۰،۱۵،۱۰)	۰/۱۹۸۴	۰/۴۵۳۲	۰/۳۱۳۰	۰/۰۸۳۲	۰/۰۸۰۲	۰/۴۱۱۴
	(۳۰،۳۰،۳۰،۳۰،۳۰)	۰/۷۶۶۶	۰/۸۵۰۶	۰/۸۰۰۲	۰/۶۹۴۰	۰/۶۹۳۶	۰/۸۴۴۴

۲- اندازه آزمون روش مقدار احتمال تعمیم‌یافته و اصلاح‌شده آن کوچک‌تر از اندازه آزمون سایر روش‌ها هستند، این دو روش خصوصا برای حجم نمونه‌های کوچک بسیار محافظه‌کار هستند. با افزایش حجم نمونه اندازه آزمون این دو روش به سطح معنی‌داری نزدیک می‌شوند. البته بر خلاف آنچه که لین و وانگ (۲۰۱۳) ادعا کردند روش مقدار احتمال تعمیم‌یافته و اصلاح‌شده آن در آزمون برابری میانگین‌های لگ‌نرمال تفاوت چندانی با هم ندارند.

۳- آزمون F تنها زمانی مناسب عمل می‌کند که σ_i^2هابرابر باشند. در مواردی که σ_i^2ها نابرابرند اندازه این آزمون بیشتر از سطح معنی‌داری است.

۴- اندازه آزمون روش نسبت درستنمایی در تمامی موارد بیشتر از سطح معنی‌داری است، در حالی‌که اصلاح‌شده آن نزدیک به سطح معنی‌داری و در مواردی بالاتر از آن است.

۵- همان‌طور که ملاحظه می‌شود توان آزمون مقدار احتمال تعمیم‌یافته و اصلاح‌شده آن از توان آزمون‌های دیگر کمتر است. توان آزمون محاسباتی از توان دو آزمون مذکور بیشتر اما از توان آزمون‌های دیگر کمتر است و با افزایش حجم نمونه، توان همه آزمون‌ها افزایش می‌یابد. در اینجا ذکر این نکته ضروری است که هر چه آزمون محافظه‌کارتر باشد، توانش کمتر و هر چه لیبرال‌تر باشد توانش بیشتر است. بنابراین مقایسه توان این آزمون‌ها منطقی به‌نظر نمی‌آید. در واقع مقایسه توان دو آزمون وقتی مسیر است که دارای اندازه آزمون برابر باشند.

بحث و نتیجه‌گیری

مطالعه شبیه‌سازی نشان داد که روش‌های آزمون محاسباتی، مقدار احتمال تعمیم‌یافته و اصلاح‌شده دارای اندازه کمتر از سطح معنی‌داری هستند و در بین آنها روش آزمون محاسباتی به سطح معنی‌داری نزدیکتر بوده و به همین دلیل از اهمیت بیشتری برخوردار است. چون آزمون F در اکثر موارد بسیار لیبرال و آزمون نسبت درستنمایی هم در همه موارد لیبرال است این دو آزمون برای فرضیه مورد نظر در مقایسه با روش‌های دیگر مناسب نیستند. در آزمون نسبت درستنمایی تعمیم‌یافته،

اندازه آزمون در همه موارد به سطح معنی‌داری نزدیک است هر چند که در مواردی لیبرال است.

مراجع

Abdollahnezhad, K., Babanezhad, M. and Jafari A. A. (2012), Inference on Difference of Means of Two Lognormal Distributions a Generalized Approach, *Journal of Statisical and Econemtric Methods*, **1**, 125-131.

Behboodian, J. and Jafari, A. A. (2006), Generalized Inference for the Common Mean of Several Lognormal Populations, *Journal of Statistical Theory and Applications*, **5**, 240-259.

Chang, C. and Pal, N. (2008), A Revisit to the Behrens-Fisher Problem: Comparison of Five Test Methods, *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, **37**, 1064-1085.

Chang, C., Pal, N., Lim, W. K. and Lin, J. J. (2010), Comparing Several Population Means: A Parametric Bootstrap Method and Its Comparison with Usual ANOVA F test as Well as ANOM, *Computational Statistics*, **25**, 71-95.

Gill, P. S. (2004), Small-Sample Inference for the Comparison of Means of Log-Normal Distributions, *Biometrics* **60**, 525-527.

Jafari, A. A. (2012), Inferences on the Ratio of Two Generalized Variances: Independent and Correlated Cases, *Statistical Methods and Applications*, **21**, 297-314.

Krishnamoorthy, K. and Mathew, T. (2003), Inference on the Means of Log-Normal Distributions Using Generalized P-Value and Generalized Confidence Intervals, *Journal of Statistical Planning and Infernce*, **115**, 103-121.

Li, X. (2009), A Generalized P-Value Approach for Comparing the Means of Several Log-Normal Populations, *Statistics and Probability Letters*, **79**, 1404-1408.

Lin, S. H., Lee, J. C. and Wang, R. S. (2007), Generalized Inferences on the Common Mean Vector of Several Multivariate Normal Populations, *Journal of Statistical Planning and Infernce*, **137**, 2240-2249.

Lin, S. H. and Wang, R. S. (2009), Inferences on a Linear Combination of K Multivariate Normal Mean Vector, *Journal of Applied Statistics*, **36**, 415-428.

Lin, S. H. and Wang, R. S. (2013), Modified Method on the Means for Several Log-Normal Distributions, *Biometrics*, **60**, 525-527.

Pal, N., Lim, W. K. and Ling, C. H. (2007), A Computational Approach to Statistical Inferences, *Journal of Applied Probability and Statistics*, **2**, 13-35.

Scovgaard, I. M. (2001), Likelihood Asymptotics, *Scandinavian Journal of Statistics*, **28**, 3-32.

Soltani, A. R. and Abdollahnezhad, K. (2013), Testing the Log-Normal Mean: Comparison of Four Test Methods, *Journal of Applied Probability and Statistics*, **8**, 1-10.

Tian, L. and Wu, J. (2007), Inferences on the Common Mean of Several Log-Normal Populations: The Generalized Variable Approach, *Biometrical Journal*, **49**, 944-951.

Tsui, K. W. and Weerahadi, S. (1989), Generalized P-Value in Significance Testing of Hypothesis in the Presence of Nuisance Parameters, *Journal of the American Statistical Association*, **84**, 602-607.

Weerahandi, S. (1993), Generalized Confidence Intervals. *Journal of the American Statistical Association*, **88**, 899-905.

Zhou, X. H., Gao, S. and Hui, S. L. (1997), Methods for Comparing the Means of Two Independent Lognormal Samples, *Biometrics*, **53**, 1129-1135.