مجله علوم آماری، بهار و تابستان ۱۳۹۴
جلد ۹، شماره ۱، ص ۱۱۹-۱۴۱

چندجمله‌ای‌های استرلینگ و تعمیمی جدید از توزیع وایبول - هندسی

شهرام یعقوب‌زاده شهرستانی [۱]، علی شادرخ [۲]، مسعود یارمحمدی [۲]
[۱] گروه آمار، دانشگاه پیام‌نور مرکز صومعه‌سرا
[۲] گروه آمار، دانشگاه پیام‌نور مرکز تهران شرق

تاریخ دریافت: ۱۳۹۳/۶/۲۵ تاریخ آخرین بازنگری: ۱۳۹۴/۲/۲۴

چکیده : در این مقاله یک توزیع پنج پارامتری جدید به نام توزیع بتاوایبول هندسی که نرخ شکست آن افزایشی، کاهشی و گودالی شکل است معرفی می‌شود و به کمک چندجمله‌ای‌های استرلینگ، تابع چگالی احتمال و برخی از ویژگی‌های آن مانند تابع‌های نرخ خطر و بقا، گشتاورها و چندک، آنتروپی‌های رنی و شانون، گشتاورهای آماره‌های مرتب، میانگین مانده عمر و میانگین مانده عمر معکوس به‌دست آورده می‌شود. همچنین با روش ماکسیمم درستنمایی برآورد پارامترها ارائه و با مقایسه برازش توزیع بتا وایبول هندسی و چند زیرمدل آن به یک مجموعه داده واقعی، نشان داده می‌شود که توزیع بتا وایبول هندسی برازش بهتری به این مجموعه داده دارد.

واژه‌های کلیدی : توزیع وایبول، چندجمله‌ای‌های استرلینگ، توزیع بتاوایبول هندسی، تابع نرخ خطر، توزیع بتا.

آدرس الکترونیک مسئول مقاله: شهرام یعقوب زاده شهرستانی ، yagoubzade@gmail.com
کد موضوع‌بندی ریاضی (۲۰۱۰): ۶۲E۱۰

۱ مقدمه

توزیع وایبول توسط وایبول (۱۹۵۱) معرفی شد، امروزه متداول‌ترین مدل مورد استفاده در مطالعات قابلیت اعتماد است و به طور وسیع در شاخه‌های مختلف مهندسی برای مدل‌بندی زمان‌های شکست و توزیع عمر داده‌ها کاربرد دارد. با این حال برای مدل‌بندی پدیده‌هایی که تابع نرخ شکست آ نها غیریکنواخت است، به‌ویژه برای داده‌های مربوط به مطالعات قابلیت اعتماد و زیست‌شناسی که تابع نرخ خطر آنها به شکل گودالی[۱] هستند مدل مناسبی نیست. بنابراین در سال‌های اخیر تحقیقات زیادی درباره توسیع و تعمیم توزیع وایبول صورت گرفت و مدل‌های متنوعی از تعمیم وایبول ارائه شد که تابع نرخ خطر آنها به‌ازای مقادیر متفاوت پارامترها نزولی، صعودی، نزولی-صعودی و صعودی-نزولی است. یک گروه از این مدل‌ها، یک خانواده توزیع‌های معروف به خانواده توزیع‌های $(B-G)$ (ایوگن و همکاران، ۲۰۰۲) با تابع توزیع تجمعی به‌صورت

$$F(x;a,b)=\frac{1}{B(a,b)}\int_0^{G(x)} t^{a-1}(1-t)^{b-1}dt \qquad (1)$$

است، که در آن $b>0$ ،$a>0$ و $B(a,b)=\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx$. تابع چگالی احتمال متناظر با (۱) برابر است با

$$f(x;a,b)=\frac{g(x)}{B(a,b)}((G(x))^{a-1}(1-G(x))^{b-1},\ \ a>0,\ b>0 \qquad (2)$$

اخیرا مقالاتی درباره خانواده توزیع‌های (۲) به وسیله‌ی نویسندگان مختلفی ارائه شده است که می‌توان به نداراجاوگوپتا (۲۰۰۴)، نداراجا و کوتز (۲۰۰۴، ۲۰۰۵)، کونگ و همکاران (۲۰۰۷)، آکینست و همکاران (۲۰۰۸)، پکسیم و همکاران (۲۰۱۰)، ناصر و ندا (۲۰۱۱) و سوزا و همکاران (۲۰۱۰) اشاره کرد. کردریو و لمونته (2011a) بتا-لاپلاس، کردریو و لمونته (2011b) بتا-نیم‌کوشی، سیلوا و همکاران (۲۰۱۰) بتا وایبول تعدیل یافته، پارنابا و همکاران (۲۰۱۱) بتا-بور ۱۲، بیردام و همکاران (۲۰۱۳) و کردریو و همکاران (۲۰۱۳) بتا وایبول هندسی را

[۱] Bathtub

معرفی و خصوصیات آن را بررسی کردند. در این مقاله به جای $G(x)$ در رابطه (۱) تابع توزیع تجمعی وایبول هندسی قرار داده می‌شود تا توزیع بتا وایبول هندسی معرفی شده و به کمک چندجمله‌ای‌های استرلینگ ویژگی‌های آن به‌دست آورده می‌شوند. به‌علاوه نقش به‌سزای چندجمله‌ای‌های استرلینگ در محاسبه خصوصیات توزیع بتا وایبول هندسی نشان داده می‌شود.

در بخش ۲ مفاهیم اولیه بیان شده‌اند. در بخش ۳ چندجمله‌ای‌های استرلینگ و در بخش ۴ توزیع بتا وایبول هندسی معرفی شده و تابع چندک، تابع خطر و بعضی از خواص آن ارائه شده‌اند. در بخش ۵ گشتاورها و تابع مولد گشتاور محاسبه گردیده‌اند. در بخش ۶ آنتروپی‌های رنی و شانون به‌دست آمده است. در بخش ۷ گشتاورهای آماره‌های مرتب و در بخش ۸ تابع میانگین مانده عمر و در بخش ۹ تابع میانگین مانده عمر معکوس توزیع بتا وایبول هندسی به‌دست آمده‌اند. در بخش ۱۰ برآورد ماکسیمم درستنمایی پارامترهای توزیع بتا وایبول هندسی را به‌دست آورده و در بخش ۱۱ با استفاده از یک مجموعه داده واقعی این توزیع با بعضی از زیرمدل‌های آن مانند توزیع نمایی تعمیم یافته (GE)، توزیع بتا-نمایی (BE)، توزیع بتا-وایبول (BW) مقایسه و نشان داده شده است که توزیع بتا وایبول هندسی برازش بهتری بر داده‌ها دارد. در انتها بخش ۱۲ به بحث و نتیجه‌گیری اختصاص یافته است.

۲ مفاهیم اولیه

اگر $X_1,\ldots,X_n$ متغیرهای تصادفی مستقل و دارای توزیع وایبول با پارامترهای α و β باشند، آنگاه تابع چگالی احتمال آن عبارت است از:

$$g(x;\alpha,\beta)=\alpha\beta^{\alpha}x^{\alpha-1}e^{(\beta x)^{\alpha}},\ \ x>0,\ \alpha>0,\ \beta>0$$

فرض کنید N یک متغیر تصادفی متعلق به خانواده توزیع سری‌های توانی با توزیع هندسی به‌صورت

$$P(N=n)=(1-\theta)\theta^{n-1},\ \ n=1,\ldots$$

است. با فرض $X_{(1)} = \min(X_1, \ldots, X_n)$ تابع توزیع شرطی $X_{(1)}|N = n$ عبارت است از: $G_{X_{(1)}} = 1 - e^{-n(\beta x)^\alpha}$ یعنی $X_{(1)}|N = n$ دارای توزیع وایبول با پارامترهای α و $\beta n^{\frac{1}{\alpha}}$ است. از طرفی با توجه به

$$g_{X_{(1)},N}(x,n) = g_{(X_{(1)}|N=n)}(x)P(N = n) = n(1-\theta)\theta^{n-1}\alpha\beta x^{\alpha-1}e^{-n(\beta x)^\alpha}$$

توزیع حاشیه‌ای $X_{(1)}$ عبارت است از:

$$f(x;\alpha,\beta,\theta) = \frac{\alpha\beta x^{\alpha-1}(1-\theta)e^{-(\beta x)^\alpha}}{(1-\theta e^{-(\beta x)^\alpha})^2}$$

که توزیع وایبول هندسی (WG) نامیده می‌شود. به عبارت دیگر تابع چگالی WG عبارت است از:

$$f(x;\alpha,\beta,\theta) = \alpha\beta x^{\alpha-1}(1-\theta)e^{-(\beta x)^\alpha}(1-\theta e^{-(\beta x)^\alpha})^2 \tag{3}$$

که در آن $1 > \theta > 0$، $\beta > 0$، $\alpha > 0$ و $x > 0$. تابع توزیع تجمعی (WG) برابر است با $\frac{1 - e^{-(\beta x)^\alpha}}{1 - \theta e^{-(\beta x)^\alpha}}$.

۳ چندجمله‌ای‌های استرلینگ

قاعده‌ی استرلینگ: به‌ازای هر z و δ که $|z| \leq 1$ و $\delta \in R$ داریم:

$$(\log(1-z))^\delta = (-z)^\delta + (-1)^\delta \delta \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n(n+\delta)z^{n+\delta} \tag{4}$$

ضرایب $\psi_n(\cdot)$ ها چندجمله‌ای‌های استرلینگ[۲] نام دارند و در رابطه

$$\begin{aligned}\Psi_{n-1}(w) = &\frac{(-1)^{n-1}}{(n+1)!}[H_n^{n-1} - \frac{w+2}{(n+2)}H_n^{n-2} + \frac{(w+2)(w+3)}{(n+2)(n+3)}H_n^{n-3} - \cdots \\ &+ (-1)^{n-1}\frac{(w+2)(w+3)\cdots(w+n)}{(n+2)(n+3)\cdots(2n)}H_n^0]\end{aligned} \tag{5}$$

صدق می‌کنند، که در آن H_n^m ها اعداد صحیح مثبتی هستند که در رابطه بازگشتی

$$H_{n+2}^m = (2n+1-m)H_n^m + (n-m+1)H_n^{m-1}$$

[۲] Sterling polynomials

صدق می‌کنند، که $H_{n+1}^{0} = 1 \times 3 \times \cdots \times (2n+1)$ و $H_{0}^{0} = H_{n+1}^{n} = 1$.
فلاجونت وادلیزکو (۱۹۹۰) نشان دادند که رابطه (۴) به‌طور مطلق همگراست.

کاستلارس و لمونته (۲۰۱۴) به کمک روابط (۴) و (۵) شش $\psi_n(\cdot)$ اول را به‌صورت

$$
\begin{aligned}
\psi_0(w) &= \frac{1}{2},\\
\psi_1(w) &= \frac{2+3w}{24},\\
\psi_2(w) &= \frac{w+w^2}{48},\\
\psi_3(w) &= \frac{-8-10w+15w^2+15w^3}{5760},\\
\psi_4(w) &= \frac{-6w-7w^2+2w^3+3w^4}{11520},\\
\psi_5(w) &= \frac{96+140w-224w^2-315w^3+63w^5}{2903040}
\end{aligned}
$$

ارائه کرد و نحوه محاسبه H_n^m ها و $\psi_n(\cdot)$ ها را در R ارائه داده که در جدول ۱ آمده است. در حالت کلی داریم $\psi_n(w) = \mathrm{psi}(w,n)$ و منظور از v، $\{H_p^0, H_p^1, \ldots, H_p^{p-1}\}$ و منظور از w، $\{H_{p+1}^0, H_{p+1}^1, \ldots, H_{p+1}^p\}$ است.

جدول ۱: الگوریتم نحوه محاسبه H_n^m ها و $\psi_n(\cdot)$ ها

الگوریتم محاسبه $\psi_n(0)$ ها	الگوریتم محاسبه H_n^m ها
psi <- function(x,p)	Stnumbers <- function(v){
if (p==0) return(0.5)	p <- length(v)+1
p <- p+1	if (p==2) return(c(3,1))
X <- rep(1,p)	w <- c(rep(0,p-1),1)
for(i in 2:p)	w[1] <- v[1]*(2*p-1)
X[i] <- -X[i-1]*(x+i)/(p+i)	
H <- 1	for (i in 2:length(v))
while(length(H)<p) H <-Stnumbers(H)	w[i] <- (2*p-i)*v[i]+(p-i+1)*v[i-1]
psi <- rev(H)*X	return(w)
psi <- (-1)^(p-1)*sum(psi)	}
/factorial(p+1)	
return(psi)	v<-c(3,1)
}	Stnumbers(v)
psi(1,1)	V<-c(15,10,1)
0.2083333	Stnumbers(v)
psi(1,2)	105 105 25 1
0.04166667	

۴ توزیع بتا وایبول هندسی

با در نظر گرفتن روابط (۲) و (۳) توابع چگالی و توزیع احتمال بتا وایبول هندسی[۳] به‌ترتیب به‌صورت

$$
\begin{aligned}
f(x;\alpha,\beta,a,b,\theta) &= \frac{\alpha\beta^{\alpha}(1-\theta)^{b}x^{\alpha-1}e^{-b(\beta x)^{\alpha}}}{B(a,b)}(1-e^{-(\beta x)^{\alpha}})^{a-1}\\
&\times\ (1-\theta e^{-(\beta x)^{\alpha}})^{-(a+b)},\quad x>0,\alpha,\beta,a,b>0,\theta\in(0,1)\\
G(x;\alpha,\beta,a,b,\theta) &= \frac{1}{B(a,b)}\{\frac{1}{a}(\frac{1-e^{-(\beta x)^{\alpha}}}{1-\theta e^{-(\beta x)^{\alpha}}})^{a}\\
&- \frac{b-1}{a+1}(\frac{1-e^{-(\beta x)^{\alpha}}}{1-\theta e^{-(\beta x)^{\alpha}}})^{a+1}+\cdots\\
&+ \frac{(-1)^{k}}{a+k}\binom{b-1}{k}(\frac{1-e^{-(\beta x)^{\alpha}}}{1-\theta e^{-(\beta x)^{\alpha}}})^{a+k}+\cdots\}
\end{aligned}
$$

است و با فرض $v=(\frac{1-e^{-(\beta x)^{\alpha}}}{1-\theta e^{-(\beta x)^{\alpha}}})^{a}$ داریم:

$$
\begin{aligned}
G(x;a,b) &= \frac{1}{aB(a,b)}(1-\frac{ab-a}{a+1}v+\frac{ab^{2}-3ab+2a}{2a+4}v^{2}\\
&- \frac{ab^{3}-6ab^{2}+11ab-6}{6a+18}v^{3}+O(v^{4})).
\end{aligned}
$$

چندک مرتبه p ام توزیع بتا وایبول هندسی از معادله غیرخطی

$$
\begin{aligned}
\frac{pa\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)} &= 1-\frac{ab-a}{a+1}v+\frac{ab^{2}-3ab+2a}{2a+4}v^{2}\\
&- \frac{ab^{3}-6ab+11ab-6}{6a+18}v^{3}+O(v^{4}).
\end{aligned}
$$

به روش نیوتن-رافسون به‌دست می‌آید. تابع نرخ خطر توزیع بتا وایبول هندسی نیز به‌صورت

$$
\begin{aligned}
&h(x;\alpha,\beta,a,b,\theta)\\
&= \frac{\alpha\beta^{\alpha}(1-\theta)^{b}x^{\alpha-1}e^{-b(\beta x)^{\alpha}}(1-e^{-(\beta x)^{\alpha}})^{a-1}(1-\theta e^{-(\beta x)^{\alpha}})^{-(a+b)}}{B_{\frac{(1-\theta)e^{-(\beta x)^{\alpha}}}{1-\theta e^{-(\beta x)^{\alpha}}}}(b,a)}
\end{aligned}
$$

---

۳ The beta weibull geometric

است، که در آن

$$B_{\frac{(1-\theta)e^{-(\beta x)^{\alpha}}}{1-\theta e^{-(\beta x)^{\alpha}}}}(a,b)=\int_{0}^{\frac{(1-\theta)e^{-(\beta x)^{\alpha}}}{1-\theta e^{-(\beta x)^{\alpha}}}} u^{b-1}(1-u)^{a-1}du$$

تابع بتای ناقص نام دارد. بعضی از خواص تابع نرخ خطر عبارت است از:

$$1)\quad \lim_{x\to 0} h(x;\alpha,\beta,a,b,\theta)=\begin{cases}\infty & 0<\alpha<1,\ 0<a<1\\ \dfrac{b\beta}{(1-\theta)^{2}} & \alpha=a=1\\ 0 & O.W\end{cases}$$

$$2)\quad a=1,\ \lim_{x\to 0} h(x;\alpha,\beta,a,b,\theta)=\begin{cases}0 & \alpha>1\\ \infty & 0<\alpha<1\end{cases}$$

$$3)\quad \alpha=1,\ \lim_{x\to 0} h(x;\alpha,\beta,a,b,\theta)=\begin{cases}0 & a>1\\ \infty & 0<a<1\end{cases}$$

$$4)\quad \alpha=1,\ \lim_{x\to \infty} h(x;\alpha,\beta,a,b,\theta)=\begin{cases}0 & b>a\\ \infty & b<a\\ a\beta & a=b\end{cases}$$

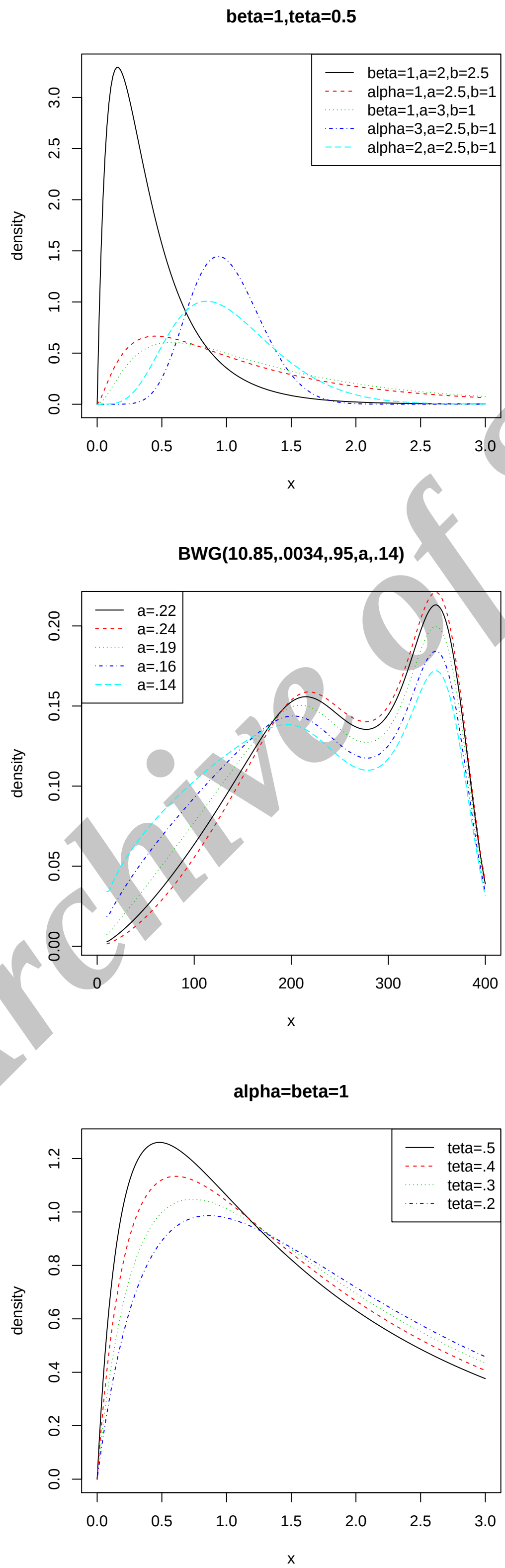
$$5)\quad \alpha>1,\ \lim_{x\to \infty} h(x;\alpha,\beta,a,b,\theta)=0$$

تابع بقای توزیع بتا وایبول هندسی برابر است با $S(x)=1-B_{\frac{(1-\theta)e^{-(\beta x)^{\alpha}}}{1-\theta e^{-(\beta x)^{\alpha}}}}(a,b)$. نمودار تابع چگالی در شکل ۱ بیانگرانعطاف‌پذیری توزیع بتا وایبول هندسی و نمودار تابع نرخ خطر در شکل ۲ بیانگر گودالی شکل بودن، صعودی بودن، نزولی بودن، افزایشی-کاهشی و کاهشی-فزایشی تابع نرخ خطر توزیع بتاوایبول هندسی است.

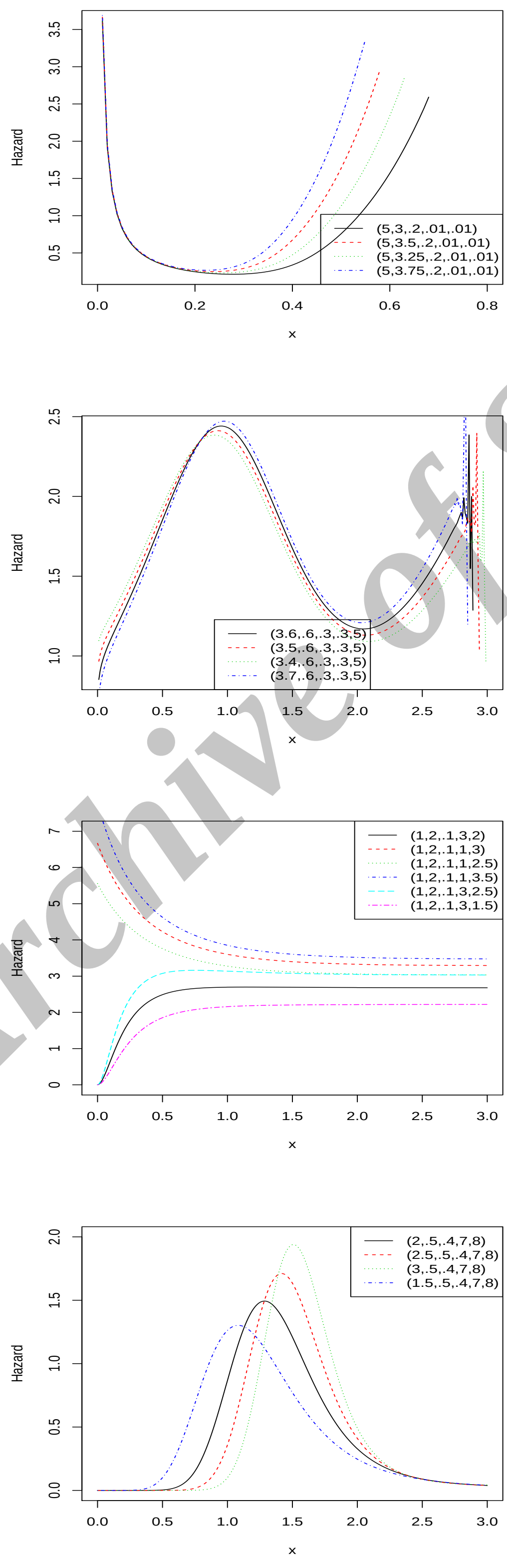
۵ گشتاورها و تابع مولد گشتاور

گشتاور مرکزی مرتبه rام توزیع بتاوایبول هندسی با تغییر متغیر $u=\frac{(1-\theta)e^{-(\beta x)^{\alpha}}}{1-\theta e^{-(\beta x)^{\alpha}}}$ به‌صورت

$$EX^{r} = \frac{1}{\beta^{r}B(a,b)}\int_{0}^{1}(\log(1-\frac{(\theta-1)u}{1-u}))^{\frac{r}{\alpha}}u^{a-1}(1-u)^{b-1}du.$$



شکل ۱: نمودار تابع چگالی توزیع بتاوایبول هندسی



شکل ۲: نمودار تابع نرخ خطر توزیع بتاوایبول هندسی

است. با توجه به قاعده استرلینگ داریم:

$$\begin{aligned}\log(1 - \frac{(\theta-1)u}{1-u})^{\frac{r}{\alpha}} &= (1-\theta)^{\frac{r}{\alpha}} u^{\frac{r}{\alpha}} (1-u)^{-(\frac{r}{\alpha})} \\ &+ \frac{r}{\alpha}(1-\theta)^{\frac{r}{\alpha}} \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n (n+\frac{r}{\alpha}) u^{n+\frac{r}{\alpha}} (1-u)^{-n-\frac{r}{\alpha}}\end{aligned}$$

بنابراین

$$\begin{aligned}E(X^r) &= \frac{(1-\theta)^{\frac{r}{\alpha}}}{\beta^r B(a,b)} \{B(\frac{r}{\alpha}+a, b-\frac{r}{\alpha}) \\ &+ \frac{r}{\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n (n+\frac{r}{\alpha}) B(a+n+\frac{r}{\alpha}, b-n-\frac{r}{\alpha})\} \qquad (۶)\end{aligned}$$

در نتیجه

$$\begin{aligned}E(X) &= \frac{(1-\theta)^{\frac{1}{\alpha}}}{\beta B(a,b)} \{B(\frac{1}{\alpha}+a, b-\frac{1}{\alpha}) \\ &+ \frac{1}{\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n (n+\frac{1}{\alpha}) B(a+n+\frac{1}{\alpha}, b-n-\frac{1}{\alpha})\} \\ \mathrm{Var}(X) &= \frac{(1-\theta)^{\frac{2}{\alpha}}}{\beta^2 B(a,b)} \{B(\frac{2}{\alpha}+a, b-\frac{2}{\alpha}) \\ &+ \frac{2}{\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n (n+\frac{2}{\alpha}) B(a+n+\frac{2}{\alpha}, b-n-\frac{2}{\alpha})\} - (E(X))^2\end{aligned}$$

به کمک محاسبه $\psi_n(\cdot)$ ها در جدول ۱ برای $(\alpha, \beta, a, b, \theta) = (4, 1, 1, 2, 0{,}5)$ داریم:

$$E(X) = 0{/}85799, \quad \mathrm{Var}(X) = 0{/}18366$$

تابع مولد گشتاور توزیع بتاوایبول هندسی عبارت است از:

$$\begin{aligned}M_X(t) &= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{t^r}{r!} \frac{(1-\theta)^{\frac{r}{\alpha}}}{\beta^r B(a,b)} \{B(\frac{r}{\alpha}+a, b-\frac{r}{\alpha}) \\ &+ \frac{r}{\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n (n+\frac{r}{\alpha}) B(a+n+\frac{r}{\alpha}, b-n-\frac{r}{\alpha})\}\end{aligned}$$

۶ آنتروپی‌های رنی و شانون

اگر X یک متغیر تصادفی با تابع توزیع تجمعی به‌طور مطلق پیوسته $F(x)$ و با تابع چگالی احتمال $f(x)$ باشد، آنگاه آنتروپی رنی[۴] برای F در توزیع (BWG) به‌صورت

$$I_R(r) = \frac{1}{1-r}\log(\int_R (f(x))^r dx)$$

تعریف می‌شود. از این بخش تا پایان مقاله در توزیع (BWG) منظور از $f(x)$ همان $f(x;\alpha,\beta,\theta,a,b)$ و منظور از $F(x)$ همان $F(x;\alpha,\beta,\theta,a,b)$ است.

برای محاسبه آنتروپی رنی در توزیع بتا وایبول هندسی، با در نظر گرفتن $u = e^{-(\beta x)^\alpha}$ داریم:

$$\begin{aligned}\int_0^\infty (f(x))^r dx &= \frac{(\alpha\beta)^{r-1}(1-\theta)^{rb}(-1)^{\frac{r(\alpha-1)+1}{\alpha}}}{\beta^r(a,b)}\int_0^1 [u^{rb-1}(1-u)^{ra-r} \\ &\times (\sum_{i=0}^\infty \binom{-r(a+b)}{i})(-1)^i(\theta u)^i \\ &\times \log(1-(1-u))^{\frac{(r-1)(\alpha-1)}{\alpha}} du]\end{aligned}$$

به کمک قاعده استرلینگ برای $\log(1-(1-u))^{\frac{(r-1)(\alpha-1)}{\alpha}}$ داریم:

$$\begin{aligned}\int_0^\infty (f(x))^r dx &= \frac{(\alpha\beta)^{r-1}(1-\theta)^{rb}(-1)^{\frac{(2r-1)(\alpha-1)}{\alpha}}}{B^r(a,b)}\{\sum_{i=0}^\infty \binom{-r(a+b)}{i}(-\theta)^i \\ &\times B(rb+i, \frac{ra\alpha+1-r}{\alpha}) \\ &+ \frac{(r-1)(\alpha-1)}{\alpha}\sum_{i=0}^\infty\sum_{i\neq 0}^\infty [\binom{-r(a+b)}{i}(-\theta)^i \\ &\times \psi_i(n+\frac{(r-1)(\alpha-1)}{\alpha}) \\ &\times B(rb+i, n+\frac{ra\alpha+1-r}{\alpha})]\}\end{aligned}$$

بنابراین

$$I_R(r) = \frac{1}{1-r}\log\{\frac{(\alpha\beta)^{r-1}(1-\theta)^{rb}(-1)^{\frac{(2r-1)(\alpha-1)}{\alpha}}}{B^r(a,b)}$$

---
۴ Renyi and Shannon entropies

$$\times \quad [\sum_{i=0}^{\infty} \binom{-r(a+b)}{i} (-\theta)^i B(rb+i, \frac{ra\alpha+1-r}{\alpha})]$$
$$+ \quad \frac{(r-1)(\alpha-1)}{\alpha} \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{i\neq 0}^{\infty} [\binom{-r(a+b)}{i} (-\theta)^i$$
$$\times \quad \psi_n(n+\frac{(r-1)(\alpha-1)}{\alpha}) B(rb+i, n+\frac{ra\alpha+1-r}{\alpha})]]\}$$

آنتروپی شانون برای یک متغیر تصادفی با تابع توزیع تجمعی به‌طور مطلق پیوسته $F(x)$ و با تابع چگالی احتمال $f(x)$ به‌صورت $H(X) = E(-\log f(X))$ است که در توزیع بتاوایبول هندسی به‌صورت

$$E(-\log f(X)) = (a+b)E(\log(1-\theta e^{-(\beta X)^\alpha})) - (a-1)E(\log(1-e^{-(\beta X)^\alpha}))$$
$$-(\alpha-1)E(\log X) - b\log(1-\theta) + bE((\beta X)^\alpha) - \log\alpha - \alpha\log\beta$$

محاسبه می‌شود. با در نظر گرفتن $u = \frac{1-e^{-(\beta X)^\alpha}}{1-\theta e^{-(\beta X)^\alpha}}$ داریم:

$$E(\log(1-e^{-(\beta X)^\alpha})) = \frac{1}{B(a,b)} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{\infty} \binom{-k}{r} \times (-1)^{r+1} \theta^r B(a+r, b+k) \quad (7)$$

$$E(\log(1-e^{-(\beta X)^\alpha})) = \frac{1}{B(a,b)} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{\infty} \binom{-k}{r} \times (-1)^{r+1} \theta^{r+k} B(a+r, b+k) \quad (8)$$

$$E((\beta X)^\alpha) = \frac{1}{B(a,b)} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{\infty} \binom{-k}{r} \times (-1)^{r+1} (1-\theta)^r B(a+r, b+k) \quad (9)$$

با توجه به بسط تیلور $\log X$ حول نقطه یک داریم:

$$E(\log X) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} \frac{(-1)^{1-r}}{n} E(X^r) \quad (10)$$

با جایگذاری رابطه (۶) در رابطه‌ی (۱۰) و با توجه به روابط (۷) تا (۹) به راحتی آنتروپی شانون به‌دست می‌آید.

۷ گشتاورهای آماره‌های مرتب

فرض کنید $X_1, \dots, X_n$ نمونه‌ای تصادفی از توزیع بتاوایبول هندسی باشد. تابع چگالی احتمال آماره ترتیبی iام به‌صورت

$$f_{i:n}(x) = \frac{1}{B(i, n-i+1)}(F(x))^{i-1}(1-F(x))^{n-i}f(x)$$

است، که در آن $f(x)$ و $F(x)$ به‌ترتیب pdf و cdf توزیع بتاوایبول هندسی (BWG) هستند. $f_{k:n}(x)$ را می‌توان به‌صورت زیر نوشت.

$$f_{k:n}(x) = \frac{f(x)}{B(i, n-i+1)} \sum_{j=0}^{n-i} \binom{n-i}{j} (-1)^j (F(x))^{i+j-1}$$

کردریو و همکاران (۲۰۱۳) برای توزیع‌های به فرم (۲) نشان دادند که

$$f_{k:n}(x) = \frac{f(x)}{B(i, n-i+1)} \sum_{j=0}^{n-j} \binom{n-i}{j} (-1)^j \sum_{m=0}^{\infty} c_{i+j-1,m} (G(x))^m,$$

که در آن $c_{i+j-1,m}$ در رابطه زیر صدق می‌کنند.

$$c_{i,j} = (ia_0)^{-1} \sum_{m=1}^{i} (jm - i + m) a_m c_{j,i-m}, \quad c_{j,0} = a_0^j,$$

در این جا $c_{j,i}$ ها برحسب $a_0, \dots, a_i$ از $c_{j,1}$ تا $c_{j,i-1}$ محاسبه می‌شوند. همچنین داریم:

$$a_m = \frac{(1-b)_m}{B(a,b)(a+m)m!}, \quad (f)_k = f(f+1)\dots(f+k-1)$$

با توجه به (۲) داریم:

$$\begin{aligned} f_{i:n}(x) &= \frac{1}{B(i, n-i+1)} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{n-i} \frac{\Gamma(n-i+1) c_{i+j-1,m} (-1)^j}{j! \Gamma(n-i-j+1)} \\ &\times \left(\frac{1}{B(a,b)} g(x) (G(x))^{a+m-1} (1-G(x))^{b-1}\right) \\ f_{k:n}(x) &= \sum_{m=0}^{\infty} w_{i,n,m} f_{BWL}(x, a+m, b, \alpha, \beta, \theta) \end{aligned}$$

که در آن $w_{i,n,m} = \sum_{j=0}^{n-i} \frac{\Gamma(n-i+1)c_{i+j-1,m}(-1)^j}{j!\Gamma(n-i-j+1)}$. یعنی تابع چگالی آماره ترتیبی iام توزیع بتاوایبول هندسی را می‌توان به‌صورت یک ترکیب خطی از توزیع‌های بتاوایبول هندسی نوشت. برای مثال گشتاور مرکزی rام $X_{i:n}$ با توجه به رابطه (۶) برابر است با:

$$\begin{aligned}
E(X_{k:n}^r) &= \frac{(1-\theta)^{\frac{r}{\alpha}}}{\beta^r B(a,b)} \sum_{m=0}^{\infty} w_{i,n,m} B(\frac{r}{\alpha}+a+m, b-\frac{r}{\alpha}) \\
&+ \frac{r(1-\theta)^{\frac{r}{\alpha}}}{\alpha\beta^r B(a,b)} \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} w_{i,n,m}\psi_n(n+\frac{r}{\alpha}) \\
&\times B(a+m+n+\frac{r}{\alpha}, b-n-\frac{r}{\alpha})
\end{aligned}$$

تابع توزیع تجمعی $X_{i:n}$ به‌صورت

$$F_{i:n}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} v_{n,m}(\frac{1-e^{-(\beta X)^\alpha}}{1-\theta e^{-(\beta X)^\alpha}})^m$$

است، که در آن $v_{n,m} = \sum_{r=i}^{n}\sum_{j=0}^{n-r} \frac{(-1)^j\Gamma(n-r+1)c_{r+j,m}}{\Gamma(n-r-j+1)\Gamma(n-r+1)j!r!}$.

۸ میانگین مانده عمر توزیع بتاوایبول هندسی

اگر عمر یک متغیر تصادفی t باشد ($t > 0$) آنگاه مانده عمر[5]، دوره‌ای از زمان t تا زمان اولین شکست است و به‌صورت $X - t|X > t$ تعریف می‌شود. میانگین مانده عمر یک متغیر تصادفی با تابع چگالی احتمال $f(x)$ و تابع بقای $S(t)$ به‌صورت

$$m(t) = E(X-t|X>t) = \int_t^{\infty}(x-t)f(x)$$

تعریف می‌شود و گشتاور مرکزی مرتبه‌ی rام مانده عمر به‌صورت

$$m_r(t) = \frac{1}{S(t)}\int_0^{\infty} v^r f(v+t)dv$$

است، که با تغییر متغیر $u = \frac{1-e^{-(\beta(t+v))^\alpha}}{1-\theta e^{-(\beta(t+v))^\alpha}}$ داریم:

$$m_r(t) = \frac{(-t)^r}{B(a,b)S(t)} \sum_{k=0}^{r} \binom{r}{k}(\frac{1}{\beta t})^k \int((\log(\frac{1-u}{1-\theta u}))^{\frac{k}{\alpha}} u^{a-1}$$

---
۵ Meanresidual life

$$\times \quad (1-u)^{b-1}du)$$

به کمک قاعده‌ی استرلینگ (۳) داریم:

$$\begin{aligned}
m_r(t) &= \frac{(-t)^r}{B(a,b)S(t)}\{\sum_{k=0}^{r}\sum_{j=0}^{\infty}(\binom{r}{k}\binom{-\frac{k}{\alpha}}{j}(-\theta)^j(\frac{1}{\beta t})^k(-1)^{\frac{k}{\alpha}}(1-\theta)^{\frac{k}{\alpha}}\\
&\times \quad (B(j+\frac{k}{\alpha}+a,b)-B_{F(t)}(j+\frac{k}{\alpha}+a,b)))\\
&+ \quad \frac{k}{\alpha}\sum_{k=0}^{r}\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}[\binom{r}{k}\binom{-(n+\frac{k}{\alpha}+1)}{j}(-\theta)^j(\frac{1}{\beta k})\\
&\times \quad \psi_n(n+\frac{k}{\alpha})(-1)^{\frac{k}{\alpha}}(1-\theta)^{n+\frac{k}{\alpha}+1}\\
&\times \quad (B(n+j+\frac{k}{\alpha}+a,b)-B_{F(t)}(n+j+\frac{k}{\alpha}+a,b)))]\}
\end{aligned}$$

که در آن $F(t)=\frac{1-e^{-(\beta t)^\alpha}}{1-\theta e^{-(\beta t)^\alpha}}$. با قرار دادن $r=1$ و $r=2$ می‌توان میانگین و واریانس مانده عمر را به‌دست آورد.

۹ میانگین مانده عمر معکوس توزیع بتاوایبول هندسی

یکی از اندازه‌های قابلیت اعتماد مرتبط با نرخ شکست معکوس میانگین مانده عمر معکوس[۶] است. این اندازه اولین بار توسط ناندا و همکاران (۲۰۰۳) در مورد توزیع‌های پیوسته به‌صورت امید ریاضی متغیر تصادفی $t-X|X\leq t$ تعریف شده است. گشتاور مرکزی مرتبه‌ی rام تابع مانده عمر معکوس در توزیع بتاوایبول هندسی به‌صورت

$$\mu_r(t) \quad = \quad \frac{1}{F(t)}\int_0^t v^r f(t-v)dv$$

حاصل می‌شود که با تغییر متغیر $u=\frac{1-e^{-(\beta(t-v))^\alpha}}{1-\theta e^{-(\beta(t-v))^\alpha}}$، رابطه $(1-z)^\alpha=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}(-1)^k z^k$ و قاعده استرلینگ به‌صورت

$$\mu_r(t) \quad = \quad \frac{(-1)^{r+1}t^r}{B(a,b)F(t)}\{\sum_{k=0}^{r}\sum_{j=0}^{\infty}[\binom{-\frac{r}{k}}{j}\binom{r}{k}(-\frac{1}{\beta t})^k(-\theta)^j(-1)^{\frac{r}{k}}(1-\theta)^{\frac{r}{k}}$$

[۶] Reversed mean residual life

$$\begin{aligned}
\times &\quad (B_{\frac{1}{1-\theta}}(j+a+\frac{k}{\alpha},b), B_{F(t)}(j+a+\frac{k}{\alpha},b))] \\
+ &\quad \frac{k}{\alpha}\sum_{k=0}^{r}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}[(-\frac{1}{\beta t})^{k}\binom{r}{k}(-1)^{\frac{k}{\alpha}}\binom{-(n+\frac{k}{\alpha}+1)}{k} \\
\times &\quad (-\theta)^{j}(1-\theta)^{n+\frac{k}{\alpha}+1}\psi(n+\frac{k}{\alpha}) \\
\times &\quad (B_{\frac{1}{1-\theta}}(n+j+a+\frac{k}{\alpha},b), B_{F(t)}(n+j+a+\frac{k}{\alpha},b))]\}
\end{aligned}$$

حاصل می‌شود. با قرار دادن $r=1$ و $r=2$ در $\mu_r(t)$ تابع میانگین و واریانس تابع مانده عمر معکوس را می‌توان به‌دست آورد.

۱۰ برآورد ماکسیمم درستنمایی

براساس نمونه تصادفی $X_1,\ldots,X_n$ برای برآورد ماکسیمم درستنمایی پارامترها، لگاریتم تابع درستنمایی به‌صورت

$$\begin{aligned}
\ln L = &\ n\ln\Gamma(a+b) - n\ln\Gamma(a) - n\ln\Gamma(b) + n\ln\alpha + n\alpha\ln\beta + nb\ln(1-\theta) \\
- &\ \sum_{i=1}^{n}(\beta x_i)^{\alpha} + (a-1)\sum_{i=1}^{n}\ln(1-e^{-(\beta x_i)^{\alpha}}) \\
- &\ (a+b)\sum_{i=1}^{n}\ln(1-\theta e^{-(\beta x_i)^{\alpha}})
\end{aligned}$$

است و مشتقات جزئی آن نسبت به پارامترهای $(a,b,\alpha,\beta,\theta)$ عبارتند از:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\ln L(x)}{\partial a} &= n\Psi(a+b) - n\Psi(a) - \sum_{i=1}^{n}\ln(1-e^{-(\beta x_i)^{\alpha}}) \\
&- \sum_{i=1}^{n}\ln(1-\theta e^{-(\beta x_i)^{\alpha}}) \\
\frac{\partial\ln L(x)}{\partial b} &= n\Psi(a+b) - n\Psi(b) + n\ln(1-\theta) \\
&- \sum_{i=1}^{n}\ln(1-\theta e^{-(\beta x_i)^{\alpha}}) \\
\frac{\partial\ln L(x)}{\partial \alpha} &= \frac{n}{\alpha} + n\ln\beta - \sum_{i=1}^{n}(\beta x_i)^{\alpha}\ln(\beta x_i)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&+ \quad (a-۱)\sum_{i=۱}^{n}\frac{(\beta x_i)^{\alpha}\ln(\beta x_i)e^{-(\beta x_i)^{\alpha}}}{۱-e^{-(\beta x_i)^{\alpha}}}\\
&- \quad (a+b)\theta\sum_{i=۱}^{n}\frac{(\beta x_i)^{\alpha}\ln(\beta x_i)e^{-(\beta x_i)^{\alpha}}}{۱-e^{-(\beta x_i)^{\alpha}}}\\
\frac{\partial \ln L(x)}{\partial \beta} &= \frac{n\alpha}{\beta}-\alpha\sum_{i=۱}^{n}x_i(\beta x_i)^{\alpha-۱}\\
&+ \quad \alpha(a-۱)\sum_{i=۱}^{n}\frac{x_i(\beta x_i)^{\alpha-۱}e^{-(\beta x_i)^{\alpha}}}{۱-e^{-(\beta x_i)^{\alpha}}}\\
&- \quad (a+b)\theta\sum_{i=۱}^{n}\frac{x_i(\beta x_i)^{\alpha-۱}e^{-(\beta x_i)^{\alpha}}}{۱-e^{-(\beta x_i)^{\alpha}}}\\
\frac{\partial \ln L(x)}{\partial \theta} &= -\frac{nb}{۱-\theta}+(a+b)\sum_{i=۱}^{n}\frac{e^{-(\beta x_i)^{\alpha}}}{۱-\theta e^{-(\beta x_i)^{\alpha}}}
\end{aligned}$$

که در آن‌ها، $\Psi(x)=\frac{\partial \log\Gamma(x)}{\partial x}$ تابع دوگاما نام دارد. با حل معادله‌های فوق برآورد ماکسیمم درستنمایی پارامترها به‌دست می‌آید. برای محاسبه برآورد فاصله‌ای و انجام آزمون فرض‌ها درباره پارامترها به ماتریس اطلاع مشاهدات با بعد ۵×۵ نیاز است که نحوه محاسبه و کاربرد آن در کوردریو و همکاران (۲۰۱۳) ارائه شده است.

۱۱ کاربرد توزیع بتاوایبول هندسی

در این بخش با استفاده از یک مجموعه داده واقعی، توزیع بتاوایبول هندسی را برازش داده و با توزیع‌های GE، BE و BW با توابع چگالی احتمال به‌صورت

$$\begin{aligned}
f_{GE}(x) &= a\beta e^{-\beta x}(۱-e^{-\beta x})^{a-۱}\\
f_{BE}(x) &= \frac{\beta e^{-b(\beta x)}(۱-e^{-(\beta x)})^{a-۱}}{B(a,b)}\\
f_{BW}(x) &= \frac{\alpha\beta^{\alpha}x^{\alpha-۱}e^{-b(\beta x)^{\alpha}}(۱-e^{-(\beta x)^{\alpha}})^{a-۱}}{B(a,b)}
\end{aligned}$$

مقایسه می‌شود، که در آن‌ها $x,a,b,\alpha,\beta > ۰$.

داده‌ها شامل ۶۳ مقدار اندازه‌گیری شده در یک آزمایشگاه فیزیک در شهر لندن

درباره الیاف شیشه‌های ۱٫۵cm به‌صورت

$$1.04,\ 0.74,\ 2,\ 1.81,\ 1.73,\ 1.68,\ 1.64,\ 1.61,\ 1.58,\ 1.52,\ 1.49,\ 1.36,$$
$$1.25,\ 0.93,\ 0.55,\ 1.27,\ 1.42,\ 1.28,\ 1.11,\ 0.77,\ 2.01,\ 1.81,\ 1.76,$$
$$1.68,\ 1.66,\ 1.61,\ 1.59,\ 1.53,\ 1.49,\ 1.39,\ 1.5,\ 1.54,\ 1.62,\ 1.61,1.55,$$
$$1.5,\ 1.48,\ 1.29,\ 1.13,\ 0.81,\ 2.24,\ 1.84,\ 1.76,\ 1.69,\ 1.66,\ 1.62,\ 1.6,$$
$$1.66,\ 1.89,\ 1.78,\ 1.7,\ 1.67,\ 1.63,\ 1.61,\ 1.55,\ 1.51,\ 1.48,\ 1.3,\ 1.24,$$
$$0.84,\ 1.84,\ 1.77,\ 1.7.$$

است. جدول ۲ شامل مقادیر برآورد ماکسیمم درستنمایی پارامترها، معیار اطلاع آکائیک (AIC) و معیار اطلاع بیزی (BIC) برای این مجموعه از داده‌ها است. توزیعی به‌عنوان برازش بهتر گزینش می‌شود که دارای مقادیر AIC و BIC کمتری است. بنابراین توزیع بتاوایبول هندسی در مقایسه با سایر مدل‌ها برازش بهتری به این مجموعه داده دارد. فرض کنید $\underline{X}$ بردار مشاهدات باشد، با استفاده از آزمون نسبت درستنمایی فرضیه صفر $H_0 : \underline{X} \sim GE$ در برابر فرضیه مقابل $H_1 : \underline{X} \sim BWG$ یا هم‌ارز آن $H_0 : (\alpha, b, \beta) = (1, 1, 0)$ در مقابل $H_1 : (\alpha, b, \beta) \neq (1, 1, 0)$ آزمون می‌شود. مقدار آماره آزمون **۳۵٫۵۸** و $p - \text{value} < 0.0001$ است. بنابراین مدل GE در مقابل BWE رد می‌شود. مقدار آماره آزمون فرضیه صفر $H_0 : \underline{X} \sim BE$ در برابر فرضیه مقابل $H_1 : BWG$ یا هم‌ارز آن فرضیه $H_0 : (\alpha, \theta) = (1, 0)$ در مقابل $H_1 : (\alpha, \theta) \neq (1, 0)$، **۲۱٫۳۵** و $p - \text{value} < 0.0001$ است. بنابراین مدل BE در مقابل BWG رد می‌شود. مقدار آماره آزمون فرضیه $H_0 : \underline{X} \sim BW$ در مقابل $H_1 : BWG$ یا هم‌ارز آن $H_9 : \theta = 0$ در مقابل $H_1 : \theta \neq 0$، **۲٫۳۲** و **۰٫۱۲۷** $= p - \text{value}$. بنابراین فرض صفر در این حالت در سطح معنی‌دار بزرگتر از **۰٫۱۲۷** رد و در هر سطح کوچکتر از **۰٫۱۲۷** پذیرفته می‌شود. اما با توجه به معیارهای AIC و BIC مدل BWG مناسب‌تر از مدل BW است. در نتیجه با توجه به جدول ۲ توزیع بتاوایبول هندسی در مقایسه با سایر مدل‌ها، مدلی مناسب به مجموعه داده‌ها است که شکل ۳ هم بهتر بودن مدل BWG

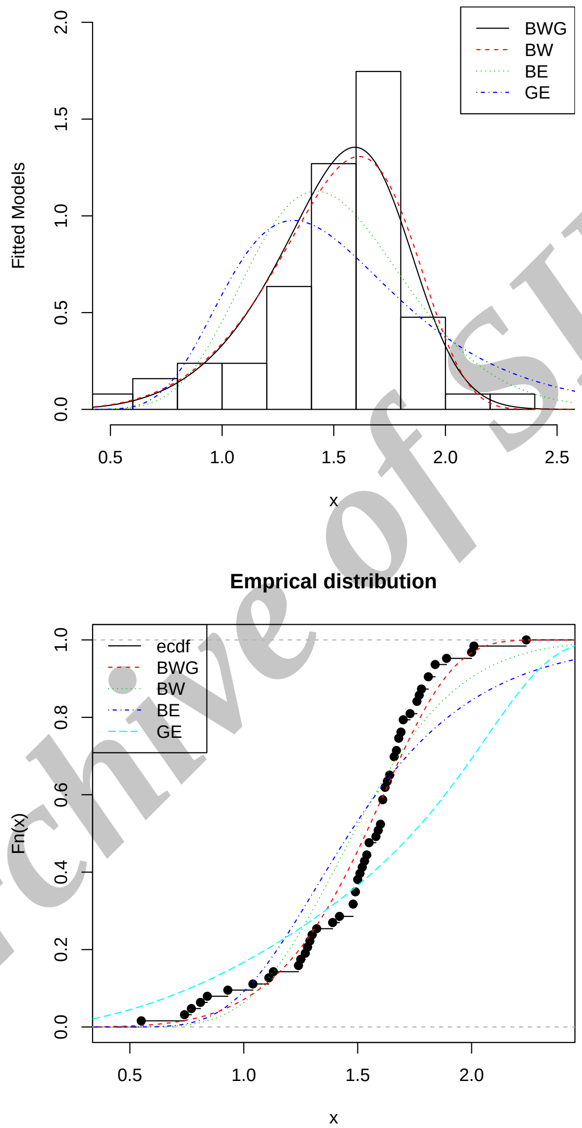
را تایید می‌کند.

جدول ۲: برآورد ماکسیمم درستنمایی و مقادیرAIC و BIC داده‌های مربوط به الیاف شیشه

مدل	پارامتر	برآورد	AIC	BIC
	a	۰/۵۲۰		
	b	۲/۸۹۴		
BWG	α	۹/۵۱۲	۳۶/۹	۴۷/۶۱
	β	۰/۴۱۶		
	θ	۰/۸۵۷		
	a	۱۷/۷۸۸		
BE	b	۲۲/۷۲۲	۵۴/۲۵۵	۶۰/۶۷
	β	۰/۳۸۹		
	α	۷/۶۱۸		
BW	β	۰/۵۱۲	۳۷/۲۲	۵۳/۷۶
	a	۰/۶۳۴		
	α	۳۱/۳۴۱		
GE			۶۶/۷۶۶	۷۱/۰۴
	β	۲/۶۱۱		

بحث و نتیجه‌گیری

توزیع جدید پنج پارامتری معرفی شدهٔ توزیع بتاوایبول هندسی دارای تابع نرخ خطر افزایشی، کاهشی، افزایشی-کاهشی، کاهشی-افزایشی و گودالی شکل است. تابع چگالی احتمال، تابع‌های نرخ خطر و بقا، گشتاورها، تابع چندک، آنتروپی‌های رنی و شانون و گشتاورهای آماره‌های مرتب به‌دست آورده شد و بعضی خواص حدی تابع نرخ خطر بیان گردید. با روش ماکسیمم درستنمایی برآورد پارامترها به‌دست آورده شد. در پایان نیز با برازش توزیع وایبول هندسی و چند زیرمدل آن به یک مجموعه داده واقعی نشان داده شد که این توزیع از سایر مدل‌های برازش شده، بهتر



شکل ۳: نمودار برآورد توابع چگالی احتمال و توابع توزیع تجمعی توزیع‌های GE، BE، BW و BWG

است. به‌طور کلی به نظر می‌رسد توزیع بتاوایبول هندسی می‌تواند مدل مناسبی برای تحلیل داده‌ها در نظریه قابلیت اعتماد و زمینه‌های مربوطه مناسب باشد. به‌علاوه روشی برای محاسبه انتگرال‌ها برحسب چندجمله‌ای‌های استرلینگ ارائه شد.

تقدیر و تشکر

نویسندگان مقاله بر خود لازم می‌دانند از زحمات سردبیر مجله و داوران محترم که با نقطه نظرات و پیشنهادات سازنده خود باعث بهبود مقاله شدند تقدیر و تشکر کنند.

مراجع

Akinsete, A., Famoye, F. and Lee, C. (2008), The Beta-Pareto Distribution, *Statistics: A Journal of Theoretical and Applied Statistics*, **42**, 547-563.

Bidram, H., Behboodian, J. and Towhidi, M. (2013), The Beta Weibull-Geometric Distribution, *Journal of Statistical Computation and Simulation*, **83**, 52-57.

Cordeiro, G. M. and Lemonte, A. J. (2011a), The Beta Laplace Distribution, *Statatistics and Probability Letters*, **81**, 973-982.

Cordeiro, G. M. and Lemonte, A. J. (2011b), The Beta-Half-Cauchy Distribution, *Journal of Probability and Statistics*, **2011**, 1-18.

Cordeiro, G. M., Silva, G. O. and Ortega, E. M. M. (2013), The Beta-Weibull Geometric Distribution, *Statistics: A Journal of Theoretical and Applied Statistics*, **47**, 817-834.

Castellares, F. and Lemonte, A. J. (2014), A New Generalized Weibull Distribution Generated by Gamma Random Variables, *Journal of the Egyptian Mathematical Society*, **10**, 1-9.

Eugene, N., Lee, C. and Famoye, F. (2002), Beta Normal Distribution and its Applications, *Communications in Statistics - Theory Methods*, **31**, 497-512.

Flajonet, P. and Odlyzko, A. (1990), Singularity Analysis of Generating Function, *SIAM: SIAM Journal on Discrete Mathematics*, **3**, 216-240.

Kong, L., Lee, C. and Sepanski, J. H. (2007), On the Properties of Beta Gamma Distributions, *Journal of Modern Applied Statistical Methods*, **6**, 173-187.

Nadarajah, S. and Gupta, A. K. (2004), The Beta Fréchet Distribution, *Far East Journal of Theoretical Statistics*, **14**, 15-24.

Nadarajah, S. and Kotz, S. (2004), The Beta Gumbel Distribution, *Mathematics and Probability for Engineers*, **10**, 323-332.

Nadarajah, S. and Kotz, S. (2005), The Beta Exponential Distribution, *Reliability Engineering and System Safety*, **91**, 689-697.

Nassar, M. M. and Nada, N. K. (2011), The Beta Generalized Pareto Distribution, *Journal of Statistics - Advances in Theory and Applications*, **6**, 1-17.

Nanda, A. K., Singh, H., Misra, N. and Paul, P. (2003), Reliability Properties of Reversed Residual Liftime, *Communications in Statistics Theory and Methods*, **32**, 2031-2042.

Pescim, R. R., Demetrio, C. G. B., Cordeiro, G. M., Ortega, E. M. M. and Urbano, M. R. (2010), The Beta Generalized Half-Normal Distribution, *Computational Statistics and Data Analysis*, **54**, 945-957.

Paranaíba, P. F., Ortega, E. M. M., Cordeiro, G. M. and Pescim, R. R. (2011), The Beta Burr XII Distribution with Application to Lifetime Data, *Computatinal Statistics and Data Analysis*, **55**, 1118-1136.

Souza, W. B., Santos, A. H. S. and Cordeiro, G. M. (2010), The Beta Generalized Exponential Distribution, *Journal of Statistical Computation and Simulation*, **80**, 159-172.

Silva, G. O., Ortega, E. M. and Cordeiro, G. M. (2010), The Beta Modified Weibull Distribution, *Lifetime Data Analysis*, **16**, 409-430.

Ward, M. (1934), The Representation of Stirling's Numbers and Stirling's Polynomials as Sums of Factorial, *American Journal Mathematics*, **56**, 87-95.

Weibull, W. (1951), A Statistical Distribution Function of Wide Applicability, *Journal of Applied Mechanics*, **18**, 293-300.