مجله علوم آماری، پاییز و زمستان ۱۳۹۴
جلد ۹، شماره ۲، ص ۱۶۹–۱۸۸

بازه‌های اطمینان برای نسبت و تفاضل دو شاخص C_{pmk} براساس روش‌های مجانبی و خودگردانی پارامتری

ثنا افتخار، احسان خراتی کوپایی، سلطان محمد صدوقی الوندی
گروه آمار، دانشگاه شیراز

تاریخ دریافت: ۱۳۹۳/۶/۳۱ تاریخ آخرین بازنگری: ۱۳۹۴/۴/۱۰

چکیده : شاخص‌های قابلیت فرآیند به عنوان ابزاری آماری به منظور ارزیابی صحت، دقت و کارایی یک فرآیند، در صنعت کاربرد گسترده‌ای دارند. در این مقاله بازه‌های اطمینان جدیدی برای نسبت و تفاضل دو شاخص C_{pmk} براساس روش‌های خودگردانی پارامتری و مجانبی ارائه می‌شود. برای ارزیابی این روش‌ها، با استفاده از شبیه‌سازی، به مقایسه احتمال پوشش و طول بازه‌های اطمینان پیشنهادی با روش بازه اطمینان تعمیم‌یافته پرداخته می‌شود. شبیه‌سازی‌ها نشان‌دهنده مناسب بودن روش‌های پیشنهادی است.

واژه‌های کلیدی : بازه اطمینان، شاخص قابلیت فرآیند، توزیع مجانبی، خودگردانی پارامتری، بازه اطمینان تعمیم‌یافته.

۱ مقدمه

شاخص‌های قابلیت فرآیند به عنوان ابزاری آماری به منظور ارزیابی صحت، دقت و کارایی یک فرآیند، در صنعت کاربرد گسترده‌ای دارند. شاخص‌های قابلیت فرآیند

آدرس الکترونیک مسئول مقاله: احسان خراتی کوپایی، eh.kh.ko@gmial.com
کد موضوع‌بندی ریاضی (۲۰۱۰): ۶۲N۱۰

به واحد اندازه‌گیری بستگی ندارند و به عنوان تابعی از میانگین و واریانس فرآیند و مقدار هدف برای مقایسه فرآیندهایی که ممکن است حتی واحد اندازه‌گیری متفاوتی نیز داشته باشند، استفاده می‌شوند. همچنین این شاخص‌ها در انتخاب بهترین فرآیند کاربرد فراوان دارند.

وان‌من (۱۹۹۵) خانواده کلی از شاخص‌های قابلیت فرآیند را، که در برگیرنده شاخص‌های متداول در صنعت است، به‌صورت

$$C_p(u,v) = \frac{d - u|\mu - M|}{۳\{\sigma^۲ + v(\mu - T)^۲\}^{\frac{۱}{۲}}},$$

معرفی کرد، به گونه‌ای که u و v پارامترهای غیرمنفی، $d = (USL - LSL)/۲$، LSL و USL حدود مشخصات فنی پایین و بالا، μ میانگین فرآیند، $M = (USL + LSL)/۲$، $\sigma^۲$ واریانس فرآیند و T مقدار هدف هستند. تاکنون چندین شاخص قابلیت فرآیند برای بررسی عملکرد فرآیندها ارائه شده است. این شاخص‌ها در ارزیابی فرآیند در تولید محصولاتی منطبق با حدود مشخصات فنی، اندازه‌گیری میزان انحراف فرآیند از میانگین فرآیند یا مقدار هدف، نشان دادن درصد اقلام معیوب و اندازه‌گیری فاصله میانگین فرآیند تا حدود مشخصات فنی دارای توانایی و عملکردی متفاوت هستند. (برای اطلاعات بیشتر درباره شاخص‌های گوناگون به پرن و کاتز (۲۰۰۶) فصل‌های ۱ تا ۴ مراجعه شود).

هدف این مقاله ارائه بازه‌های اطمینان جدیدی برای نسبت و تفاضل دو شاخص $C_{pmk} = C_p(۱, ۱)$ است که توسط پرن و همکاران (۱۹۹۲) معرفی گردید. این شاخص، نسبت به فاصله میانگین فرآیند تا مقدار هدف و تغییرات فرآیند حساس‌تر است. شاخص C_{pmk} ترکیبی مناسب از شاخص‌های پیشین است که هم در اندازه‌گیری بازده فرآیند و هم در معرفی زیان‌های ناشی از فرآیند عملکرد بهتری دارد. بنابراین بدیهی است که شاخص C_{pmk} نسبت به بازده و زیان فرآیند اطلاعات بیشتری را برای مشتری و خریدار فراهم می‌کند. این شاخص هم نسبت به تغییرات فرآیند حساس است و هم سریع‌تر از شاخص‌های دیگر نسبت به انحراف میانگین فرآیند از مقدار هدف واکنش نشان می‌دهد. علاوه بر این C_{pmk} بیشترین اطلاعات را در مورد میانگین فرآیند ارائه می‌دهد. به عنوان مثال وقتی $C_{pmk} = ۱$ است

$\mu \in (T \pm d/۴)$ می‌باشد. این در حالی است که C_{pmk} کمترین اطلاعات را درباره درصد اقلام معیوب بیان می‌کند (پرن و کاتز، ۲۰۰۶).

در ادامه، تاریخچه‌ای از مطالعات انجام شده در مورد C_{pmk} می‌آید. چن و سو (۱۹۹۵) به مطالعه توزیع مجانبی برآورد C_{pmk} پرداختند. پرن و همکاران (۱۹۹۲) و رایت (۱۹۹۸) گشتاورهای دقیق و تابع چگالی برآورد C_{pmk} را تحت فرض نرمال بودن فرآیند، برای حالتی که فرآیند متقارن است یعنی زمانی که $T = M$، به‌دست آوردند. وان من (۱۹۹۷a، ۱۹۹۷b) به محاسبه توزیع و تابع چگالی دقیق برآورد $C_p(u,v)$ تحت فرض نرمال بودن فرآیند، برای هر دو حالتی که فرآیند متقارن و نامتقارن یعنی $T \neq M$، پرداخت. اما همان‌طور که وو و هوانگ (۲۰۱۰) اشاره کرده‌اند به دلیل پیچیدگی توزیع نمونه‌ای، مطالعه گسترده‌ای در مورد مقایسه دو شاخص C_{pmk} انجام نشده است. در این خصوص وو و هوانگ (۲۰۱۰) بازه اطمینان تعمیم‌یافته را برای نسبت و تفاضل دو شاخص C_{pmk} بر اساس مفهوم کمیت محوری تعمیم‌یافته ارائه دادند. شبیه‌سازی‌های انجام شده توسط وو و هوانگ (۲۰۱۰) نشان‌دهنده این است که بازه اطمینان تعمیم‌یافته برای نسبت دو شاخص C_{pmk} عملکرد بهتری نسبت به بازه اطمینان تعمیم‌یافته برای تفاضل دو شاخص C_{pmk} دارد. با این وجود حالت‌هایی که احتمال پوشش بازه اطمینان تعمیم‌یافته کمتر از احتمال پوشش اسمی است به چشم می‌خورد. همچنین کانیچوکاتو و لوک (۲۰۱۳) به مطالعه بازه اطمینان تعمیم‌یافته برای تفاضل دو شاخص C_{pmk} پرداخته‌اند.

در این مقاله برای دو فرآیند نرمال مستقل، بازه‌های اطمینان جدیدی برای نسبت و تفاضل دو شاخص C_{pmk} بر اساس روش خودگردانی پارامتری و توزیع مجانبی برآورد C_{pmk} پیشنهاد می‌شود. پرن و همکاران (۱۹۹۲) به برخی از خواص نامطلوب شاخص C_{pmk}، زمانی که مقدار هدف بین حدود مشخصات فنی است اما با M برابر نیست اشاره کردند (وان من، ۱۹۹۷a). علاوه بر این به دلیل متداول بودن حالت تقارن در اکثر مسائل کاربردی، فرض شده است $T = M$. شبیه‌سازی‌ها نشان می‌دهد که بازه‌های اطمینان خودگردانی پارامتری و مجانبی اصلاح شده از دیدگاه احتمال پوشش عملکرد بهتر و در برخی موارد عملکرد مشابه، نسبت به بازه اطمینان

تعمیم‌یافته دارند.

در بخش ۲ ابتدا مروری بر بازه اطمینان تعمیم‌یافته خواهد شد، سپس بازه‌های اطمینان بر اساس روش‌های خودگردانی پارامتری و مجانبی توضیح داده می‌شود. در بخش ۳ بازه‌های اطمینان معرفی شده، از دیدگاه احتمال پوشش و متوسط طول بازه در مطالعه‌ای شبیه‌سازی مقایسه می‌شوند و در بخش ۴، با بیان دو مثال واقعی روش‌های ارائه شده مقایسه می‌شوند.

۲ روش‌های تشکیل بازه‌های اطمینان

دو فرآیند نرمال مستقل را در نظر بگیرید و فرض کنید $X_{i1},\ldots,X_{in_i}$ یک نمونه تصادفی با اندازه n_i از فرآیند iام برای $i=1,2$ باشد. همچنین فرض کنید X_{ij}، $i=1,2$، $j=1,\ldots,n_i$ دارای توزیع نرمال با میانگین μ_i و واریانس σ_i^2 باشد. بنابراین شاخص C_{pmk} برای فرآیند iام به‌صورت

$$C_{pmki}=\frac{\min\{USL-\mu_i,\mu_i-LSL\}}{3\{\sigma_i^2+(\mu_i-T)^2\}^{\frac{1}{2}}}=\frac{d-|\mu_i-M|}{3\{\sigma_i^2+(\mu_i-T)^2\}^{\frac{1}{2}}}$$

تعریف می‌شود. در این بخش ابتدا بازه اطمینان تعمیم‌یافته ارائه شده توسط وو و هوانگ (۲۰۱۰) و کانیچوکاتو و لوک (۲۰۱۳) مرور می‌شود و سپس به چگونگی ساختن بازه اطمینان برای C_{pmk1}/C_{pmk2} و $C_{pmk1}-C_{pmk2}$ با روش خودگردانی پارامتری و بر اساس توزیع مجانبی برآورد C_{pmk} پراخته می‌شود.

در این مقاله، $\bar{X}$ و S_b^2 به ترتیب نشان‌دهنده میانگین و واریانس نمونه‌ای هستند به گونه‌ای که

$$\bar{X}_i=\frac{1}{n_i}\sum_{j=1}^{n_i}X_{ij},\quad S_{b_i}^2=\frac{1}{n_i}\sum_{j=1}^{n_i}(X_{ij}-\bar{X}_i)^2,\quad i=1,2$$

۱.۲ بازه اطمینان تعمیم‌یافته

فرض کنید $\bar{x}_i$ و $s_{b_i}^2$ نشان‌دهنده مقادیر مشاهده شده $\bar{X}_i$ و $S_{b_i}^2$ برای $i=1,2$ باشد و متغیرهای تصادفی Z_i و U_i به‌صورت

$$Z_i=\frac{\sqrt{n_i}(\bar{X}_i-\mu_i)}{\sigma_i},U_i^2=\frac{n_iS_{b_i}^2}{\sigma_i^2}$$

تعریف شوند، به گونه‌ای که $Z_i \sim N(0,1)$ و $U_i^2 \sim \mathcal{X}^2_{n_i-1}$ برای $i = 1,2$. در این صورت کمیت محوری تعمیم‌یافته برای C_{pmk1}/C_{pmk2} به‌صورت

$$GR = \frac{(d - |Q_{\mu_1} - M|)/\{Q_{\sigma_1^2} + (Q_{\mu_1} - T)^2\}^{\frac{1}{2}}}{(d - |Q_{\mu_2} - M|)/\{Q_{\sigma_2^2} + (Q_{\mu_2} - T)^2\}^{\frac{1}{2}}}$$

است، که در آن $Q_{\mu_i} = \bar{x}_i - Z_i s_{b_i}/U_i$ و $Q_{\sigma_i^2} = n_i s_{b_i}^2/U_i^2$ کمیت محوری تعمیم‌یافته برای μ_i و σ_i^2 هستند. بنابراین بازه اطمینان تعمیم‌یافته $100(1-\alpha)\%$ برای C_{pmk1}/C_{pmk2} به صورت $(GR_{\alpha/2}, GR_{1-\alpha/2})$ است که در آن $GR_{\alpha/2}$ و $GR_{1-\alpha/2}$ به ترتیب چندک $\alpha/2$ام و $1-\alpha/2$ام توزیع GR است و با شبیه‌سازی مونت کارلو به‌دست می‌آید. برای جزئیات بیشتر به وو و هوانگ (۲۰۱۰) مراجعه شود. به صورت مشابه بازه اطمینان تعمیم‌یافته برای $C_{pmk1} - C_{pmk2}$ به‌دست می‌آید.

۲.۲ بازه اطمینان خودگردانی پارامتری

خودگردانی پارامتری روشی سودمند در مسائل استنباط آماری دارای پارامتر مزاحم است. در این‌جا از ایده بازه اطمینان خودگردانی پارامتری، که توسط افرون (۱۹۸۱) و افرون و تیب شیرانی (۱۹۸۶) مطرح شده است، برای ساختن بازه اطمینان برای C_{pmk1}/C_{pmk2} و $C_{pmk1} - C_{pmk2}$ استفاده می‌شود. فرض کنید $s_i^2 = n_i s_{b_i}^2/n_i - 1$، در این صورت کمیت محوری خودگردانی پارامتری برای شاخص C_{pmki} برابر با

$$\hat{C}^B_{pmki} = \frac{d - |\bar{X}_i^B - T|}{3\{S_i^{2B} + (\bar{X}_i^B - T)^2\}^{\frac{1}{2}}}, \quad i = 1,2$$

است، به گونه‌ای که $\bar{X}_i^B \sim N(\bar{x}_i, s_i^2)$ و $S_i^{2B} \sim s_i^2\mathcal{X}^2_{n_i-1}/n_i - 1$. بنابراین، می‌توان چندک $\alpha/2$ام و $1-\alpha/2$ام توزیع $BR = \hat{C}^B_{pmk1}/\hat{C}^B_{pmk2}$ را به‌عنوان کران پایین و بالای بازه اطمینان خودگردانی پارامتری برای C_{pmk1}/C_{pmk2}، با استفاده از شبیه‌سازی مونت کارلو، از طریق الگوریتم زیر به‌دست آورد:

بر اساس مقادیر مشاهده شده x_{ij}، $j = 1,\dots,n_i$، $i = 1,2$ از دو فرآیند نرمال

۱- مقادیر $\bar{x}_i$ و $s_i^۲$ برای $i = ۱, ۲$ محاسبه شود.

۲- $\bar{X}_i^B$ از توزیع $N(\bar{x}_i, s_i^۲)$ و $S_i^{۲B}$ از توزیع ۱ $- s_i^۲ \mathcal{X}_{n_i-۱}^۲/n_i$ تولید شود.

۳- مقدار BR محاسبه شود.

۴- مراحل ۲ و ۳، K مرتبه (برای Kهای بزرگ) تکرار شود.

۵- چندک‌های $\alpha/۲$ام و $۱ - \alpha/۲$ام از توزیع BR محاسبه شود.

به‌صورت مشابه، بازه اطمینان برای $C_{pmk۲} - C_{pmk۱}$، نیز حاصل می‌گردد.

۳.۲ بازه اطمینان مجانبی

با توجه به اینکه $\bar{X}$ و $S_b^۲$ برآوردگرهای ماکسیمم درستنمایی و سازگار μ و $\sigma^۲$ هستند، برآوردگر ماکسیمم درستنمایی و سازگار C_{pmk} بر اساس نمونه nتایی برابر است با

$$\hat{C}_{pmk} = \frac{d - |\bar{X} - M|}{۳\{S_b^۲ + (\bar{X} - T)^۲\}^{\frac{۱}{۲}}}$$

چن و سو (۱۹۹۵) برای یک فرآیند نشان دادند در صورتی که $\mu \neq M$، آنگاه $\sqrt{n}(\hat{C}_{pmk} - C_{pmk})$ دارای توزیع مجانبی نرمال با میانگین صفر و برآورد واریانس به‌صورت

$$\begin{aligned}\hat{V}_{CH} &= \frac{۱}{۹(۱ + \hat{\lambda}^{*۲})} + (\frac{۲\hat{\lambda}^*}{۳(۱ + \hat{\lambda}^{*۲})^{\frac{۳}{۲}}})\hat{C}_{pmk} \\ &+ (\frac{۱۴۴\hat{\lambda}^{*۲} + (USL - LSL)^۲(\frac{m_۴}{S^۴} - ۱)}{۱۴۴(۱ + \hat{\lambda}^{*۲})^۲})\hat{C}_{pmk}^۲\end{aligned}$$

است، که در آن $\hat{\lambda}^* = (\bar{X} - T)/S$ و $m_۴ = \frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^n (X_i - \bar{X})^۴$. چن و سو (۱۹۹۵) شکل نادرستی از $\hat{V}_{CH}$ را ارائه داده‌اند. لذا در این مقاله $\hat{V}_{CH}$، با آنچه که توسط چن و سو (۱۹۹۵) ارائه شده است اندکی متفاوت می‌باشد. باید توجه داشت که به‌ازای $T = \mu$ و $T = M$، شاخص C_{pmk} به $C_p = C_p(۰, ۰)$ و به‌ازای $T \neq M$ و $\mu = M$

شاخص C_{pmk} به $C_{pm}=C_p(0,1)$ تبدیل می‌شود. برای اطلاعات بیشتر به پرن و کاتز (۲۰۰۶) مراجعه شود. بنابراین در این حالت مناسب است که از توزیع مجانبی $\hat{C}_{pm}$ استفاده شود. برای اطلاعات بیشتر به چن و همکاران (۱۹۹۰) مراجعه شود.

حال فرض کنید هر دو فرآیند نامتمرکز باشند یعنی $T\neq\mu$. در این صورت بازه اطمینان $100(1-\alpha)\%$ برای تفاضل دو شاخص C_{pmk} به‌صورت

$$\hat{C}_{pmk1}-\hat{C}_{pmk2}\pm z_{1-\frac{\alpha}{2}}\{\frac{\hat{V}_{CH1}}{n_1}+\frac{\hat{V}_{CH2}}{n_2}\}^{\frac{1}{2}}$$

است، که در آن $\hat{V}_{CHi}/n_i$ برآورد واریانس مجانبی $\hat{C}_{pmki}$ برای $i=1,2$ است. برای تشکیل بازه اطمینان مجانبی برای نسبت دو شاخص C_{pmk}، باید توجه داشت که $\sqrt{n}(\log(\hat{C}_{pmk})-\log(C_{pmk}))$ بر اساس قضیه کرامر (فرگوسن، ۱۹۹۶) دارای توزیع تقریبی نرمال با میانگین صفر و برآورد واریانس مجانبی $\hat{V}_{CH}/\hat{C}^2_{pmk}$ است. بنابراین بازه اطمینان مجانبی برای $\log(C_{pmk1})-\log(C_{pmk2})$ برابر است با

$$\log(\hat{C}_{pmk1})-\log(\hat{C}_{pmk2})\pm z_{1-\frac{\alpha}{2}}\{\frac{\hat{V}_{CH1}}{n_1\hat{C}^2_{pmk1}}+\frac{\hat{V}_{CH2}}{n_2\hat{C}^2_{pmk2}}\}^{\frac{1}{2}}$$

با توجه به اینکه تبدیل لگاریتمی یک به یک است، بازه اطمینان مجانبی $100(1-\alpha)\%$ برای نسبت دو شاخص C_{pmk} به‌صورت

$$(\frac{\hat{C}_{pmk1}}{\hat{C}_{pmk2}}\exp\{-z_{1-\frac{\alpha}{2}}sd\},\frac{\hat{C}_{pmk1}}{\hat{C}_{pmk2}}\exp\{z_{1-\frac{\alpha}{2}}sd\})$$

به‌دست می‌آید، که در آن $sd=\{\frac{\hat{V}_{CH1}}{n_1\hat{C}^2_{pmk1}}+\frac{\hat{V}_{CH2}}{n_2\hat{C}^2_{pmk2}}\}^{\frac{1}{2}}$.

۴.۲ بازه اطمینان مجانبی اصلاح شده

با توجه به تقریبی بودن توزیع و واریانس معرفی شده توسط چن و سو (۱۹۹۵)، شبیه‌سازی‌های انجام شده نشان می‌دهد استفاده از $\hat{V}_{CHi}/n_i$ به عنوان برآورد واریانس تقریبی توزیع $\hat{C}_{pmk}$، باعث کاهش احتمال پوشش نسبت به احتمال پوشش اسمی می‌شود. به منظور حل این مشکل، این توزیع مجانبی اصلاح و از

واریانس دقیق $\hat{C}_{pmk}$ استفاده می‌شود. پرن و همکاران (۱۹۹۲) rامین گشتاور $\hat{C}_{pmk}$ را برای حالت $T = M$ به‌صورت

$$E(\hat{C}^r_{pmk}) = \frac{1}{3^r}\sum_{i=0}^{r}(-1)^i \begin{pmatrix} r \\ i \end{pmatrix} (\frac{\delta}{\sqrt{2}})^{r-i} e^{-\frac{\lambda}{2}} \times \sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{j!}(\frac{\lambda}{2})^j \frac{\Gamma(\frac{1}{2}(i+1)+j)\Gamma(\frac{1}{2}(n-r+i)+j)}{\Gamma(\frac{1}{2}+j)\Gamma(\frac{1}{2}(n+i)+j)} \quad (1)$$

ارائه دادند، که در آن $\delta = \sqrt{n}(USL - LSL)/2\sigma$ و $\lambda = n(\mu - T)^2/\sigma^2$. بنابراین با استفاده از رابطه (۱) می‌توان واریانس $\hat{C}_{pmk}$ (که با σ^2_{pmk} نشان داده می‌شود) را محاسبه کرد. همان‌طور که در رابطه (۱) مشاهده می‌شود، σ^2_{pmk} به پارامترهای مجهول μ و σ^2 بستگی دارد که با استفاده از برآوردگرهای نااریب با کمترین واریانس $\bar{X}$ و $S^2 = nS^2_b/n - 1$ برآورد می‌شوند. در این حالت، با توجه به اینکه $\hat{\sigma}^2_{pmk}$ تابعی پیوسته از $\bar{X}$ و S^2 است، برآوردگری سازگار برای σ^2_{pmk} می‌باشد. بنابراین زمانی که فرآیند نامتمرکز است یعنی $T \neq \mu$، $\hat{C}_{pmk}$ توزیع مجانبی نرمال با میانگین C_{pmk} و برآورد واریانس $\hat{\sigma}^2_{pmk}$ دارد.

فرض کنید دو فرآیند نامتمرکز وجود داشته باشد. بنابراین، $\hat{C}_{pmk1} - \hat{C}_{pmk2}$ دارای توزیع تقریبی نرمال با میانگین $C_{pmk1} - C_{pmk2}$ و برآورد واریانس $\hat{V}_d = \hat{\sigma}^2_{pmk1} + \hat{\sigma}^2_{pmk2}$ است. بازه اطمینان $100(1-\alpha)\%$ پیشنهادی بر اساس توزیع مجانبی $\hat{C}_{pmk}$، برای تفاضل دو C_{pmk} به‌صورت

$$\hat{C}_{pmk1} - \hat{C}_{pmk2} \pm z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\hat{V}_d} \quad (2)$$

است. برای محاسبه بازه اطمینان مجانبی برای نسبت دو شاخص C_{pmk} می‌توان از تبدیل لگاریتمی استفاده کرد. در این حالت بازه اطمینان مجانبی برای $\log(C_{pmk1}) - \log(C_{pmk2})$ برابر با

$$\log(\hat{C}_{pmk1}) - \log(\hat{C}_{pmk2}) \pm z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\hat{V}_r}$$

است، که در آن

$$\hat{V}_r = \frac{\hat{\sigma}^2_{pmk1}}{\hat{C}^2_{pmk1}} + \frac{\hat{\sigma}^2_{pmk2}}{\hat{C}^2_{pmk2}}$$

بنابراین بازه اطمینان مجانبی اصلاح شده $۱۰۰(۱-\alpha)\%$ برای نسبت دو C_{pmk} به‌صورت

$$(\frac{\hat{C}_{pmk۱}}{\hat{C}_{pmk۲}}\exp\{-z_{۱-\frac{\alpha}{۲}}\sqrt{\hat{V}_r}\}, \frac{\hat{C}_{pmk۱}}{\hat{C}_{pmk۲}}\exp\{z_{۱-\frac{\alpha}{۲}}\sqrt{\hat{V}_r}\}) \qquad (۳)$$

است. همان‌طور که قبلاً اشاره شد، اگر فرآیند متمرکز و متقارن باشد استفاده از شاخص C_p صحیح می‌باشد. در این حالت می‌توان نشان داد که واریانس دقیق $\hat{C}_{pmk}$ که در روش بازه اطمینان مجانبی اصلاح شده مورد استفاده قرار گرفت به صورت تقریبی با واریانس $\hat{C}_p$ برابر می‌شود. به منظور بررسی بیشتر، برای یک فرآیند متمرکز و متقارن به راحتی می‌توان نشان داد که

$$\begin{aligned} E[\hat{C}_{pmk}] &= \frac{\sqrt{\frac{n}{۲}}\Gamma(\frac{n-۱}{۲})}{\Gamma(\frac{n}{۲})}C_p - \frac{\Gamma(\frac{n}{۲})}{\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{n+۱}{۲})} \\ E[\hat{C}^۲_{pmk}] &= \frac{n}{n-۲}C_p^۲ - \frac{۲\sqrt{۲n}}{۳\sqrt{\pi}(n-۱)}C_p + \frac{۱}{۹n} \end{aligned}$$

با استفاده از تقریب استرلینگ، برای nهای بزرگ می‌توان نشان داد که عبارت $\Gamma(\frac{n}{۲})/\Gamma(\frac{n+۱}{۲})$ به‌صورت تقریبی برابر با $\sqrt{۲/(n+۱)}$ است. بنابراین برای nهای بزرگ، گشتاورهای اول و دوم $\hat{C}_{pmk}$ به‌صورت تقریبی برابر با گشتاورهای اول و دوم $\hat{C}_p$ هستند (پرن و کاتز، ۲۰۰۶).

محاسبه بازه‌های (۲) و (۳)، مستلزم محاسبه سری (۱) است. چون برخی از نرم‌افزارها مانند R و MATLAB قادر به محاسبه تابع گاما به‌ازای مقادیر بزرگ (۱۷۲ و بیشتر) نیستند، برای حل این مشکل روشی نظری و ابتکاری ارائه می‌شود که نسبت توابع گاما به‌صورت ضرب چند تابع در نظر گرفته شود. به عنوان مثال رابطه (۱)، به‌ازای $i=۱$ به‌صورت

$$\frac{\Gamma(۱+j)}{\Gamma(\frac{۱}{۲}+j)} = \begin{cases} \frac{۱}{\sqrt{\pi}}\prod_{l=۱}^{j}\frac{l}{j+\frac{۱}{۲}-l} & j \neq ۰ \\ \frac{۱}{\sqrt{\pi}} & j = ۰ \end{cases}$$

است که با استفاده از آن امکان محاسبه واریانس دقیق $\hat{C}_{pmk}$ فراهم می‌شود.

۳ مطالعه شبیه‌سازی

در این بخش بازه‌های اطمینان پیشنهادی و بازه اطمینان تعمیم‌یافته ارائه شده توسط وو و هوانگ (۲۰۱۰) و کانیچوکاتو و لوک (۲۰۱۳)، از دیدگاه احتمال پوشش و متوسط طول بازه مورد مقایسه قرار می‌گیرند.

برای مقادیر داده شده μ_i، σ_i و n_i، نمونه تصادفی با اندازه n_i از توزیع نرمال تولید و $\bar{x}_i$، $s_{b_i}^{۲}$ و $s_i^{۲}$ برای $i = ۱, ۲$ محاسبه می‌شوند. برای هر روش، بازه اطمینان با استفاده از رابطه‌های ارائه شده در بخش ۲، به‌دست آورده می‌شوند. نسبت تعداد دفعاتی که در $N = ۱۰۰۰۰۰$ مرتبه مقادیر واقعی $C_{pmk۱}/C_{pmk۲}$ و $C_{pmk۱} - C_{pmk۲}$ در بازه‌های اطمینان مربوطه قرار می‌گیرند به عنوان برآورد احتمال پوشش در نظر گرفته شده است و همچنین میانگین طول بازه‌های اطمینان (اعداد داخل پرانتز) محاسبه می‌شود. برای بازه‌های اطمینان تعمیم‌یافته (GCI) و خودگردانی پارامتری (PBCI) چندک‌های مورد نیاز بر اساس نمونه $K = ۴۰۰۰۰$تایی محاسبه شده است. همچنین روش مجانبی با (ACI) و روش مجانبی اصلاح شده با (MACI) نشان داده شده‌اند.

به منظور مقایسه بهتر و اریب نبودن نتایج به‌دست آمده در شبیه‌سازی‌ها، از مقادیر مختلف میانگین و انحراف معیار ارائه شده توسط وو و هوانگ (۲۰۱۰) نیز استفاده شده است. همچنین قرار شده است $USL = ۳$، $LSL = -۳$ و $T = ۰$. در جدول ۱، برخی طرح‌ها مربوط به فرآیند متمرکز است؛ یعنی $T = \mu$ و برخی دیگر مربوط به فرآیند نامتمرکز است، یعنی $T \neq \mu$. طرح‌های ۱ – ۴، ۶، ۱۱ و ۱۶ شامل یک فرآیند یا دو فرآیند متمرکز هستند و در مابقی طرح‌ها، فرآیندها نامتمرکز هستند. همان‌طور که در بخش ۲ تذکر داده شده است در صورتی که فرآیند متمرکز باشد، شاخص مناسب برای مقایسه فرآیندها شاخص C_p است. اما به دلیل اینکه در عمل و در مسائل کاربردی میانگین واقعی فرآیند مجهول است، عملاً مشخص نیست که فرآیند متمرکز یا نامتمرکز است.

بنابراین برای مقایسه فرآیندها در تمامی طرح‌ها از شاخص $\hat{C}_{pmk}$ استفاده می‌شود تا مشخص شود حتی در صورت استفاده از شاخص قابلیت نامناسب، کدام

جدول ۱: مقادیر متفاوت μ_iها و σ_iهای استفاده شده در شبیه‌سازی

طرح	μ_1	σ_1	μ_2	σ_2	C_{pmk1}	C_{pmk2}	C_{pmk1}/C_{pmk2}	$C_{pmk1}-C_{pmk2}$
۱	۰/۰۰	۰/۵۰	۰/۰۰	۰/۵۰	۲/۰۰۰	۲/۰۰۰	۱/۰۰۰	۰/۰۰۰
۲	۰/۰۰	۰/۷۵	۰/۲۵	۰/۷۵	۱/۳۳۳	۱/۱۶۰	۱/۱۵۰	۰/۱۷۴
۳	۰/۰۰	۱/۰۰	۰/۵۰	۱/۰۰	۱/۰۰۰	۰/۷۴۵	۱/۳۴۲	۰/۲۵۵
۴	۰/۰۰	۱/۵۰	۱/۰۰	۱/۵۰	۰/۶۶۷	۰/۳۷۰	۱/۸۰۳	۰/۲۹۷
۵	۰/۲۵	۰/۵۰	۰/۲۵	۱/۵۰	۱/۶۴۰	۰/۶۰۳	۲/۷۲۰	۱/۰۳۷
۶	۰/۲۵	۰/۷۵	۰/۰۰	۱/۰۰	۱/۱۶۰	۱/۰۰۰	۱/۱۶۰	۰/۱۶۰
۷	۰/۲۵	۱/۰۰	۱/۰۰	۰/۷۵	۰/۸۸۹	۰/۵۳۳	۱/۶۶۷	۰/۳۵۶
۸	۰/۲۵	۱/۵۰	۰/۵۰	۰/۵۰	۰/۶۰۳	۱/۱۷۹	۰/۵۱۱	−۰/۵۷۶
۹	۰/۵۰	۰/۵۰	۰/۵۰	۰/۷۵	۱/۱۷۹	۰/۹۲۵	۱/۲۷۵	۰/۲۵۴
۱۰	۰/۵۰	۰/۷۵	۱/۰۰	۰/۵۰	۰/۹۲۵	۰/۵۹۶	۱/۵۵۰	۰/۳۲۸
۱۱	۰/۵۰	۱/۰۰	۰/۰۰	۱/۰۰	۰/۷۴۵	۱/۰۰۰	۰/۷۴۵	−۰/۲۵۵
۱۲	۰/۵۰	۱/۵۰	۰/۲۵	۱/۰۰	۰/۵۲۷	۰/۸۸۹	۰/۵۹۳	−۰/۳۶۲
۱۳	۱/۰۰	۰/۵۰	۱/۰۰	۱/۰۰	۰/۵۹۶	۰/۴۷۱	۱/۲۶۵	۰/۱۲۵
۱۴	۱/۰۰	۰/۷۵	۰/۵۰	۱/۵۰	۰/۵۳۳	۰/۵۲۷	۱/۰۱۲	۰/۰۰۶
۱۵	۱/۰۰	۱/۰۰	۰/۲۵	۰/۵۰	۰/۴۷۱	۱/۶۴۰	۰/۲۸۶	−۱/۱۶۸
۱۶	۱/۰۰	۱/۵۰	۰/۰۰	۰/۷۵	۰/۳۷۰	۱/۳۳۳	۰/۲۷۷	−۰/۹۶۴

روش عملکرد بهتری دارد.

نتایج مربوط به برآورد احتمال پوشش و میانگین طول برای نسبت و تفاضل دو شاخص C_{pmk} برای حجم نمونه‌های مختلف و $1-\alpha=$ ۰/۹۵ در جدول ۲ بیانگر آن است که:

۱) بازه اطمینان مجانبی برای نسبت و تفاضل دو شاخص C_{pmk}، بر اساس واریانس مجانبی پیشنهاد شده توسط چن و سو (۱۹۹۵)، زمانی‌که اندازه نمونه کوچک است (کوچک‌تر از ۷۵ یا ۵۰) عملکرد مناسبی از دیدگاه احتمال پوشش ندارد. همچنین برآورد احتمال پوشش این روش زمانی که اندازه نمونه کوچک است و فرآیند متمرکز است ($T=\mu$) مانند طرح‌های ۱ − ۴، ۶، ۱۱ و ۱۶ اختلاف زیادی با ۰/۹۵ در مقایسه با حالتی که فرآیند نامتمرکز است ($T\neq\mu$)؛ دارد. با این وجود در برخی موارد (طرح‌های ۵ و ۷) برای اندازه نمونه کوچک، احتمال پوشش بازه اطمینان مجانبی در حالتی که حتی فرآیند نامتمرکز است نیز به صورت معنی‌داری کمتر از ۰/۹۵ است. بنابراین در عمل، به ویژه برای اندازه نمونه کوچک و در حالتی که فرآیند متمرکز است، بازه اطمینان مجانبی توصیه نمی‌شود.

۲) همان‌طور که وو و هوانگ (۲۰۱۰) متذکر شده‌اند، بازه اطمینان تعمیم‌یافته برای نسبت دو شاخص C_{pmk} عملکرد بهتری نسبت به بازه اطمینان تعمیم‌یافته برای

جدول ۲: برآورد احتمال پوشش و متوسط طول بازه‌های اطمینان برای نسبت و تفاضل دو شاخص C_{pmk}

طرح	حجم نمونه	نسبت GCI	نسبت PBCI	نسبت ACI	نسبت MACI	تفاضل GCI	تفاضل PBCI	تفاضل ACI	تفاضل MACI
	(۱۰,۱۵)	۰/۹۵۵ (۱/۴۴۲)	۰/۹۵۲ (۱/۴۴۳)	۰/۸۳۷ (۰/۹۹۴)	۰/۹۶۸ (۱/۵۷۰)	۰/۹۵۵ (۲/۳۶۳)	۰/۹۵۲ (۲/۷۶۸)	۰/۸۴۸ (۱/۸۷۲)	۰/۹۸۰ (۲/۸۴۵)
	(۱۵,۲۵)	۰/۹۵۵ (۱/۰۶۳)	۰/۹۵۳ (۱/۰۷۴)	۰/۸۷۷ (۰/۸۳۸)	۰/۹۶۴ (۱/۱۲۷)	۰/۹۵۵ (۱/۸۶۹)	۰/۹۵۳ (۲/۰۸۱)	۰/۸۸۵ (۱/۵۹۸)	۰/۹۷۱ (۲/۱۱۵)
۱	(۲۵,۲۵)	۰/۹۵۴ (۰/۹۰۷)	۰/۹۵۴ (۰/۸۹۹)	۰/۸۹۹ (۰/۷۴۶)	۰/۹۶۲ (۰/۹۲۳)	۰/۹۵۴ (۱/۶۱۱)	۰/۹۵۴ (۱/۷۴۷)	۰/۹۰۵ (۱/۴۳۸)	۰/۹۶۷ (۱/۷۶۱)
	(۲۵,۵۰)	۰/۹۵۴ (۰/۷۵۱)	۰/۹۵۳ (۰/۷۶۰)	۰/۹۰۹ (۰/۶۵۳)	۰/۹۶۰ (۰/۷۸۰)	۰/۹۵۴ (۱/۳۹۳)	۰/۹۵۳ (۱/۴۸۷)	۰/۹۱۴ (۱/۲۶۴)	۰/۹۶۴ (۱/۵۰۱)
	(۵۰,۵۰)	۰/۹۵۴ (۰/۶۰۷)	۰/۹۵۶ (۰/۶۰۵)	۰/۹۲۷ (۰/۵۴۸)	۰/۹۵۷ (۰/۶۱۱)	۰/۹۵۴ (۱/۱۳۴)	۰/۹۵۶ (۱/۱۸۴)	۰/۹۳۰ (۱/۰۶۹)	۰/۹۶۰ (۱/۱۸۸)
	(۷۵,۷۵)	۰/۹۵۲ (۰/۴۸۶)	۰/۹۵۵ (۰/۴۸۵)	۰/۹۳۶ (۰/۴۵۳)	۰/۹۵۶ (۰/۴۸۸)	۰/۹۵۲ (۰/۹۲۶)	۰/۹۵۵ (۰/۹۵۳)	۰/۹۳۸ (۰/۸۸۹)	۰/۹۵۸ (۰/۹۵۵)
	(۱۰,۱۵)	۰/۹۵۳ (۱/۷۱۰)	۰/۹۵۱ (۱/۶۸۵)	۰/۸۵۹ (۱/۲۷۹)	۰/۹۶۷ (۱/۸۵۹)	۰/۹۴۸ (۱/۵۹۵)	۰/۹۵۱ (۱/۸۳۸)	۰/۸۵۹ (۱/۳۲۱)	۰/۹۷۳ (۱/۸۹۵)
	(۱۵,۲۵)	۰/۹۵۲ (۱/۲۶۸)	۰/۹۵۰ (۱/۲۶۰)	۰/۸۸۹ (۱/۰۵۳)	۰/۹۶۱ (۱/۳۴۱)	۰/۹۴۷ (۱/۲۷۴)	۰/۹۵۱ (۱/۳۹۳)	۰/۸۸۸ (۱/۱۱۶)	۰/۹۶۴ (۱/۴۱۹)
۲	(۲۵,۲۵)	۰/۹۴۸ (۱/۰۷۴)	۰/۹۴۸ (۱/۰۶۸)	۰/۹۰۹ (۰/۹۵۲)	۰/۹۵۵ (۱/۱۱۲)	۰/۹۴۶ (۱/۰۸۶)	۰/۹۴۸ (۱/۱۶۶)	۰/۹۱۲ (۱/۰۰۹)	۰/۹۶۰ (۱/۱۷۸)
	(۲۵,۵۰)	۰/۹۴۹ (۰/۹۱۲)	۰/۹۴۹ (۰/۹۰۰)	۰/۹۱۴ (۰/۸۰۷)	۰/۹۵۸ (۰/۹۳۵)	۰/۹۴۵ (۰/۹۶۳)	۰/۹۵۰ (۱/۰۰۵)	۰/۹۱۱ (۰/۸۷۵)	۰/۹۵۷ (۱/۰۱۶)
	(۵۰,۵۰)	۰/۹۴۶ (۰/۷۳۱)	۰/۹۴۷ (۰/۷۳۰)	۰/۹۲۹ (۰/۶۹۳)	۰/۹۵۱ (۰/۷۴۸)	۰/۹۴۴ (۰/۷۷۱)	۰/۹۴۷ (۰/۷۹۹)	۰/۹۳۱ (۰/۷۴۳)	۰/۹۵۴ (۰/۸۰۳)
	(۷۵,۷۵)	۰/۹۴۴ (۰/۵۹۱)	۰/۹۴۴ (۰/۵۹۲)	۰/۹۳۶ (۰/۵۷۲)	۰/۹۵۰ (۰/۶۰۲)	۰/۹۴۱ (۰/۶۳۱)	۰/۹۴۴ (۰/۶۴۶)	۰/۹۳۷ (۰/۶۱۶)	۰/۹۵۲ (۰/۶۴۸)
	(۱۰,۱۵)	۰/۹۵۰ (۲/۲۱۲)	۰/۹۴۵ (۲/۱۱۶)	۰/۸۷۲ (۱/۷۰۹)	۰/۹۶۵ (۲/۳۶۰)	۰/۹۳۷ (۱/۲۱۵)	۰/۹۴۸ (۱/۳۷۵)	۰/۸۶۴ (۱/۰۲۳)	۰/۹۶۸ (۱/۴۲۲)
	(۱۵,۲۵)	۰/۹۴۹ (۱/۶۲۸)	۰/۹۴۴ (۱/۵۷۵)	۰/۸۹۸ (۱/۳۷۳)	۰/۹۶۰ (۱/۶۹۳)	۰/۹۳۶ (۰/۹۷۷)	۰/۹۴۷ (۱/۰۵۰)	۰/۸۹۱ (۰/۸۵۹)	۰/۹۶۰ (۱/۰۷۲)
۳	(۲۵,۲۵)	۰/۹۴۱ (۱/۳۶۸)	۰/۹۴۰ (۱/۳۶۱)	۰/۹۱۳ (۱/۲۵۴)	۰/۹۵۱ (۱/۴۲۹)	۰/۹۳۳ (۰/۸۲۵)	۰/۹۴۱ (۰/۸۷۵)	۰/۹۱۵ (۰/۷۷۴)	۰/۹۵۶ (۰/۸۸۶)
	(۲۵,۵۰)	۰/۹۴۹ (۱/۱۷۳)	۰/۹۴۵ (۱/۱۲۲)	۰/۹۱۹ (۱/۰۳۲)	۰/۹۵۷ (۱/۱۷۲)	۰/۹۳۷ (۰/۷۴۴)	۰/۹۴۷ (۰/۷۶۲)	۰/۹۱۱ (۰/۶۷۱)	۰/۹۵۵ (۰/۷۷۱)
	(۵۰,۵۰)	۰/۹۴۰ (۰/۹۳۲)	۰/۹۴۲ (۰/۹۳۱)	۰/۹۳۲ (۰/۸۹۹)	۰/۹۴۸ (۰/۹۵۸)	۰/۹۳۴ (۰/۵۸۵)	۰/۹۴۲ (۰/۶۰۲)	۰/۹۳۳ (۰/۵۶۶)	۰/۹۵۲ (۰/۶۰۵)
	(۷۵,۷۵)	۰/۹۳۹ (۰/۷۵۴)	۰/۹۴۰ (۰/۷۵۴)	۰/۹۳۷ (۰/۷۳۹)	۰/۹۴۸ (۰/۷۷۰)	۰/۹۳۳ (۰/۴۷۷)	۰/۹۴۰ (۰/۴۸۷)	۰/۹۳۸ (۰/۴۶۸)	۰/۹۵۱ (۰/۴۸۸)
	(۱۰,۱۵)	۰/۹۵۰ (۵/۱۴۰)	۰/۹۳۶ (۴/۲۴۲)	۰/۸۹۷ (۳/۳۵۲)	۰/۹۶۱ (۴/۲۴۶)	۰/۹۱۴ (۰/۸۴۸)	۰/۹۴۱ (۰/۹۳۶)	۰/۸۷۴ (۰/۷۴۰)	۰/۹۶۰ (۰/۹۷۱)
	(۱۵,۲۵)	۰/۹۵۰ (۳/۱۱۸)	۰/۹۳۵ (۲/۷۳۰)	۰/۹۱۴ (۲/۴۵۷)	۰/۹۵۸ (۲/۸۶۱)	۰/۹۱۷ (۰/۶۸۷)	۰/۹۳۸ (۰/۷۲۲)	۰/۸۹۶ (۰/۶۱۷)	۰/۹۵۶ (۰/۷۳۹)
۴	(۲۵,۲۵)	۰/۹۳۳ (۲/۵۲۴)	۰/۹۳۱ (۲/۴۷۲)	۰/۹۲۱ (۲/۲۸۱)	۰/۹۴۶ (۲/۵۰۷)	۰/۹۱۲ (۰/۵۷۳)	۰/۹۳۲ (۰/۶۰۰)	۰/۹۲۰ (۰/۵۴۹)	۰/۹۵۳ (۰/۶۰۸)
	(۲۵,۵۰)	۰/۹۵۴ (۲/۰۵۶)	۰/۹۳۷ (۱/۸۲۵)	۰/۹۲۹ (۱/۷۴۴)	۰/۹۵۶ (۱/۹۰۰)	۰/۹۲۱ (۰/۵۲۴)	۰/۹۳۸ (۰/۵۲۸)	۰/۹۱۳ (۰/۴۸۱)	۰/۹۵۲ (۰/۵۳۵)
	(۵۰,۵۰)	۰/۹۳۶ (۱/۶۰۳)	۰/۹۳۶ (۱/۵۹۳)	۰/۹۳۵ (۱/۵۶۱)	۰/۹۴۶ (۱/۶۲۶)	۰/۹۱۷ (۰/۴۰۵)	۰/۹۳۲ (۰/۴۱۴)	۰/۹۳۵ (۰/۴۰۰)	۰/۹۵۰ (۰/۴۱۶)
	(۷۵,۷۵)	۰/۹۴۱ (۱/۲۷۷)	۰/۹۴۴ (۱/۲۷۵)	۰/۹۳۸ (۱/۲۶۵)	۰/۹۴۶ (۱/۲۹۴)	۰/۹۲۲ (۰/۳۳۰)	۰/۹۳۷ (۰/۳۳۵)	۰/۹۴۰ (۰/۳۳۰)	۰/۹۴۸ (۰/۳۳۶)

ادامه جدول ۲

طرح	حجم نمونه	نسبت GCI	نسبت PBCI	نسبت ACI	نسبت MACI	تفاضل GCI	تفاضل PBCI	تفاضل ACI	تفاضل MACI
	(۱۰, ۵)	۰/۹۵۷	۰/۹۴۴	۰/۸۷۰	۰/۹۶۵	۰/۹۵۵	۰/۹۳۴	۰/۸۶۳	۰/۹۷۲
		(۶/۲۳۱)	(۵/۳۵۵)	(۳/۶۷۸)	(۵/۲۹۵)	(۱/۷۰۰)	(۱/۹۵۸)	(۱/۲۱۳)	(۲/۰۶۵)
	(۱۵,۲۵)	۰/۹۵۹	۰/۹۴۸	۰/۹۲۲	۰/۹۵۹	۰/۹۵۲	۰/۹۳۹	۰/۹۰۹	۰/۹۶۴
		(۴/۰۱۸)	(۳/۶۹۲)	(۳/۱۸۲)	(۳/۶۷۴)	(۱/۳۶۵)	(۱/۵۱۹)	(۱/۳۰۱)	(۱/۵۷۴)
۵	(۲۵,۲۵)	۰/۹۵۳	۰/۹۵۲	۰/۹۳۷	۰/۹۶۱	۰/۹۵۶	۰/۹۴۴	۰/۹۲۷	۰/۹۵۹
		(۳/۳۱۹)	(۳/۲۱۲)	(۲/۸۳۸)	(۳/۰۹۷)	(۱/۱۲۷)	(۱/۱۸۲)	(۱/۰۷۹)	(۱/۲۰۵)
	(۲۵,۵۰)	۰/۹۵۷	۰/۹۴۹	۰/۹۳۵	۰/۹۵۴	۰/۹۴۵	۰/۹۴۳	۰/۹۲۶	۰/۹۵۷
		(۲/۶۲۲)	(۲/۴۸۶)	(۲/۳۱۰)	(۲/۴۸۹)	(۱/۰۳۹)	(۱/۱۳۲)	(۱/۰۳۶)	(۱/۱۵۷)
	(۵۰,۵۰)	۰/۹۵۶	۰/۹۵۶	۰/۹۴۵	۰/۹۵۵	۰/۹۵۴	۰/۹۴۸	۰/۹۴۰	۰/۹۵۵
		(۲/۰۸۹)	(۲/۰۶۰)	(۱/۹۶۰)	(۲/۰۱۸)	(۰/۸۰۱)	(۰/۸۱۹)	(۰/۷۸۵)	(۰/۸۲۶)
	(۷۵,۷۵)	۰/۹۶۰	۰/۹۵۳	۰/۹۴۸	۰/۹۵۳	۰/۹۵۱	۰/۹۵۳	۰/۹۴۳	۰/۹۵۳
		(۱/۶۸۴)	(۱/۶۳۷)	(۱/۵۸۸)	(۱/۶۱۱)	(۰/۶۵۵)	(۰/۶۶۴)	(۰/۶۴۸)	(۰/۶۶۹)
	(۱۰,۱۵)	۰/۹۴۹	۰/۹۵۳	۰/۸۶۵	۰/۹۶۱	۰/۹۶۱	۰/۹۶۸	۰/۸۷۳	۰/۹۷۸
		(۲/۰۳۰)	(۲/۱۰۰)	(۱/۵۰۷)	(۲/۱۴۰)	(۱/۵۲۴)	(۱/۶۵۱)	(۱/۲۳۵)	(۱/۷۰۱)
	(۱۵,۲۵)	۰/۹۵۲	۰/۹۴۴	۰/۸۹۴	۰/۹۵۴	۰/۹۵۳	۰/۹۴۴	۰/۹۰۴	۰/۹۶۷
		(۱/۵۰۲)	(۱/۴۷۵)	(۱/۲۳۰)	(۱/۵۱۸)	(۱/۱۲۹)	(۱/۲۵۳)	(۱/۰۵۱)	(۱/۲۸۲)
۶	(۲۵,۲۵)	۰/۹۴۵	۰/۹۴۵	۰/۹۰۹	۰/۹۵۵	۰/۹۴۸	۰/۹۴۴	۰/۹۱۶	۰/۹۶۰
		(۱/۲۷۴)	(۱/۲۴۹)	(۱/۰۶۹)	(۱/۲۴۷)	(۰/۹۶۶)	(۱/۰۳۳)	(۰/۹۱۰)	(۱/۰۴۵)
	(۲۵,۵۰)	۰/۹۴۵	۰/۹۴۲	۰/۹۱۷	۰/۹۴۸	۰/۹۴۷	۰/۹۴۳	۰/۹۲۶	۰/۹۵۸
		(۱/۰۲۸)	(۱/۰۲۹)	(۰/۹۳۳)	(۱/۰۴۳)	(۰/۸۴۹)	(۰/۹۱۴)	(۰/۸۳۲)	(۰/۹۲۸)
	(۵۰,۵۰)	۰/۹۴۲	۰/۹۴۴	۰/۹۲۸	۰/۹۵۱	۰/۹۴۵	۰/۹۴۴	۰/۹۳۲	۰/۹۵۴
		(۰/۸۳۱)	(۰/۸۲۴)	(۰/۷۶۰)	(۰/۸۱۷)	(۰/۶۸۷)	(۰/۷۱۰)	(۰/۶۶۹)	(۰/۷۱۵)
	(۷۵,۷۵)	۰/۹۴۲	۰/۹۴۵	۰/۹۳۴	۰/۹۵۰	۰/۹۴۳	۰/۹۴۴	۰/۹۳۸	۰/۹۵۲
		(۰/۶۵۹)	(۰/۶۵۶)	(۰/۶۲۰)	(۰/۶۵۰)	(۰/۵۶۳)	(۰/۵۶۳)	(۰/۵۵۴)	(۰/۵۷۸)
	(۱۰,۱۵)	۰/۹۵۳	۰/۹۵۸	۰/۹۰۷	۰/۹۶۴	۰/۹۶۰	۰/۹۵۹	۰/۸۹۵	۰/۹۷۳
		(۳/۱۰۲)	(۳/۰۳۰)	(۲/۳۷۸)	(۳/۰۵۱)	(۱/۲۰۰)	(۱/۲۱۳)	(۰/۹۵۶)	(۱/۲۵۷)
	(۱۵,۲۵)	۰/۹۶۰	۰/۹۵۲	۰/۹۲۴	۰/۹۵۹	۰/۹۵۱	۰/۹۵۵	۰/۹۱۶	۰/۹۶۶
		(۲/۰۶۲)	(۲/۰۲۵)	(۱/۸۹۵)	(۲/۲۰۰)	(۰/۸۸۰)	(۰/۹۲۹)	(۰/۸۰۶)	(۰/۹۵۴)
۷	(۲۵,۲۵)	۰/۹۵۱	۰/۹۴۸	۰/۹۳۴	۰/۹۵۶	۰/۹۵۱	۰/۹۵۲	۰/۹۳۳	۰/۹۵۹
		(۱/۷۰۷)	(۱/۷۲۲)	(۱/۶۷۷)	(۱/۸۲۲)	(۰/۷۱۹)	(۰/۷۴۸)	(۰/۶۹۲)	(۰/۷۵۷)
	(۲۵,۵۰)	۰/۹۴۳	۰/۹۵۳	۰/۹۳۵	۰/۹۵۴	۰/۹۵۲	۰/۹۵۴	۰/۹۳۰	۰/۹۵۸
		(۱/۵۲۰)	(۱/۴۶۴)	(۱/۴۱۸)	(۱/۵۳۵)	(۰/۶۶۵)	(۰/۶۸۶)	(۰/۶۳۷)	(۰/۶۹۸)
	(۵۰,۵۰)	۰/۹۵۳	۰/۹۵۱	۰/۹۴۲	۰/۹۵۲	۰/۹۵۳	۰/۹۵۳	۰/۹۴۱	۰/۹۵۳
		(۱/۱۸۳)	(۱/۱۸۹)	(۱/۱۷۹)	(۱/۲۲۲)	(۰/۵۰۸)	(۰/۵۱۸)	(۰/۵۰۲)	(۰/۵۲۱)
	(۷۵,۷۵)	۰/۹۵۲	۰/۹۵۳	۰/۹۴۵	۰/۹۵۱	۰/۹۵۱	۰/۹۵۴	۰/۹۴۳	۰/۹۵۱
		(۰/۹۶۰)	(۰/۹۶۶)	(۰/۹۶۰)	(۰/۹۸۳)	(۰/۴۱۵)	(۰/۴۲۱)	(۰/۴۱۳)	(۰/۴۲۴)
	(۱۰,۱۵)	۰/۹۵۳	۰/۹۵۶	۰/۹۱۴	۰/۹۷۱	۰/۹۵۸	۰/۹۵۰	۰/۹۲۱	۰/۹۷۲
		(۰/۸۶۴)	(۰/۸۹۰)	(۰/۶۹۶)	(۰/۹۰۰)	(۱/۲۴۳)	(۱/۳۲۵)	(۱/۱۰۵)	(۱/۳۳۲)
	(۱۵,۲۵)	۰/۹۵۱	۰/۹۵۵	۰/۹۳۴	۰/۹۶۷	۰/۹۶۵	۰/۹۴۷	۰/۹۳۴	۰/۹۶۵
		(۰/۵۸۴)	(۰/۵۹۸)	(۰/۵۷۱)	(۰/۶۵۹)	(۱/۰۲۵)	(۰/۹۸۲)	(۰/۸۹۳)	(۰/۹۹۶)
۸	(۲۵,۲۵)	۰/۹۵۰	۰/۹۵۲	۰/۹۴۱	۰/۹۶۱	۰/۹۵۳	۰/۹۴۳	۰/۹۳۹	۰/۹۶۰
		(۰/۴۹۱)	(۰/۴۹۵)	(۰/۴۹۴)	(۰/۵۳۲)	(۰/۸۷۷)	(۰/۸۹۳)	(۰/۸۳۷)	(۰/۹۰۵)
	(۲۵,۵۰)	۰/۹۵۵	۰/۹۵۸	۰/۹۴۶	۰/۹۶۲	۰/۹۵۰	۰/۹۵۲	۰/۹۴۵	۰/۹۵۹
		(۰/۴۴۰)	(۰/۴۴۲)	(۰/۴۳۹)	(۰/۴۶۷)	(۰/۷۵۸)	(۰/۶۹۷)	(۰/۶۶۸)	(۰/۷۰۳)
	(۵۰,۵۰)	۰/۹۵۴	۰/۹۵۵	۰/۹۴۸	۰/۹۵۵	۰/۹۵۳	۰/۹۵۱	۰/۹۴۷	۰/۹۵۵
		(۰/۳۴۷)	(۰/۳۴۹)	(۰/۳۵۴)	(۰/۳۶۱)	(۰/۶۱۱)	(۰/۶۱۶)	(۰/۶۰۱)	(۰/۶۱۹)
	(۷۵,۷۵)	۰/۹۶۱	۰/۹۵۲	۰/۹۵۰	۰/۹۵۲	۰/۹۶۱	۰/۹۵۳	۰/۹۴۸	۰/۹۵۳
		(۰/۲۸۴)	(۰/۲۸۵)	(۰/۲۹۰)	(۰/۲۹۲)	(۰/۴۹۷)	(۰/۴۹۹)	(۰/۴۹۳)	(۰/۵۰۱)

ادامه جدول ۲

طرح	حجم نمونه	نسبت GCI	نسبت PBCI	نسبت ACI	نسبت MACI	تفاضل GCI	تفاضل PBCI	تفاضل ACI	تفاضل MACI
	(۱۰,۱۵)	۰/۹۴۳ (۲/۱۶۰)	۰/۹۵۱ (۲/۱۴۷)	۰/۹۰۸ (۱/۷۶۳)	۰/۹۵۵ (۲/۱۸۵)	۰/۹۵۶ (۱/۴۳۵)	۰/۹۵۳ (۱/۵۷۱)	۰/۹۱۹ (۱/۳۷۰)	۰/۹۷۰ (۱/۶۷۴)
	(۱۵,۲۵)	۰/۹۴۰ (۱/۵۷۱)	۰/۹۴۳ (۱/۵۰۰)	۰/۹۲۴ (۱/۳۹۲)	۰/۹۵۴ (۱/۵۸۸)	۰/۹۵۵ (۱/۱۹۹)	۰/۹۴۱ (۱/۲۴۹)	۰/۹۳۲ (۱/۱۱۶)	۰/۹۶۳ (۱/۲۶۹)
۹	(۲۵,۲۵)	۰/۹۵۴ (۱/۳۲۷)	۰/۹۴۴ (۱/۲۸۱)	۰/۹۲۹ (۱/۲۱۴)	۰/۹۵۳ (۱/۳۳۳)	۰/۹۵۴ (۱/۰۲۴)	۰/۹۴۴ (۱/۰۴۲)	۰/۹۳۷ (۰/۹۶۱)	۰/۹۶۰ (۱/۰۵۰)
	(۲۵,۵۰)	۰/۹۵۸ (۱/۱۱۲)	۰/۹۴۶ (۱/۰۷۱)	۰/۹۳۵ (۱/۰۲۸)	۰/۹۵۳ (۱/۱۰۵)	۰/۹۵۱ (۰/۸۸۴)	۰/۹۴۵ (۰/۹۰۶)	۰/۹۴۰ (۰/۸۵۰)	۰/۹۵۸ (۰/۹۱۴)
	(۵۰,۵۰)	۰/۹۵۳ (۰/۸۹۱)	۰/۹۴۸ (۰/۸۷۵)	۰/۹۴۱ (۰/۸۵۳)	۰/۹۵۲ (۰/۸۹۳)	۰/۹۵۳ (۰/۷۱۰)	۰/۹۴۷ (۰/۷۱۴)	۰/۹۴۵ (۰/۶۸۶)	۰/۹۵۶ (۰/۷۱۶)
	(۷۵,۷۵)	۰/۹۵۲ (۰/۷۱۵)	۰/۹۵۴ (۰/۷۰۷)	۰/۹۴۴ (۰/۶۹۴)	۰/۹۵۲ (۰/۷۱۶)	۰/۹۵۲ (۰/۵۷۵)	۰/۹۵۵ (۰/۵۷۵)	۰/۹۴۷ (۰/۵۶۲)	۰/۹۵۴ (۰/۵۷۸)
	(۱۰,۱۵)	۰/۹۵۰ (۲/۳۴۱)	۰/۹۴۶ (۲/۴۶۵)	۰/۹۰۱ (۲/۰۷۰)	۰/۹۵۲ (۲/۵۷۷)	۰/۹۵۳ (۱/۱۲۱)	۰/۹۴۸ (۱/۲۲۰)	۰/۹۰۲ (۱/۰۳۵)	۰/۹۶۵ (۱/۲۹۵)
	(۱۵,۲۵)	۰/۹۵۸ (۱/۷۳۴)	۰/۹۴۱ (۱/۷۶۷)	۰/۹۱۸ (۱/۶۵۶)	۰/۹۵۰ (۱/۹۰۲)	۰/۹۵۰ (۰/۹۰۶)	۰/۹۳۹ (۰/۹۶۵)	۰/۹۲۰ (۰/۸۶۱)	۰/۹۵۹ (۰/۹۵۵)
۱۰	(۲۵,۲۵)	۰/۹۵۴ (۱/۴۳۷)	۰/۹۴۴ (۱/۴۴۰)	۰/۹۳۱ (۱/۳۹۲)	۰/۹۵۱ (۱/۵۰۶)	۰/۹۵۴ (۰/۷۴۹)	۰/۹۴۳ (۰/۷۶۱)	۰/۹۳۴ (۰/۷۱۰)	۰/۹۵۶ (۰/۷۷۲)
	(۲۵,۵۰)	۰/۹۵۴ (۱/۲۷۹)	۰/۹۴۴ (۱/۲۹۷)	۰/۹۳۰ (۱/۲۴۸)	۰/۹۴۹ (۱/۳۵۵)	۰/۹۴۴ (۰/۶۷۷)	۰/۹۴۳ (۰/۷۲۰)	۰/۹۳۳ (۰/۶۷۳)	۰/۹۵۴ (۰/۷۳۴)
	(۵۰,۵۰)	۰/۹۵۳ (۰/۹۹۲)	۰/۹۴۷ (۰/۹۹۲)	۰/۹۴۱ (۰/۹۷۶)	۰/۹۵۱ (۱/۰۱۴)	۰/۹۵۳ (۰/۵۲۳)	۰/۹۴۶ (۰/۵۲۶)	۰/۹۴۳ (۰/۵۰۸)	۰/۹۵۴ (۰/۵۳۰)
	(۷۵,۷۵)	۰/۹۵۱ (۰/۸۰۳)	۰/۹۵۳ (۰/۸۰۴)	۰/۹۴۴ (۰/۷۹۴)	۰/۹۵۱ (۰/۸۱۴)	۰/۹۵۴ (۰/۴۲۱)	۰/۹۵۲ (۰/۴۲۵)	۰/۹۴۴ (۰/۴۱۶)	۰/۹۵۳ (۰/۴۲۸)
	(۱۰,۱۵)	۰/۹۴۵ (۱/۴۴۷)	۰/۹۴۱ (۱/۴۳۲)	۰/۸۷۵ (۱/۱۱۴)	۰/۹۵۴ (۱/۵۰۱)	۰/۹۳۵ (۰/۹۸۷)	۰/۹۳۸ (۱/۱۴۶)	۰/۸۸۳ (۱/۰۴۸)	۰/۹۷۲ (۱/۳۷۰)
	(۱۵,۲۵)	۰/۹۴۳ (۱/۰۴۶)	۰/۹۳۷ (۱/۰۳۵)	۰/۸۹۹ (۰/۸۹۹)	۰/۹۴۷ (۱/۰۷۲)	۰/۹۳۷ (۰/۹۲۸)	۰/۹۳۹ (۱/۰۱۵)	۰/۹۱۰ (۰/۸۷۸)	۰/۹۶۱ (۱/۰۳۴)
۱۱	(۲۵,۲۵)	۰/۹۴۰ (۰/۸۹۱)	۰/۹۴۰ (۰/۸۶۷)	۰/۹۱۳ (۰/۷۶۰)	۰/۹۵۱ (۰/۸۶۹)	۰/۹۳۳ (۰/۸۲۴)	۰/۹۴۱ (۰/۸۷۵)	۰/۹۱۵ (۰/۷۷۳)	۰/۹۵۷ (۰/۸۸۵)
	(۲۵,۵۰)	۰/۹۳۴ (۰/۷۱۷)	۰/۹۳۷ (۰/۷۳۰)	۰/۹۱۹ (۰/۶۷۷)	۰/۹۴۳ (۰/۷۴۳)	۰/۹۳۰ (۰/۶۸۹)	۰/۹۳۷ (۰/۷۳۶)	۰/۹۲۹ (۰/۶۸۲)	۰/۹۵۴ (۰/۷۴۵)
	(۵۰,۵۰)	۰/۹۴۰ (۰/۵۸۱)	۰/۹۴۱ (۰/۵۷۴)	۰/۹۳۰ (۰/۵۳۴)	۰/۹۵۰ (۰/۵۷۰)	۰/۹۳۴ (۰/۵۸۵)	۰/۹۴۱ (۰/۶۰۲)	۰/۹۳۲ (۰/۵۶۶)	۰/۹۵۴ (۰/۶۰۵)
	(۷۵,۷۵)	۰/۹۳۱ (۰/۴۶۰)	۰/۹۴۳ (۰/۴۵۶)	۰/۹۳۶ (۰/۴۳۴)	۰/۹۴۹ (۰/۴۵۲)	۰/۹۳۴ (۰/۴۷۷)	۰/۹۴۴ (۰/۴۸۷)	۰/۹۳۸ (۰/۴۶۸)	۰/۹۵۳ (۰/۴۸۸)
	(۱۰,۱۵)	۰/۹۶۲ (۱/۱۳۹)	۰/۹۵۴ (۱/۱۰۳)	۰/۹۱۵ (۰/۹۷۱)	۰/۹۶۷ (۱/۱۶۰)	۰/۹۶۴ (۱/۰۱۹)	۰/۹۵۵ (۱/۱۳۷)	۰/۹۰۵ (۰/۹۵۴)	۰/۹۷۰ (۱/۱۶۹)
	(۱۵,۲۵)	۰/۹۵۹ (۰/۸۲۹)	۰/۹۵۶ (۰/۸۲۶)	۰/۹۲۷ (۰/۷۸۲)	۰/۹۵۹ (۰/۸۸۲)	۰/۹۶۳ (۰/۸۱۴)	۰/۹۵۶ (۰/۸۶۸)	۰/۹۲۲ (۰/۷۹۳)	۰/۹۵۹ (۰/۸۸۴)
۱۲	(۲۵,۲۵)	۰/۹۵۸ (۰/۷۰۹)	۰/۹۵۴ (۰/۶۹۷)	۰/۹۳۴ (۰/۶۶۵)	۰/۹۵۷ (۰/۷۱۷)	۰/۹۵۶ (۰/۷۳۳)	۰/۹۵۴ (۰/۷۷۷)	۰/۹۲۸ (۰/۷۲۵)	۰/۹۵۶ (۰/۷۸۹)
	(۲۵,۵۰)	۰/۹۵۲ (۰/۵۹۰)	۰/۹۵۴ (۰/۵۹۸)	۰/۹۳۶ (۰/۵۹۰)	۰/۹۵۱ (۰/۶۲۳)	۰/۹۶۱ (۰/۶۱۳)	۰/۹۵۴ (۰/۶۳۰)	۰/۹۳۶ (۰/۶۰۸)	۰/۹۵۱ (۰/۶۳۷)
	(۵۰,۵۰)	۰/۹۵۵ (۰/۴۸۱)	۰/۹۵۳ (۰/۴۷۷)	۰/۹۴۱ (۰/۴۶۸)	۰/۹۵۱ (۰/۴۸۴)	۰/۹۵۵ (۰/۵۲۹)	۰/۹۵۴ (۰/۵۴۵)	۰/۹۳۸ (۰/۵۳۰)	۰/۹۵۱ (۰/۵۴۹)
	(۷۵,۷۵)	۰/۹۵۱ (۰/۳۸۹)	۰/۹۵۰ (۰/۳۸۷)	۰/۹۴۴ (۰/۳۸۲)	۰/۹۵۰ (۰/۳۹۱)	۰/۹۵۲ (۰/۴۳۷)	۰/۹۵۱ (۰/۴۴۵)	۰/۹۴۱ (۰/۴۳۷)	۰/۹۵۰ (۰/۴۴۸)

ادامه جدول ۲

طرح	حجم نمونه	نسبت GCI	نسبت PBCI	نسبت ACI	نسبت MACI	تفاضل GCI	تفاضل PBCI	تفاضل ACI	تفاضل MACI
	(۱۰,۱۵)	۰/۹۶۹ (۲/۵۳۱)	۰/۹۳۹ (۲/۰۶۷)	۰/۹۲۹ (۱/۹۰۳)	۰/۹۵۴ (۲/۱۶۷)	۰/۹۶۵ (۰/۸۲۵)	۰/۹۳۸ (۰/۷۸۶)	۰/۹۴۱ (۰/۷۰۹)	۰/۹۶۷ (۰/۷۹۵)
	(۱۵,۲۵)	۰/۹۶۸ (۱/۷۴۹)	۰/۹۴۳ (۱/۵۱۲)	۰/۹۳۸ (۱/۴۴۶)	۰/۹۵۴ (۱/۵۵۸)	۰/۹۶۳ (۰/۶۳۴)	۰/۹۴۲ (۰/۶۰۲)	۰/۹۴۶ (۰/۵۶۴)	۰/۹۶۲ (۰/۶۰۴)
۱۳	(۲۵,۲۵)	۰/۹۵۴ (۱/۴۳۹)	۰/۹۴۲ (۱/۳۶۲)	۰/۹۳۷ (۱/۳۰۷)	۰/۹۵۳ (۱/۳۹۴)	۰/۹۵۴ (۰/۵۳۶)	۰/۹۴۳ (۰/۵۲۹)	۰/۹۴۴ (۰/۵۰۲)	۰/۹۶۰ (۰/۵۳۲)
	(۲۵,۵۰)	۰/۹۷۰ (۱/۱۹۹)	۰/۹۴۶ (۱/۰۵۳)	۰/۹۴۳ (۱/۰۳۱)	۰/۹۵۲ (۱/۰۷۱)	۰/۹۶۴ (۰/۴۶۰)	۰/۹۴۶ (۰/۴۳۳)	۰/۹۴۷ (۰/۴۱۸)	۰/۹۵۷ (۰/۴۳۴)
	(۵۰,۵۰)	۰/۹۵۲ (۰/۹۴۱)	۰/۹۴۷ (۰/۹۱۸)	۰/۹۴۴ (۰/۹۰۱)	۰/۹۵۲ (۰/۹۲۹)	۰/۹۵۲ (۰/۳۶۷)	۰/۹۴۷ (۰/۳۶۴)	۰/۹۴۸ (۰/۳۵۴)	۰/۹۵۶ (۰/۳۶۵)
	(۷۵,۷۵)	۰/۹۵۰ (۰/۷۵۰)	۰/۹۴۷ (۰/۷۳۸)	۰/۹۴۵ (۰/۷۲۹)	۰/۹۵۲ (۰/۷۴۴)	۰/۹۵۰ (۰/۲۹۶)	۰/۹۴۷ (۰/۲۹۴)	۰/۹۴۹ (۰/۲۸۹)	۰/۹۵۴ (۰/۲۹۵)
	(۱۰,۱۵)	۰/۹۵۰ (۲/۱۱۱)	۰/۹۵۲ (۱/۹۸۹)	۰/۹۲۶ (۱/۸۳۹)	۰/۹۵۹ (۲/۱۵۹)	۰/۹۵۱ (۰/۸۷۰)	۰/۹۶۰ (۰/۹۰۰)	۰/۹۲۸ (۰/۸۰۲)	۰/۹۶۶ (۰/۹۲۵)
	(۱۵,۲۵)	۰/۹۵۷ (۱/۷۰۱)	۰/۹۴۷ (۱/۵۰۸)	۰/۹۳۶ (۱/۳۸۰)	۰/۹۵۴ (۱/۵۱۲)	۰/۹۵۷ (۰/۶۷۲)	۰/۹۴۷ (۰/۶۹۷)	۰/۹۳۸ (۰/۶۵۰)	۰/۹۵۸ (۰/۷۰۶)
۱۴	(۲۵,۲۵)	۰/۹۵۶ (۱/۳۹۲)	۰/۹۴۹ (۱/۳۱۰)	۰/۹۳۶ (۱/۲۰۳)	۰/۹۵۳ (۱/۲۸۰)	۰/۹۵۶ (۰/۵۸۸)	۰/۹۴۹ (۰/۶۰۰)	۰/۹۳۶ (۰/۵۷۳)	۰/۹۵۵ (۰/۶۰۶)
	(۲۵,۵۰)	۰/۹۶۰ (۱/۱۱۵)	۰/۹۵۱ (۱/۰۳۰)	۰/۹۴۰ (۰/۹۸۵)	۰/۹۵۲ (۱/۰۳۴)	۰/۹۶۲ (۰/۴۹۸)	۰/۹۵۴ (۰/۵۰۱)	۰/۹۴۲ (۰/۴۸۹)	۰/۹۵۴ (۰/۵۱۲)
	(۵۰,۵۰)	۰/۹۵۳ (۰/۸۷۶)	۰/۹۴۹ (۰/۸۵۲)	۰/۹۴۳ (۰/۸۲۱)	۰/۹۵۰ (۰/۸۴۵)	۰/۹۵۳ (۰/۴۱۶)	۰/۹۵۰ (۰/۴۲۰)	۰/۹۴۳ (۰/۴۱۱)	۰/۹۵۰ (۰/۴۲۲)
	(۷۵,۷۵)	۰/۹۵۱ (۰/۶۹۱)	۰/۹۵۰ (۰/۶۸۰)	۰/۹۴۴ (۰/۶۶۳)	۰/۹۵۰ (۰/۶۷۷)	۰/۹۵۱ (۰/۳۴۰)	۰/۹۴۹ (۰/۳۴۲)	۰/۹۴۴ (۰/۳۳۷)	۰/۹۵۱ (۰/۳۴۳)
	(۱۰,۱۵)	۰/۹۵۳ (۰/۵۷۹)	۰/۹۵۵ (۰/۵۸۰)	۰/۹۱۱ (۰/۴۶۸)	۰/۹۵۵ (۰/۵۸۲)	۰/۹۵۷ (۱/۵۶۷)	۰/۹۶۳ (۱/۴۵۶)	۰/۹۰۸ (۱/۳۷۸)	۰/۹۶۶ (۱/۶۸۳)
	(۱۵,۲۵)	۰/۹۴۵ (۰/۳۹۲)	۰/۹۴۰ (۰/۳۹۴)	۰/۹۲۶ (۰/۳۷۳)	۰/۹۵۳ (۰/۴۲۵)	۰/۹۶۵ (۱/۲۲۸)	۰/۹۴۵ (۱/۲۳۳)	۰/۹۲۶ (۱/۱۱۱)	۰/۹۶۰ (۱/۲۵۳)
۱۵	(۲۵,۲۵)	۰/۹۵۲ (۰/۳۳۴)	۰/۹۴۳ (۰/۳۲۱)	۰/۹۳۱ (۰/۳۰۶)	۰/۹۵۴ (۰/۳۳۶)	۰/۹۵۴ (۱/۱۲۴)	۰/۹۴۵ (۱/۱۶۹)	۰/۹۲۴ (۱/۰۶۳)	۰/۹۵۸ (۱/۱۹۱)
	(۲۵,۵۰)	۰/۹۵۵ (۰/۲۹۷)	۰/۹۵۱ (۰/۲۷۵)	۰/۹۳۷ (۰/۲۷۹)	۰/۹۵۳ (۰/۳۰۰)	۰/۹۵۲ (۰/۸۱۲)	۰/۹۵۰ (۰/۸۳۵)	۰/۹۳۹ (۰/۸۱۹)	۰/۹۵۷ (۰/۸۷۲)
	(۵۰,۵۰)	۰/۹۵۱ (۰/۲۲۴)	۰/۹۴۷ (۰/۲۲۰)	۰/۹۴۱ (۰/۲۱۵)	۰/۹۵۳ (۰/۲۲۵)	۰/۹۵۳ (۰/۷۹۳)	۰/۹۴۸ (۰/۸۰۸)	۰/۹۳۸ (۰/۷۷۰)	۰/۹۵۵ (۰/۸۱۵)
	(۷۵,۷۵)	۰/۹۵۲ (۰/۱۸۰)	۰/۹۴۹ (۰/۱۷۷)	۰/۹۴۴ (۰/۱۷۵)	۰/۹۵۲ (۰/۱۸۰)	۰/۹۵۳ (۰/۶۴۷)	۰/۹۴۹ (۰/۶۵۴)	۰/۹۴۱ (۰/۶۳۴)	۰/۹۵۴ (۰/۶۵۸)
	(۱۰,۱۵)	۰/۹۴۱ (۱/۳۳۹)	۰/۹۴۵ (۱/۳۴۱)	۰/۹۰۱ (۰/۹۸۷)	۰/۹۵۱ (۱/۳۴۰)	۰/۹۲۴ (۱/۲۵۴)	۰/۹۵۲ (۱/۳۳۱)	۰/۹۱۴ (۰/۹۶۰)	۰/۹۶۴ (۱/۳۴۲)
	(۱۵,۲۵)	۰/۹۳۳ (۰/۴۵۲)	۰/۹۳۵ (۰/۴۶۱)	۰/۹۱۳ (۰/۴۳۳)	۰/۹۶۲ (۰/۵۶۴)	۰/۹۱۷ (۰/۹۲۳)	۰/۹۴۷ (۰/۹۸۳)	۰/۹۰۴ (۰/۸۴۱)	۰/۹۵۳ (۰/۹۹۸)
۱۶	(۲۵,۲۵)	۰/۹۴۳ (۰/۳۸۹)	۰/۹۴۲ (۰/۳۷۵)	۰/۹۲۴ (۰/۳۴۷)	۰/۹۴۹ (۰/۳۸۶)	۰/۹۲۳ (۰/۸۶۴)	۰/۹۵۲ (۰/۹۲۰)	۰/۹۰۰ (۰/۷۸۶)	۰/۹۵۸ (۰/۹۳۴)
	(۲۵,۵۰)	۰/۹۲۴ (۰/۳۱۷)	۰/۹۳۸ (۰/۳۳۵)	۰/۹۲۷ (۰/۳۲۴)	۰/۹۴۴ (۰/۳۵۰)	۰/۹۱۸ (۰/۶۶۷)	۰/۹۴۳ (۰/۶۹۲)	۰/۹۲۸ (۰/۶۳۸)	۰/۹۵۵ (۰/۶۹۷)
	(۵۰,۵۰)	۰/۹۴۴ (۰/۲۵۶)	۰/۹۴۱ (۰/۲۵۳)	۰/۹۳۶ (۰/۲۴۱)	۰/۹۴۹ (۰/۲۵۴)	۰/۹۲۵ (۰/۶۰۹)	۰/۹۵۱ (۰/۶۲۷)	۰/۹۲۲ (۰/۵۸۰)	۰/۹۵۴ (۰/۶۳۴)
	(۷۵,۷۵)	۰/۹۴۵ (۰/۲۰۴)	۰/۹۴۳ (۰/۲۰۱)	۰/۹۳۹ (۰/۱۹۵)	۰/۹۴۹ (۰/۲۰۲)	۰/۹۲۹ (۰/۴۹۷)	۰/۹۴۵ (۰/۵۰۸)	۰/۹۳۱ (۰/۴۸۲)	۰/۹۵۲ (۰/۵۱۰)

تفاضل دارد. با این وجود در برخی موارد مانند طرح‌های ۳، ۴، ۱۱ و ۱۶ برآورد احتمال پوشش بازه اطمینان تعمیم‌یافته برای نسبت و تفاضل دو شاخص C_{pmk} به صورت معنی‌داری کمتر از احتمال پوشش اسمی است. اگر چه بازه اطمینان خودگردانی پارامتری برای تفاضل دو شاخص C_{pmk} در این حالات عملکرد بهتر یا قابل رقابت نسبت به بازه اطمینان تعمیم‌یافته دارد، اما در برخی موارد مانند طرح ۴ نیز برآورد احتمال پوشش بازه اطمینان خودگردانی پارامتری کمتر از ۰/۹۵ است. ذکر این نکته الزامی است که طرح‌های ۳، ۴، ۱۱ و ۱۶ مربوط به حالتی است که فرآیند نامتمرکز است. همچنین بازه اطمینان خودگردانی پارامتری برای نسبت دو شاخص C_{pmk}، عملکردی همانند بازه اطمینان تعمیم‌یافته دارد. در مجموع به نظر می‌آید که بازه اطمینان خودگردانی پارامتری در برخی موارد عملکرد بهتر و در برخی موارد عملکرد مشابه و یا قابل رقابت با بازه اطمینان تعمیم‌یافته دارد و نتایج حاصل از این دو روش در حالتی که فرآیند نامتمرکز است، از اعتبار بیشتری برخوردار است.

۳) بازه اطمینان مجانبی اصلاح شده در تمامی طرح‌ها و برای تمام اندازه نمونه‌های در نظر گرفته شده و در هر دو حالت $T = \mu$ و $T \neq \mu$ دارای حداقل احتمال پوشش ۰/۹۵ است بنابراین در این روش میانگین طول بازه اطمینان کمی بیشتر از دیگر روش‌ها است. البته در برخی موارد نیز بازه اطمینان مجانبی اصلاح شده با حفظ حداقل احتمال پوشش ۰/۹۵ طول کمتری نسبت به برخی روش‌ها دارد. مانند طرح ۴ و ۵ در نسبت دو شاخص C_{pmk}. با این حال زمانی که بازه‌های اطمینان مجانبی اصلاح شده، خودگردانی پارامتری و تعمیم‌یافته برآورد احتمال پوشش یکسانی دارند، تفاوت طول بازه اطمینان مجانبی اصلاح شده با سایر روش‌ها ناچیز می‌باشد. تنها در یک مورد، طرح ۱۱، احتمال پوشش بازه اطمینان مجانبی اصلاح شده برای نسبت دو شاخص C_{pmk} ۰/۹۴ است که در این طرح نیز بازه اطمینان مجانبی اصلاح شده دارای احتمال پوشش بزرگتر نسبت به دیگر روش‌ها است.

۴) با توجه به اینکه در بازه اطمینان مجانبی اصلاح شده نیازی به برآورد چندک‌ها از طریق روش مونت کارلو نمی‌باشد، استفاده از این روش در مقایسه با دو

روش خودگردانی پارامتری و تعمیم‌یافته راحت‌تر است.

۵) با افزایش اندازه نمونه، تمامی روش‌ها عملکرد مشابهی از دیدگاه متوسط طول بازه دارند.

۴ مثال کاربردی

مثال ۱ : کانیچوکاتو و لوک (۲۰۱۳) از مجموعه داده‌های ارائه شده توسط چن و تنگ (۲۰۰۳) استفاده کردند. این داده‌ها در ارتباط با دو فرآیند تولید مواد تشکیل دهنده فلز آلومینیوم از یک کارخانه الکترونیکی در تایوان است. فلز آلومینیوم بخش مهمی از کیفیت خازن‌ها و ولتاژ آن‌ها را تعیین می‌کند. حدود مشخصات فنی پایین و بالا برای ولتاژ به صورت $LSL = ۵۱۰$ و $USL = ۵۳۰$ در نظر گرفته شده و مقدار هدف $T = ۵۲۰$ است. یک نمونه تصادفی ۵۰ تایی از هر کدام از دو فرآیند تولید که تقریباً دارای توزیع نرمال می‌باشد گرفته شده است و $(\bar{x}, s)$ برای اولین و دومین فرآیند به ترتیب برابر با $(۵۱۹/۷۸۲, ۱/۷۹۴)$ و $(۵۲۲/۱۶۸, ۳/۰۰۹)$ است. همچنین $\hat{C}_{pmk۱} = ۱/۸۲۲$ و $\hat{C}_{pmk۲} = ۰/۷۰۹$ محاسبه شده است.

بازه اطمینان ۹۵ درصدی برای نسبت و تفاضل دو شاخص C_{pmk} در جدول ۳ ارائه شده است. بر اساس نتایج به دست آمده از روش‌های مجانبی اصلاح شده، خودگردانی پارامتری و تعمیم‌یافته فرآیند تولید ۱ از قابلیت بیشتری نسبت به فرآیند تولید ۲ برخوردار است. اما در روش مجانبی بر اساس بازه اطمینان برای $C_{pmk۱}/C_{pmk۲}$، دو فرآیند تولید عملکردی مانند هم دارند و بر اساس بازه اطمینان برای $C_{pmk۱} - C_{pmk۲}$ فرآیند تولید ۱ قابلیت بیشتری نسبت به فرآیند تولید ۲ دارد. همچنین همان‌طور که انتظار می‌رفت طول بازه اطمینان مجانبی اصلاح شده کمی بیشتر از سایر روش‌ها است.

مثال ۲ : داده‌های[۱] این مثال از موسسه ملی استاندارد و تکنولوژی آمریکا[۲] در رابطه با دو فرآیند که بسته‌بندی محصولات را بر عهده دارد، گرفته شده است. زمان بسته‌بندی در دو فرآیند با اندازه نمونه‌های $n_۱ = ۱۱$ و $n_۲ = ۸$ بر اساس دقیقه

۱ http://www.itl.nist.gov/div898/handbook/prc/section3/prc31.htm

۲ National Institute of Standards and Technology, U.S. Department of Commerce, NIST

جدول ۳: بازه ۰/۹۵ برای نسبت و تفاضل دو شاخص C_{pmk} برای دو فرآیند تولید در مثال ۱

		روش			
		MACI	PBCI	GCI	ACI
نسبت	بازه	(۱/۸۱۳ , ۳/۶۴۸)	(۱/۸۲۲ , ۳/۶۰۶)	(۱/۸۰۳ , ۳/۶۲۴)	(۰/۲۶۳ , ۱/۶۱۶)
	طول	۱/۸۳۵	۱/۷۸۳	۱/۸۲۱	۱/۳۵۳
تفاضل	بازه	(۰/۶۸۰ ,۱/۵۴۷)	(۰/۷۰۵ ,۱/۵۷۰)	(۰/۶۶۰ , ۱/۵۱۴)	(۰/۱۳۲ , ۲/۰۹۰)
	طول	۰/۸۶۶	۰/۸۶۵	۰/۸۵۴	۱/۹۵۸

محاسبه و $\bar{x}_1 = ۳۶/۰۹۰۹$، $\bar{x}_2 = ۳۲/۲۲۲۲$، $s_1 = ۴/۹۰۸۲$ و $s_2 = ۲/۵۳۸۶$ حاصل شده است. همچنین $LSL = ۲۳$، $USL = ۴۵$ و $T = ۳۴$ در نظر گرفته شده است. همان‌طور که در جدول ۴ ملاحظه می‌شود دو فرآیند قابلیت و کارایی یکسانی دارند. همچنین کمترین طول در نسبت و تفاضل به ترتیب مربوط به روش‌های خودگردانی پارامتری و تعمیم‌یافته هستند.

جدول ۴: بازه اطمینان ۰/۹۵ برای نسبت و تفاضل دو شاخص C_{pmk} برای دو فرآیند در مثال ۲

		روش			
		MACI	PBCI	GCI	ACI
نسبت	بازه	(۰/۲۱۴ , ۱/۴۷۶)	(۰/۲۱۸ , ۱/۲۱۱)	(۰/۲۰۱ , ۱/۲۹۲)	(۰/۱۸۷ , ۱/۶۹۳)
	طول	۱/۲۶۲	۰/۹۹۳	۱/۰۹۱	۱/۵۰۶
تفاضل	بازه	(۱/۲۵۹- , ۰/۳۵۵)	(۱/۲۷۹- , ۰/۱۴۰)	(۱/۱۲۹- , ۰/۱۶۴)	(۱/۲۵۸- , ۰/۳۵۵)
	طول	۱/۶۱۴	۱/۴۱۹	۱/۲۹۳	۱/۶۱۳

بحث و نتیجه‌گیری

در نهایت، روش مجانبی اصلاح شده برای تشکیل بازه اطمینان برای نسبت و تفاضل دو شاخص C_{pmk} توصیه می‌شود. زیرا با توجه به شبیه‌سازی‌های انجام شده، این روش دارای حداقل احتمال پوشش ۰/۹۵ است (کمترین احتمال پوشش در این روش ۰/۹۴ و آن هم فقط در یک مورد است.) و متوسط طول در این روش تفاوت ناچیزی با بازه‌های اطمینان تعمیم‌یافته و خودگردانی پارامتری دارد. همچنین تشکیل بازه اطمینان با استفاده از این روش، بسیار ساده‌تر از روش تعمیم‌یافته و خودگردانی پارامتری است و علاوه بر این روش مجانبی اصلاح شده عملکرد

مناسبی در هر دو حالت $\mu = T$ و $\mu \neq T$ دارد. به نظر می‌آید دلیل این امر، استفاده از واریانس دقیق $\hat{C}_{pmk}$ در بازه اطمینان مجانبی اصلاح شده باشد.

تقدیر و تشکر

نویسندگان کمال تشکر و قدردانی را از داوران محترم مقاله که با پیشنهادات ارزنده خود باعث بهبود مقاله شدند، دارند.

مراجع

Chan, L. K., Xiong, Z. and Zhang, D. (1990), On The Asymptotic Distributions of Some Process Capability Indices, *Communications in Statistics-Theory and Methods*, **19**, 11-18.

Chen, S. M. and Hsu, N. F. (1995), The Asymptotic Distribution of The Process Capability Index C_{pmk}, *Communication in Statistics-Theory and Methods*, **24**, 1279-1291.

Chen, J. P. and Tong, L. I. (2003), Bootstrap Confidence Interval of The Difference Between Two Process Capability Indices, *International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, **21**, 249-256.

Efron, B. (1981), Nonparametric Standard Errors and Confidence Intervals, *Canadian Journal of Statistics*, **9**, 139-172.

Efron, B. and Tibshirani, R. J. (1986), Bootstrap Methods for Standard Errors, Confidence Interval and Other Measures of Statistical Accuracy, *Statistical Science*, **1**, 54-77.

Ferguson, T. S. (1996), *A Course in Large Sample Theory*, Chapman and Hall, London.

Kanichukattu, J. K. and Luke, J. A. (2013), Comparison Between Two Process Capability Indices Using Generalized Confidence Intervals, *International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, **69**, 2793-2798.

Pearn, W. L. and Kotz, S. (2006), *Encyclopedia and Handbook of Process Capability Indices, A Comprehensive Expansion of Quality Control Measures, Series on Quality, Reliability and Engineering Statistics* Vol. 12, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd.

Pearn, W. L., Kotz, S. and Johnson, N. L. (1992), Distributional and Inferential Properties of Process Capability Indices, *Journal of Quality Technology*, **24**, 216-231.

Vännman, k. (1995), A Unified Approach to Capability Indices, *Statistica Sinica*, **5**, 805-820.

Vännman, k. (1997a), Distribution and Moments in Simplified Form for A General Calss of Capability Indices, *Communication in Statistics-Theory and Methods*, **26**, 159-179.

Vännman, k. (1997b), A General Class of Capability Indices in The Case of Asymmetric Tolerances, *Communication in Statistics-Theory and Methods*, **26**, 2049-2072.

Wright, P. A. (1998), The Probability Density Function of Process Capability Index C_{pmk}, *Communication in Statistics-Theory and Methods*, **27**, 1781-1789.

Wu, C. W. and Huang, P. H. (2010), Generalized Confidence Intervals for Comparing The Capability of Two Process, *Communication in Statistics-Theory and Methods*, **39**, 2351-2364.