مجله علوم آماری، پاییز و زمستان ۱۳۹۴
جلد ۹، شماره ۲، ص ۲۵۱-۲۴۱

توزیع ماکسیمم متغیرهای تصادفی نرمال استاندارد تاخورده دو متغیره، خواص و کاربرد آن

حمید لرستانی، عبدالرضا سیاره
گروه آمار، دانشگاه رازی

تاریخ دریافت: ۱۳۹۳/۳/۱۳ تاریخ آخرین بازنگری: ۱۳۹۳/۱۲/۲۷

چکیده : برای مدل‌بندی بسیاری از پدیده‌های طبیعی از توزیع‌های نرمال یک یا چند متغیره و مشتقات آن استفاده می‌شود. متغیرهای نرمال تاخورده به صورت قدر مطلق متغیرهای تصادفی نرمال تعریف می‌شوند. توزیع نرمال تاخورده یک متغیره، دو متغیره، خواص و کاربرد آن‌ها توسط پژوهشگران مورد بررسی قرار گرفته است. اخیراً توزیع نرمال تاخورده چند متغیره و توزیع ماکسیمم متغیرهای تصادفی وابسته که دارای توزیع بیضوی تراز هستند نیز مورد مطالعه قرار گرفته است. در این مقاله توزیع ماکسیمم دو متغیر تصادفی دارای توزیع نرمال تاخورده دو متغیره که توزیع توأم آن‌ها متعلق به خانواده بیضوی تراز نیست را به‌دست آورده و میانگین، واریانس و تابع مولد گشتاور آن مورد بررسی قرار گرفته است.

واژه‌های کلیدی : توزیع بیضوی تراز، توزیع نرمال تاخورده، توزیع ماکسیمم نرمال استاندارد تاخورده.

آدرس الکترونیک مسئول مقاله: عبدالرضا سیاره ، asayyareh@razi.ac.ir
کد موضوع‌بندی ریاضی (۲۰۱۰): ۶۲E۱۵

۱ مقدمه

خانواده توزیع های بیضوی تراز یک خانواده از توزیع های متقارن مانند توزیع نرمال، توزیع t، توزیع لاپلاس، توزیع کوشی و توزیع لوژستیک است.

تعریف ۱ : بردار تصادفی $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)^T$ با میانگین $\boldsymbol{\mu}$ و ماتریس کوواریانس $\boldsymbol{\Sigma}$ و مولد چگالی $h^{(n)}(\cdot)$، دارای توزیع بیضوی تراز است هرگاه تابع چگالی آن به‌صورت

$$f_n(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}, h^{(n)}) = |\boldsymbol{\Sigma}|^{-\frac{1}{2}} h^{(n)}[(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\mu})^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\mu})], \quad \boldsymbol{x} \in R^n$$

باشد. توزیع ماکسیمم متغیرهای تصادفی که دارای توزیع بیضوی تراز [1] هستند توسط آریلانو و جنتون (۲۰۰۸) به‌دست آمده است. دراین مقاله توزیع ماکسیمم دو متغیر تصادفی از توزیع نرمال استاندارد تاخورده [2] دو متغیره که توزیع توأم آن‌ها عضو خانواده توزیع بیضوی تراز نیست، به‌دست می‌آید. فرض کنید X دارای توزیع نرمال با میانگین μ و واریانس σ^2 باشد. متغیر $Y = |X|$ دارای توزیع نرمال تاخورده با تابع چگالی

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}[\exp(-\frac{1}{2\sigma^2}(y-\mu)^2) + \exp(-\frac{1}{2\sigma^2}(y+\mu)^2)], \quad y > 0$$

و میانگین و واریانس

$$\begin{aligned} \mu_f &= \sigma\sqrt{\frac{2}{\pi}}\exp(-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}) + \mu[1 - 2\Phi(-\frac{\mu^2}{2\sigma^2})] \\ \sigma_f^2 &= \mu^2 + \sigma^2 - \{\sigma\sqrt{\frac{2}{\pi}}\exp(-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}) + \mu[1 - 2\Phi(-\frac{\mu^2}{2\sigma^2})]\}^2 \end{aligned}$$

است، که در آن $\Phi(\cdot)$ تابع توزیع نرمال استاندارد است.

این توزیع در مسایل کاربردی نیز مورد استفاده قرار می‌گیرد. به‌عنوان مثال مهدیان و علامت ساز (۱۳۸۴) از توزیع نرمال تاخورده برای بهبود سطح سرویس مطلوب استفاده کرده و نشان دادند داده‌های تغییرات ۲۴ ساعته ماکسیمم بار از

---

[1] Elliptically contoured

[2] Folded normal distribution

سیستم انتقال نیرو استان اصفهان در سال‌های ۱۳۸۱ و ۱۳۸۲ از توزیع نرمال تاخورده پیروی می‌کنند. همچنین جمشیدی چناری و علوی دودران (۱۳۹۰) از این توزیع در مطالعات ژئوتکنیک در نهشته‌های طبیعی استفاده کرده و نشان دادند که داده‌های تغییرات مقاومت نوک مخروط بر حسب کیلو پاسکال در راستای افقی دارای توزیع نرمال تاخورده هستند.

لئون و همکاران (۱۹۶۱)، ساراکیس و پانارتوس (۲۰۰۱) و چاکرابورتی و چاترجی (۲۰۱۳)، توزیع نرمال تاخورده یک و چند متغیره، خواص و کاربرد آن‌ها را مورد بررسی قرار داده‌اند. برآورد پارامترها و آزمون فرضیه در مورد پارامترهای توزیع نرمال تاخورده توسط الاند (۱۹۶۱) و ساندبیرگ (۱۹۷۴) و همچنین آنتروپی، بررسی معیار کولبک-لیبلر، تابع مشخصه و تابع مولد گشتاور برای این توزیع توسط ساگریس و همکاران (۲۰۱۴) انجام شده است. تابع چگالی احتمال نرمال استاندارد تاخورده یک متغیره به‌صورت

$$\begin{aligned} f_{|Z|}(t) &= \phi(t)+\phi(-t) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}e^{-\frac{1}{2}t^2}, \quad t \geq 0 \end{aligned}$$

است (لئون و همکاران،۱۹۶۱)، که در آن $\phi(\cdot)$ تابع چگالی نرمال استاندارد است. براساس نتایج ساراکیس و پانارتوس (۲۰۰۱)، تابع چگالی احتمال نرمال استاندارد تاخورده دو متغیره به‌صورت

$$\begin{aligned} f_{T_1,T_2}(t_1,t_2) &= \sum_{\substack{u=t_1,-t_1 \\ v=t_2,-t_2}} f_{Z_1,Z_2}(u,v) \\ &= \frac{1}{\pi\sqrt{1-\rho^2}}\{e^{-\frac{t_1^2+t_2^2-2\rho t_1 t_2}{2(1-\rho^2)}}+e^{-\frac{t_1^2+t_2^2+2\rho t_1 t_2}{2(1-\rho^2)}}\}, \; t_1,t_2>0 \quad (1) \end{aligned}$$

تعریف می‌شود، که در آن $T_i=|Z_i|$، $-1<\rho<1$ و $f_{Z_1,Z_2}(\cdot,\cdot)$ تابع چگالی نرمال استاندارد دو متغیره است. براساس نتایج چاکرابورتی و چاترجی (۲۰۱۳)، توزیع نرمال تاخورده چند متغیره از رابطه

$$f_{T_1,\ldots,T_k}(t_1,\ldots,t_k)=\sum_{(s_1,\ldots,s_k)\in S(k)} f_{Z_1,\ldots,Z_k}(s_1t_1,\ldots,s_kt_k)$$

به‌دست می‌آید که در آن

$$S(k) = \{s : s = (s_1, \ldots, s_k), s_i = \pm 1, 1 \leq i \leq k\}$$

$T_i = |Z_i|$ و $f_{Z_1,\ldots Z_k}(z_1, \ldots, z_k)$ تابع چگالی نرمال استاندارد چند متغیره است. برای مطالعه بیشتر در رابطه با این توزیع می‌توان به جانسون (۱۹۶۲، ۱۹۶۳)، لین (۲۰۰۴)، کیم (۲۰۰۶) و لیاو (۲۰۱۰) مراجعه نمود. توزیع ماکسیمم دو متغیر تصادفی دارای توزیع نرمال تاخورده دو متغیره توسط هیچکدام از پژوهشگران به‌دست نیامده است. در این مقاله علاوه بر توزیع ماکسیمم، گشتاورهای مراتب اول و دوم و تابع مولد گشتاور این توزیع به‌دست آورده می‌شوند.

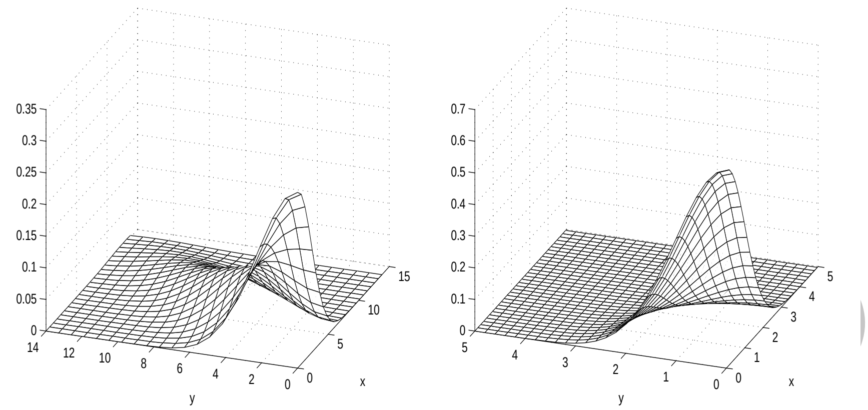
در بخش ۲ توزیع ماکسیمم دو متغیر تصادفی از توزیع نرمال استاندارد تاخورده دو متغیره با تابع چگالی توأم (۱) و گشتاورهای مراتب اول و دوم و تابع مولد گشتاور این توزیع به‌دست آورده می‌شوند. در بخش ۳ کاربرد این توزیع در تحلیل سیستم‌های موازی و آزمون فرضیه پارامترها ارائه می‌شود.

۲ توزیع ماکسیمم نرمال استاندارد تاخورده دو متغیره

فرض کنید بردار $T = (T_1, T_2)$ دارای توزیع نرمال استاندارد تاخورده دو متغیره با تابع چگالی (۱) و $Y = \max(T_1, T_2)$ باشد. همان‌طور که در شکل ۱ ملاحظه می‌شود توزیع نرمال استاندارد تاخورده دو متغیره متقارن نیست. لذا تابع چگالی Y براساس روش ارائه شده توسط آریلانو و جنتون (۲۰۰۸) قابل حصول نیست. با توجه به این که برای هر استنباطی در مورد جامعه باید تابع چگالی متغیر تحت مطالعه معین و یا برآورد شود، لذا در قضیه۱ تابع چگالی Y به‌دست آورده می‌شود.

قضیه ۱ : فرض کنید بردار $T = (T_1, T_2)$ دارای توزیع نرمال استاندارد تاخورده دو متغیره با تابع چگالی (۱) باشد در این صورت $Y = \max(T_1, T_2)$ دارای تابع چگالی به‌صورت زیر است.

$$f_Y(y) = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} [\Phi(\frac{y(1-\rho)}{\sqrt{1-\rho^2}}) + \Phi(\frac{y(1+\rho)}{\sqrt{1-\rho^2}}) - 1] \quad y \geq 0 \qquad (۲)$$



(ب) (الف)

شکل ۱: منحنی چگالی نرمال استاندارد تاخورده دو متغیره به‌ازای الف: $\rho = 0/2$ و ب: $\rho = 0/9$

برهان : تابع توزیع متغیر تصادفی Y عبارت است از

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(T_1 \leq y, T_2 \leq y) \\ &= \frac{1}{\pi\sqrt{1-\rho^2}} \int_0^y e^{-\frac{t_2^2}{2}} \int_0^y \left(e^{-\frac{(t_1-t_2\rho)^2}{2(1-\rho^2)}} + e^{-\frac{(t_1+t_2\rho)^2}{2(1-\rho^2)}}\right) dt_1 dt_2 \end{aligned}$$

که با تغییر متغیرهای $z = \frac{t_1-t_2\rho}{\sqrt{2(1-\rho^2)}}$ و $z = \frac{t_1+t_2\rho}{\sqrt{2(1-\rho^2)}}$ به‌صورت

$$F_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^y e^{-\frac{t_2^2}{2}} \left[erf\left(\frac{y+t_2\rho}{\sqrt{2(1-\rho^2)}}\right) + erf\left(\frac{y-t_2\rho}{\sqrt{2(1-\rho^2)}}\right)\right] dt_2 \qquad (3)$$

حاصل می‌شود، که در آن

$$erf(a) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^a e^{-t^2} dt, \quad a > 0$$

با مشتق گیری از (۳) تابع چگالی متغیر تصادفی Y به‌صورت

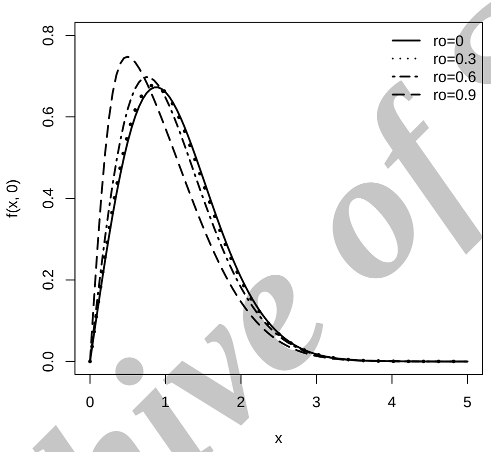
$$\begin{aligned} \frac{dF_Y(y)}{dy} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} \left[erf\left(\frac{y(1+\rho)}{\sqrt{2(1-\rho^2)}}\right) + erf\left(\frac{y(1-\rho)}{\sqrt{2(1-\rho^2)}}\right)\right] \\ &+ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{2(1-\rho^2)}} e^{-\frac{y^2}{2}} \int_0^y \left(e^{-\frac{(t_2-\rho y)^2}{2(1-\rho^2)}} + e^{-\frac{(t_2+\rho y)^2}{2(1-\rho^2)}}\right) dt_2 \end{aligned}$$

حاصل می‌شود. با تغییر متغیرهای $z = \frac{t_2-\rho y}{\sqrt{2(1-\rho^2)}}$ و $z = \frac{t_2+\rho y}{\sqrt{2(1-\rho^2)}}$ داریم

$$f_Y(y) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} [erf(\frac{y(1+\rho)}{\sqrt{2(1-\rho^2)}}) + erf(\frac{y(1-\rho)}{\sqrt{2(1-\rho^2)}})]$$

با توجه به این که $erf(a) = 2[\Phi(\sqrt{2}a) - \frac{1}{2}]$، تابع چگالی (۲) حاصل می‌شود.

در شکل ۲ منحنی چگالی ماکسیمم به‌ازای مقادیر مختلف ρ بیانگر آن است که این چگالی متقارن نبوده و کشیدگی آن با افزایش ρ زیاد می‌شود.



شکل ۲: منحنی چگالی ماکسیمم به‌ازای $\rho = 0, 0/3, 0/6, 0/9$

قضیه ۲ : میانگین و واریانس متغیر تصادفی Y به‌ترتیب عبارتند از

$$\mu_f = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}[\sin(\tan^{-1}(\frac{1-\rho}{\sqrt{1-\rho^2}})) + \sin(\tan^{-1}(\frac{1+\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}))] \qquad (4)$$

$$\begin{aligned}\sigma_f^2 &= \frac{2}{\pi}[\tan^{-1}(\frac{1-\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}) + \tan^{-1}(\frac{1+\rho}{\sqrt{1-\rho^2}})] \\ &+ \frac{1}{\pi}[\sin(2\tan^{-1}(\frac{1+\rho}{\sqrt{1-\rho^2}})) + \sin(2\tan^{-1}(\frac{1-\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}))] - \mu_f^2 \qquad (5)\end{aligned}$$

برهان : با قرار دادن $a_1=\frac{1-\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}$ و $a_2=\frac{1+\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}$ داریم

$$\begin{aligned}\mu_f &= E(Y)=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty\int_{-\infty}^{a_1 y}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}ye^{-\frac{y^2}{2}}e^{-\frac{x^2}{2}}dxdy\\ &+ \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty\int_{-\infty}^{a_2 y}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}ye^{-\frac{y^2}{2}}e^{-\frac{x^2}{2}}dxdy\\ &- \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty\frac{1}{\sqrt{2\pi}}ye^{-\frac{y^2}{2}}dy\end{aligned}$$

سه جمله سمت راست μ_f به‌ترتیب با A، B و C نشان داده می‌شود. به راحتی می‌توان نشان داد که

$$A=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty\frac{1}{\sqrt{2\pi}}ye^{-\frac{y^2}{2}}dy+\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\int_0^{a_1 y}ye^{-\frac{x^2+y^2}{2}}dxdy.$$

با استفاده از مختصات قطبی داریم :

$$\begin{aligned}A &= \frac{C}{2}+\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\int_0^{tan^{-1}(a_1)}\cos(\theta)r^2e^{-\frac{r^2}{2}}d\theta dr\\ &= \frac{C}{2}+\frac{2}{\pi}\sin\left(\tan^{-1}(a_1)\right)\int_0^\infty r^2e^{-\frac{r^2}{2}}dr\\ &= \frac{C}{2}+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\sin\left(\tan^{-1}(a_1)\right)\end{aligned}$$

و به‌طور مشابه

$$B=\frac{C}{2}+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\sin\left(\tan^{-1}(a_2)\right).$$

که از جمع A و B و C رابطه (۴) حاصل می‌شود. همچنین

$$\begin{aligned}E(Y^2) &= \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty\int_{-\infty}^{a_1 y}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}y^2e^{-\frac{y^2}{2}}e^{-\frac{x^2}{2}}dxdy\\ &+ \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty\int_{-\infty}^{a_2 y}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}y^2e^{-\frac{y^2}{2}}e^{-\frac{x^2}{2}}dxdy\\ &- \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty\frac{1}{\sqrt{2\pi}}y^2e^{-\frac{y^2}{2}}dy\end{aligned}$$

سه جمله سمت راست $E(Y^{2})$ به ترتیب با D، E و F نشان داده می‌شود. مشابه اثبات A، داریم:

$$\begin{aligned} D &= \frac{F}{2}+\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}\int_{0}^{\tan^{-1}(a_1)}\cos^{2}(\theta)r^{3}e^{-\frac{r^{2}}{2}}d\theta dr \\ &= \frac{F}{2}+\frac{2}{\pi}[\frac{1}{2}\tan^{-1}(a_1)+\frac{1}{4}\sin(2tan^{-1}(a_1))]\int_{0}^{\infty}r^{2}e^{-\frac{r^{2}}{2}}rdr \end{aligned}$$

که با استفاده از تغییر متغیر $t=r^{2}$

$$D = \frac{F}{2}+\frac{2}{\pi}\tan^{-1}(a_1)+\frac{1}{\pi}\sin(2\tan^{-1}(a_1))]$$

همچنین

$$E = \frac{F}{2}+\frac{2}{\pi}\tan^{-1}(a_2)+\frac{1}{\pi}\sin(2\tan^{-1}(a_2))]$$

که از جمع D، E و F رابطه (۵) حاصل می‌شود.

قضیه ۳ : تابع مولد گشتاور متغیر تصادفی Y با تابع چگالی (۲) عبارت است از

$$M_Y(t)=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}e^{\frac{t^{2}}{2}}\int_{0}^{\infty}e^{-\frac{(y-t)^{2}}{2}}[erf(\frac{y(1-\rho)}{\sqrt{2(1-\rho^{2})}})+erf(\frac{y(1+\rho)}{\sqrt{2(1-\rho^{2})}})]dy \quad (6)$$

برهان :

$$\begin{aligned} M_Y(t) &= E(e^{tY})=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{\infty}\int_{-\infty}^{a_1 y}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^{2}}{2}+yt}e^{-\frac{x^{2}}{2}}dxdy \\ &+\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{\infty}\int_{-\infty}^{a_2 y}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^{2}}{2}+yt}e^{-\frac{x^{2}}{2}}dxdy \\ &-\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^{2}}{2}}+ytdy \end{aligned}$$

سه جمله سمت راست $M_Y(t)$ به ترتیب با G، H و I نشان داده می‌شود. لذا

$$G=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^{2}}{2}+ty}dy+\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}\int_{0}^{a_1 y}e^{-\frac{x^{2}+y^{2}}{2}+ty}dxdy$$

به راحتی می توان نشان داد که:

$$\begin{aligned} G &= \frac{I}{2}+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}e^{\frac{t^{2}}{2}}\int_{0}^{\infty}erf(\frac{y(1-\rho)}{\sqrt{2(1-\rho^{2})}})e^{-\frac{(y-t)^{2}}{2}}dy \\ H &= \frac{I}{2}+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}e^{\frac{t^{2}}{2}}\int_{0}^{\infty}erf(\frac{y(1+\rho)}{\sqrt{2(1+\rho^{2})}})e^{-\frac{(y-t)^{2}}{2}}dy \end{aligned}$$

که از جمع G، H و I رابطه (۹) حاصل می‌شود.

۳ کاربرد توزیع ماکسیمم نرمال استاندارد تاخورده دو متغیره

در مباحث قابلیت اطمینان، یکی از سیستم‌های رایج، سیستم موازی است که در آن اگر حداقل یکی از مؤلفه‌ها کار کند کل سیستم کار خواهد کرد. بنابراین طول عمر سیستم برابر ماکسیمم طول عمر مؤلفه‌ها خواهد بود. فرض کنید در سیستمی دو مؤلفه‌ای و موازی طول عمر سیستم‌ها از توزیع نرمال استاندارد دو متغیره تاخورده پیروی کند. در نتیجه می‌توان از نتایج این مقاله برای بررسی خواص طول عمر سیستم استفاده نمود. به‌عنوان مثال تابع چگالی و میانگین طول عمر سیستم به‌ترتیب از رابطه‌های (۲) و (۴) به‌دست می‌آیند. توزیع ماکسیمم نرمال استاندارد تاخورده دو متغیره به عنوان توزیع آمارهٔ آزمون اجتماع- اشتراک کاربرد دارد. اگر ناحیه رد برای آزمون فرضیه $H_{\circ i}: \theta \in \Theta_i$ در مقابل $H_{۱i}: \theta \in {\Theta_i}^c$ به شکل $\{x : |T_i(x)| > c\}$ باشد، آنگاه ناحیه رد برای آزمون $H_\circ : \theta \in \bigcap_{i=۱}^{۲} \Theta_i$ به‌صورت

$$\bigcup_{i=۱}^{۲} \{x : |T_i(x)| > c\} = \{x : \max_{i=۱,۲} |T_i(x)| > c\}$$

خواهد بود. بنابراین آماره آزمون به‌صورت $T = \max_{i=۱,۲} |T_i(x)|$ است. چنانچه هر T_i دارای توزیع نرمال استاندارد باشد، آماره T دارای توزیع ماکسیمم نرمال استاندارد تاخورده دو متغیره خواهد بود.

بحث و نتیجه‌گیری

چون توزیع نرمال استاندارد تاخورده دو متغیره یک توزیع متقارن نیست، تابع چگالی Y با روش ارائه شده توسط آریلانو و جنتون (۲۰۰۸) به‌دست نمی‌آید. در این مقاله توزیع ماکسیمم دو متغیر تصادفی دارای توزیع نرمال استاندارد تاخورده دو متغیره و همچنین گشتاورهای مرتبه اول و دوم و تابع مولد گشتاور این توزیع به‌دست آورده شد. در مطالعات آتی خواص دیگر این توزیع، توزیع ماکسیمم نرمال

تاخورده چند متغیره، توزیع ماکسیمم t تاخورده چند متغیره، خواص و کاربرد آن‌ها می‌توانند مورد بررسی قرار بگیرند.

تقدیر و تشکر

نویسندگان از پیشنهادات ارزنده داوران گرامی و هیئت تحریریه محترم مجله که باعث ارائه بهتر و بهبود مقاله شده است، کمال تشکر را دارند.

مراجع

جمشیدی چناری، ر.، علومی دودران، ر. (۱۳۹۰)، محاسبه مقایس نوسان ژئوتکنیکی در نهشته‌های طبیعی با کمک تئوری فضای تصادفی، مجله عمران مدرس، **۴**، ۱۷ -۲۷.

مهدیان، ن.، علامت ساز، م. ح. (۱۳۸۴)، توزیع نرمال بریده شده و کاربرد در بهبود سطح سرویس مطلوب، مجله دانشکده علوم اداری و اقتصاد اصفهان، **۷**، ۸۷ -۱۲۲.

Arellano-Valle, R. B. and Genton, M. G. (2008), On the Exact Distribution of the Maximum of Absolutely Continuous Dependent Random Variables, *Statistics and Probability Letters*, **78**, 27-35.

Chakraborty, A. K. and Chatterjee, M. (2013), On Multivariate Folded Normal Distribution, *Indian Statistical Institute*, **75**, Series B, 1-15.

Elandt, R. C. (1961), The Folded Normal Distribution: Two Methods of Estimating Parameters from Moments, *Technometrics*, **3**, 551-562.

Johnson, N. L. (1962), The Folded Normal Distribution: Accuracy of Estimation by Maximum Likelihood, *Technometrics*, **4**, 249-256.

Johnson, N. L. (1963), Cumulative Sum Control Charts for the Folded Normal Distribution, *Technometrics*, **5**, 451-458.

Kim, H. J. (2006), On the Ratio of Two Folded Normal Distributions, *Communications in Statistics - Theory and Methods*, **35**, 965-977.

Lin, H. C. (2004), The Measurement of a Process Capability for Folded Normal Process Data, *International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, **24**, 223-228.

Liao, M. Y. (2010), Economic Tolerance Design for Folded Normal Data, *International Journal of Production Research*, **48**, 4123-4137.

Leone, F. C, Nelson, L. S. and Nottingham, R. B. (1961), The Folded Normal Distribution, *Technometrics*, **3**, 543-550.

Psarakis, S. and Panaretos, J. (2001), On Some Bivariate Extensions of the Folded Normal and the Folded t Distribution, *Journal of Applied Statistical Science*, **10**, 119-136.

Sundberg, R. (1974), On Estimation and Testing for the Folded Normal Distribution, *Communications in Statistics - Theory and Methods*, **3**, 55-72.

Tsagris, M., Beneki, C. and Hassani, H. (2014), On the Folded Normal Distribution, *Mathematics*, **2**, 12-18.