

مجله علوم آماری، بهار و تابستان ۱۳۹۵

جلد ۱۰، شماره ۱، ص ۴۵-۶۵

DOI: 10.7508/jss.2016.01.003

شبیه‌سازی توزیع‌های چوله‌نرمال بسته و چوله‌تی بسته برای مدل معکوس سائسمیک بی‌زی

معصومه بخشی شجاعی، امید کریمی

گروه آمار، دانشگاه سمنان

تاریخ دریافت: ۱۳۹۳/۴/۲۰ تاریخ آخرین بازنگری: ۱۳۹۴/۲/۲۴

چکیده: مدل‌بندی داده‌های فضایی چوله اغلب با استفاده از میدان تصادفی چوله گاوسی صورت می‌پذیرد. مساله اصلی این است که شبیه‌سازی از این میدان تصادفی برای بعضی مقادیر پارامترها و بعدهای بالا خیلی زمان‌بر و حتی در برخی حالت‌ها ناممکن و نیازمند استفاده از روش‌های تقریبی است. یکی از شاخه‌های آمار فضایی که اغلب در تعیین ذخائر زیرزمینی هم‌چون نفت و گاز مورد استفاده قرار می‌گیرد، تحلیل داده‌های سائسمیک توسط مدل معکوس است. مدل معکوس گاوسی بی‌زی معمولاً در معکوس سائسمیک مورد استفاده قرار می‌گیرد که از لحاظ تحلیلی و محاسباتی به راحتی برای بعدهای بالا قابل انجام است. اما در عمل با متغیرهایی مواجه می‌شویم که نامتقارن و چوله هستند، مدل‌بندی این نوع داده‌ها با استفاده از توزیع‌های چوله صورت می‌گیرد. در تحلیل بی‌زی مدل معکوس چوله گاوسی بسته نیز یکی از مشکلات مهم تولید نمونه از توزیع چوله‌نرمال بسته است. در این مقاله یک الگوریتم کارآمد برای تولید نمونه از توزیع چوله‌نرمال بسته با بعد بالا ارائه می‌شود. همچنین توزیع چوله‌تی بسته معرفی می‌شود که شامل دم‌های

آدرس الکترونیک مسئول مقاله: امید کریمی، omid.karimi@semnan.ac.ir
کد موضوع‌بندی ریاضی (۲۰۱۰): 62H11, 62F15, 68U20

۴۶ شبیه‌سازی توزیع‌های چوله‌نرمال بسته و چوله‌تی بسته

سنگین در تابع چگالی است و یک الگوریتم شبیه‌سازی برای تولید نمونه از این توزیع نیز بیان می‌گردد. در نهایت بحث و نتیجه‌گیری ارائه می‌شود.

واژه‌های کلیدی: توزیع چوله‌نرمال بسته، توزیع چوله‌تی بسته، مدل معکوس بی‌زی، داده‌های سایسمیک.

۱ مقدمه

اخیراً در نظریه‌های آمار فضایی از توزیع چوله‌نرمال^۱ (SN) برای مدل‌بندی داده‌های نامنفی با توزیعی نامتقارن استفاده می‌شود. توزیع چوله‌نرمال چند متغیره توسط آزالینی و داواله (۱۹۹۶) معرفی گردید. کلاس جدیدی از توزیع‌ها تحت عنوان چوله‌نرمال بسته^۲ (CSN) توسط دامینگوس و همکاران (۲۰۰۳) معرفی شد که اکثر توزیع‌های چوله‌نرمال معرفی شده را در بر می‌گیرد. آلارد و ناویو (۲۰۰۵) نحوه شبیه‌سازی یک میدان تصادفی چوله‌گوسی بسته^۳ (CSG) را برای داده‌های فضایی ارائه کردند. در برخی مقالات (به‌عنوان مثال: آلارد و ناویو، ۲۰۰۵ و کریمی و محمدزاده، ۲۰۱۱) عبارت گوسی را به‌جای نرمال همراه با میدان تصادفی به‌کار برده‌اند. میدان تصادفی CSG یعنی هر تحقق متناهی از این میدان دارای توزیع CSN چندمتغیره باشد. کریمی و محمدزاده (۲۰۱۱) و (۲۰۱۲)، با استفاده از یک میدان تصادفی CSG به تحلیل داده‌های فضایی چوله‌پرداخته‌اند. غلامی و همکاران (۱۳۹۱) برآورد بی‌زی پارامترهای توزیع چوله‌نرمال را مورد بررسی قرار دادند. با توجه به اینکه توزیع CSN از توزیع چوله‌نرمال کلی‌تر و دارای خواص بسته بودن تحت تبدیلات خطی و شرطی کردن است، مطالعه یک میدان تصادفی CSG می‌تواند شرایط ساده‌تری برای پیشگویی فضایی دقیق‌تری را فراهم نماید. یکی از مشکلات مهم در این خانواده از توزیع‌ها تولید نمونه برای بعدهای بالا است که کریمی و همکاران (۲۰۱۰) به آن اشاره کرده‌اند و از تقریب همسایگی استفاده

^۱ Skew Normal

^۲ Closed Skew Normal

^۳ Closed Skew Gaussian

معصومه بخشی شجاعی، امید کریمی ۴۷

نمودند.

در این مقاله، سه الگوریتم شبیه‌سازی که براساس صورت ساختاری توزیع CSN است بیان و مورد مقایسه قرار می‌گیرند و بهترین روش که توسط آورسن و امره (۲۰۱۰) براساس یک روش تکراری ارائه شده برای مدل معکوس بیزی روی داده‌های فضایی سائسمیک به کار گرفته می‌شود. کریمی و همکاران (۲۰۱۰) مدل معکوس را برای خاصیت‌های مواد الاستیکی^۴ که توسط سه مولفه سرعت موج اولیه^۵ (v_p)، سرعت موج ثانویه^۶ (v_s) و چگالی^۷ (ρ) آن تشریح می‌شوند، مورد بررسی قرار دادند. نتایج نشان می‌دهد که توزیع دارای دم سنگین‌تری از توزیع CSN است. از این رو توزیع چوله تی بسته^۸ (CST) است، می‌تواند مفید باشد که تحت تبدیلات خطی و شرطی کردن نیز بسته است.

در بخش ۲، CSN و کاربردهای آن در مدل معکوس بیزی بیان می‌شود. سپس سه الگوریتم شبیه‌سازی از این توزیع در بخش ۳ ارائه می‌گردد و در بخش ۴، مدل معکوس بیزی برای داده‌های سائسمیک بیان و کاربرد آن‌ها روی توزیع‌های چوله در بخش ۵ ارائه می‌شود. مطالعه شبیه‌سازی روی مدل معکوس CSG در بخش ۶ و توزیع CST و کاربردهای آن در بخش ۷ بیان می‌شود. در بخش ۸ مدل معکوس CST بیزی مورد مطالعه قرار می‌گیرد و شبیه‌سازی از آن در بخش ۹ بیان و توزیع‌ها مورد مقایسه قرار می‌گیرند و در نهایت بحث و نتیجه‌گیری در بخش ۱۰ ارائه می‌گردد.

۲ توزیع چوله نرمال بسته

توزیع CSN چند متغیره، حالت کلی بسط داده شده توزیع نرمالی است که مولفه چولگی هم به آن اضافه شده است. فرض کنید تابع چگالی احتمال توام (t, v)

^۴ Elastic material properties

^۵ P-Wave velocity

^۶ S-Wave velocity

^۷ Density

^۸ Closed Skew T

۴۸ شیبه سازی توزیع های چوله نرمال بسته و چوله تی بسته

توزیع نرمال چندمتغیره به صورت:

$$\begin{bmatrix} t \\ v \end{bmatrix} \sim N_{n+q} \left(\begin{bmatrix} \mu_t \\ \mu_v \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \Sigma_t & \Gamma_{tv} \\ \Gamma_{vt} & \Sigma_v \end{bmatrix} \right) \quad (1)$$

باشد. متغیر تصادفی $x = [t|v \geq \mathbf{o}]$ دارای توزیع CSN و تابع چگالی احتمال آن به صورت زیر به دست می آید:

$$\begin{aligned} f(x) &= p(t|v \geq \mathbf{o}) = \frac{p(v \geq \mathbf{o}|t)f(t)}{p(v \geq \mathbf{o})} \\ &= [\mathbf{1} - \Phi_q(\mathbf{o}; \mu_v, \Sigma_v)]^{-1} [\mathbf{1} - \Phi_q(\mathbf{o}; \mu_{v|t}, \Sigma_{v|t})] \phi_n(t; \mu_t, \Sigma_t) \end{aligned}$$

که در آن $\Phi_n(\mathbf{o}; \mu, \Sigma)$ و $\Sigma_{v|t} = \Sigma_v - \Gamma_{vt}\Sigma_t^{-1}\Gamma_{tv}$, $\mu_{v|t} = \mu_v + \Gamma_{vt}\Sigma_t^{-1}(t - \mu_t)$ به ترتیب تابع توزیع و تابع چگالی نرمال با میانگین μ و ماتریس واریانس کوواریانس Σ است. نهایتاً صورت توزیع CSN و چگالی آن به صورت

$$x \sim CSN_{n,q}(\mu, \Sigma, \Gamma, \nu, \Delta),$$

$$f(x) = [\Phi_q(\mathbf{o}; \nu, \Delta + \Gamma\Sigma\Gamma')]^{-1} \Phi_q(\Gamma(x - \mu); \nu, \Delta) \phi_n(x; \mu, \Sigma),$$

بیان می شود، که در آن $\nu = -\mu_v$, $\Gamma = \Gamma_{vt}\Sigma_t^{-1}$, $\Sigma = \Sigma_t$, $\mu = \mu_t$ و $\Delta = \Sigma_v - \Gamma_{vt}\Sigma_t^{-1}\Gamma_{tv}$ باید ماتریس های معین مثبت باشند و Γ پارامتر چولگی است. اگر $\Gamma = \mathbf{o}$ ، CSN به توزیع نرمال با پارامترهای (μ, Σ) تبدیل می شود. برخی ویژگی های مطلوب توزیع CSN مربوط به مدل معکوس بییزی را دامینگوس و همکاران (۲۰۰۳) بیان کرده اند:

۱. ترکیب خطی روی متغیرهای تصادفی مستقل از توزیع CSN. نیز دارای توزیع CSN است: متغیر $x \sim CSN_{n,q}(\mu, \Sigma, \Gamma, \nu, \Delta)$ و A ماتریس قطعی $l \times n$ ($l \leq n$) و برداری c بعدی l معلوم است. بنابراین

$$[y = Ax + c] \sim CSN_{l,q}(\mu_y, \Sigma_y, \Gamma_y, \nu, \Delta_y)$$

$$\mu_y = A\mu + c, \quad \Sigma_y = A\Sigma A', \quad \Gamma_y = \Gamma\Sigma A'\Sigma_y^{-1},$$

$$\nu_y = \nu, \quad \Delta_y = \Delta + \Gamma\Sigma\Gamma' - \Gamma\Sigma A'\Sigma_y^{-1}A\Sigma\Gamma'.$$

^۹ Deterministic

معصومه بخشی شجاعی، امید کریمی ۴۹

در نتیجه توزیع CSN تحت تبدیلات خطی بسته است.
 ۲. ترکیب دو متغیر تصادفی مستقل از CSN، توزیع CSN است. اگر x_1 و x_2 دو متغیر تصادفی از توزیع CSN به صورت

$$x_1 \sim CSN_{n_{x_1}, q_{x_1}}(\mu_{x_1}, \Sigma_{x_1}, \Gamma_{x_1}, \nu_{x_1}, \Delta_{x_1})$$

$$x_2 \sim CSN_{n_{x_2}, q_{x_2}}(\mu_{x_2}, \Sigma_{x_2}, \Gamma_{x_2}, \nu_{x_2}, \Delta_{x_2})$$

باشند. آن گاه

$$y = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \sim CSN_{n, q}(\mu_y, \Sigma_y, \Gamma_y, \nu_y, \Delta_y)$$

$$n = n_{x_1} + n_{x_2}, \quad q = q_{x_1} + q_{x_2},$$

$$\mu_y = \begin{bmatrix} \mu_{x_1} \\ \mu_{x_2} \end{bmatrix}, \quad \Sigma_y = \begin{bmatrix} \Sigma_{x_1} & \circ \\ \circ & \Sigma_{x_2} \end{bmatrix}, \quad \Gamma_y = [\circ, \Gamma_{x_2}],$$

$$\nu_y = \begin{bmatrix} \nu_{x_1} \\ \nu_{x_2} \end{bmatrix}, \quad \Delta_y = \begin{bmatrix} \Delta_{x_1} & \circ \\ \circ & \Delta_{x_2} \end{bmatrix}.$$

۳. توزیع شرطی مولفه‌های متغیرهای تصادفی از توزیع CSN، نیز CSN هستند. فرض کنید $x \sim CSN_{n, q}(\mu, \Sigma, \Gamma, \nu, \Delta)$ و $x_1 \in R^k$ و $x_2 \in R^{n-k}$ زیربردارهایی از $x = [x'_1, x'_2]'$ باشند. متناسب با این افرازا داریم:

$$\mu = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix}, \quad \Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{bmatrix}, \quad \Gamma = [\Gamma_1, \Gamma_2].$$

آن گاه

$$[x_1 | x_2] \sim CSN_{k, q}(\mu_{1|2}, \Sigma_{1|2}, \Gamma_{1|2}, \nu_{1|2}, \Delta_{1|2})$$

که در آن

$$\mu_{1|2} = \mu_1 + \Sigma_{12} \Sigma_{22}^{-1} (x_2 - \mu_2), \quad \Sigma_{1|2} = \Sigma_{11} - \Sigma_{12} \Sigma_{22}^{-1} \Sigma_{21}$$

$$\Gamma_{1|2} = \Gamma_1, \quad \nu_{1|2} = \nu - (\Gamma_2 + \Gamma_1 \Sigma_{12} \Sigma_{22}^{-1} \Sigma_{21})(x_2 - \mu_2), \quad \Delta_{1|2} = \Delta.$$

۳ الگوریتم‌های شبیه‌سازی از توزیع CSN

در این بخش سه الگوریتم شبیه‌سازی براساس ساختار توزیع CSN بیان و مورد مقایسه قرار می‌گیرند.

۵۰ شبیه‌سازی توزیع‌های چوله‌نرمال بسته و چوله‌تی بسته

الف- الگوریتم شبیه‌سازی یک‌گامی (A): ساده‌ترین راه شبیه‌سازی از توزیع CSN می‌باشد. x از توزیع نرمال چندمتغیره (t, v) رابطه (۱) تولید می‌شود، تا زمانی که $v \geq 0$ برقرار شود. سپس x یک نمونه تصادفی از توزیع CSN است. این الگوریتم برای $0 \ll \mu_v$ کارا نیست و بین عناصر v همبستگی منفی زیادی ایجاد می‌شود، زیرا تولید $v_i \geq 0, i = 1, \dots, q$ به‌طور هم‌زمان بسیار نامحتمل است. زمانی که بعد بردار v بزرگ است، تولید $v_i \geq 0, i = 1, \dots, q$ به‌طور هم‌زمان غیرممکن خواهد بود.

ب- الگوریتم شبیه‌سازی دوگامی (B): نخست v را تا زمانی که $v \geq 0$ است از توزیع $p(v|v \geq 0)$ تولید می‌شود و سپس t را به‌شرط v تولید می‌کنیم که توزیع آن نرمال چندمتغیره با میانگین و واریانس زیر است:

$$E(t|v) = \mu + \Gamma_{tv} \Sigma_v^{-1} (v + \nu), \quad V(t|v) = \Sigma_t - \Gamma_{tv} \Sigma_v^{-1} \Gamma'_{tv}.$$

ج- الگوریتم شبیه‌سازی تکراری (C):

این الگوریتم کاراترین روشی است که به‌وسیله الگوریتم رد و پذیرش (رابرت، ۱۹۹۵) و روش نمونه‌گیری گیبز نمونه تولید می‌کند. همانند الگوریتم‌های پیشین نخست $v \geq 0$ ، سپس t تولید شود. اما به‌جای این که $v_i \geq 0, i = 1, \dots, q$ به‌طور هم‌زمان برقرار باشد هر v_i به‌طور متوالی به‌وسیله روش تکراری تولید می‌شود. $v_i \geq 0$ با استفاده از الگوریتم نمونه‌گیری رد و پذیرش از توزیع نرمال محدود شده تولید می‌شود. برای تولید w از $h(w)$ ، ابتدا یک توزیع پیشنهادی $g(w)$ شبیه $h(w)$ که شبیه‌سازی از آن آسان‌تر است، در نظر گرفته می‌شود، سپس یک w از $g(w)$ و u از $U(0, 1)$ طوری تولید می‌شود که w از $h(w)$ تحقق یابد، به‌طوری که w, u در رابطه $u \leq \frac{h(w)}{c \cdot g(w)}$ صدق کنند، که در آن c مقدار مثبت ثابتی است که به ازای هر w در رابطه $c \cdot g(w) > h(w)$ صدق می‌کند.

دانشا v_0 می‌شود به طرز ناچاه داشته دو دحل امر نذع یزوت $h(v; \mu_+, \sigma_+^2, v_0)$ دینک ض رف
تروصه بن آی لاگچع باتو دوشی مه دادش یاخذ $N_+^+(\mu_+, \sigma_+^2, v_0)$ لکشه به c

$$h(v; \mu_+, \sigma_+^2, v_0) = \begin{cases} \frac{\exp\{-\frac{(v-\mu_+)^2}{2\sigma_+^2}\}}{\sqrt{2\pi}\sigma_+(1-\Phi((v_0-\mu_+)/\sigma_+))} & v \geq v_0 \\ 0 & v < v_0 \end{cases}$$

معصومه بخشی شجاعی، امید کریمی ۵۱

است. وقتی $v_0 \rightarrow -\infty$ می‌کند، توزیع نرمال محدود شده فوق تبدیل به توزیع نرمال با میانگین μ_+ و واریانس σ_+^2 خواهد شد. رابرت (۱۹۹۵) نشان داد که انتخاب مناسب برای توزیع پیشنهادی $g(\cdot)$ توزیع نمایی تبدیل یافته با چگالی

$$g(v; \alpha, v_0) = \begin{cases} \alpha \exp\{-\alpha(v - v_0)\} & v \geq v_0 \\ 0 & v < v_0 \end{cases}$$

است و دلیل آن مشابه بودن صورت چگالی و حوزه مقادیر آن با چگالی هدف (نرمال محدود شده) است. برای تولید نمونه از آن از رابطه $v = -\frac{1}{\alpha} \cdot \ln(u) + v_0$ استفاده می‌شود، که در آن u از توزیع یکنواخت $U(0, 1)$ تولید می‌شود. رابرت (۱۹۹۵) برای توزیع نرمال محدود شده استاندارد ($\mu_+ = 0, \sigma_+^2 = 1$) مقدار ثابت c را با ماکسیم کردن $\frac{h(v)}{g(v)}$ به صورت

$$c = \begin{cases} \frac{1}{\alpha \sqrt{2\pi}(1-\Phi(v_0))} e^{\alpha^2/2 - v_0 \alpha} & \alpha \geq v_0 \\ \frac{1}{\alpha \sqrt{2\pi}(1-\Phi(v_0))} e^{-(v_0)^2/2} & o.w \end{cases}$$

ارائه کرده است در آن صورت نسبت $h(v)/c \cdot g(v)$ را می‌توان به صورت

$$\frac{h(v)}{c \cdot g(v)} = \begin{cases} e^{-v^2/2 + \alpha(v - v_0) - \alpha^2/2 + \alpha v_0} & \alpha \geq v_0 \\ e^{-v^2/2 + \alpha(v - v_0) + (v_0)^2/2} & o.w \end{cases}$$

نوشت. در این حالت با قرار دادن $\alpha = \frac{v_0 + \sqrt{v_0^2 + 4}}{2}$ در توزیع نمایی تبدیل یافته احتمال پذیرش نمونه در الگوریتم رد و پذیرش تا حد زیادی افزایش می‌یابد (رابرت، ۱۹۹۵). در نتیجه الگوریتمی داریم که نمونه تصادفی از توزیع نرمال تک متغیره محدود شده را تولید می‌کند، اما می‌خواهیم از توزیع نرمال چندمتغیره محدود شده شبیه‌سازی کنیم و این مساله را می‌توان به وسیله الگوریتم نمونه‌گیری گیبز انجام داد، بنابراین $v^{(j)}$ به صورت:

$$\begin{aligned} v_1^{(j)} &\sim N_1^+(E(v_1|v_2^{(j-1)}, v_3^{(j-1)}, \dots, v_q^{(j-1)}), V(v_1|v_2^{(j-1)}, v_3^{(j-1)}, \dots, v_q^{(j-1)}), v_{0,1}) \\ v_2^{(j)} &\sim N_2^+(E(v_2|v_1^{(j)}, v_3^{(j-1)}, \dots, v_q^{(j-1)}), V(v_2|v_1^{(j)}, v_3^{(j-1)}, \dots, v_q^{(j-1)}), v_{0,2}) \\ &\vdots \\ v_q^{(j)} &\sim N_q^+(E(v_q|v_1^{(j)}, v_2^{(j)}, \dots, v_q^{(j-1)}), V(v_q|v_1^{(j)}, v_2^{(j)}, \dots, v_q^{(j-1)}), v_{0,q}) \end{aligned}$$

۵۲ شبیه‌سازی توزیع‌های چوله‌نرمال بسته و چوله‌تی بسته

به روزرسانی می‌شوند، به طوری که $v_{o,i}$ نقطه برشی برای عناصر v_i است. بنابراین الگوریتم C را می‌توان به صورت زیر اجرا نمود:

الگوریتم C: شبیه‌سازی تکراری

$$1. \quad v = \max\{-\nu, v_o\} \text{ و } V \leftarrow \Sigma_v^{-1}$$

۲. تا زمانی که همگرایی رخ دهد برای $i = 1, \dots, q$

$$\Sigma_{v,-i,-i}^{-1} \leftarrow V_{-i,-i} - V_{i,-i}V'_{i,-i}/v_{ii} .$$

$$\mu_+ \leftarrow -\nu_i + \Sigma'_{v,i,-i}\Sigma_{v,-i,-i}^{-1}(v_{-i} + \nu_{-i}) .$$

$$\sigma_+^2 \leftarrow \Sigma_{v,ii} - \Sigma'_{v,i,-i}\Sigma_{v,-i,-i}^{-1}\Sigma_{v,i,-i} .$$

$$v_o : v_o \leftarrow (v_{o,i} - \mu_+)/\sigma_+ .$$

$$\alpha \leftarrow v_o + (\sqrt{v_o^2 + 4})/2 .$$

$v \sim \exp(1/\alpha) + v_o$ و $u \sim U(0, 1)$ را تا زمانی که شرایط زیر برقرار باشد

تولید کنید:

$$\begin{cases} u \leq \exp(-(v - \alpha)^2/2) & v_o < \alpha \\ u \leq \exp(-(v - \alpha)^2/2)\exp(-(v_o - \alpha)^2/2) & o.w \end{cases} \quad v_i \leftarrow \mu_+ + v\sigma_+ .$$

$$3. \quad x \leftarrow t|v \sim N_n(\mu + \Gamma_{tv}\Sigma_n^{-1}(v + \nu), \Sigma_t - \Gamma_{tv}\Sigma_n^{-1}\Gamma'_{tn})$$

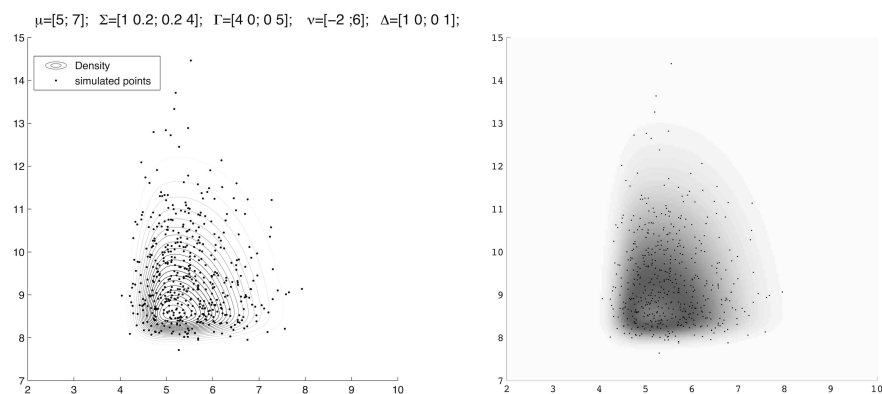
که در آن اندیس i یعنی این که سطر یا ستون نام حذف گردد. به عنوان مثال

$V_{v,i,-i}$ یعنی در ماتریس V سطر و ستون نام حذف گردد.

مثال ۱ (شبیه‌سازی): مقایسه زمان اجرای الگوریتم براساس پارامتر ν و بعدهای متفاوت آن با نرم افزار MATLAB با یک رایانه CPU 2.5 GHz P4 صورت گرفته است. توزیع CSN با ابعاد ۲ با پارامترهای (۲) در شکل ۱ نمایش داده شده است:

$$(2) \quad \mu = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix}, \Sigma = \begin{bmatrix} 1 & 0/2 \\ 0/2 & 4 \end{bmatrix}, \Gamma = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}, \nu = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix}, \Delta = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

که نمونه‌های شبیه‌سازی شده با الگوریتم C چگالی احتمال توزیع CSN را می‌پوشاند. مدت زمان اجرای سه الگوریتم A,B,C برای توزیع CSN با ابعاد ۲ و ۳، با پارامترهای مشخص شده در (۲) و (۳) و ν های مثبت متفاوت، برای ۵۰۰۰ نمونه



شکل ۱: نمودارهای تراز و تصویر توزیع CSN به همراه نمونه‌های تولید شده برای مقادیر پارامتر در رابطه (۲)

تولید شده و

$$\mu = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 9 \end{bmatrix}, \Sigma = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \Gamma = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}, \Delta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3)$$

در جدول ۱ خلاصه شده‌اند. نتایج نشان می‌دهند هنگامی که پارامتر ν مقدار مثبت

جدول ۱: مدت زمان اجرای الگوریتم‌ها بر حسب ثانیه

ν	A	B	C	
[۵, ۵]	۴/۹	۴/۵	۱/۱	
[۱۰, ۱۵]	۲۶۶	۲۵۹	۱/۴	دو بُعد
[۱۲, ۱۲]	۵۸۲	۵۳۸	۱/۳	
[۲, ۲, ۲]	۴/۹	۴/۷	۱/۱	
[۴, ۴, ۴]	۲۱	۲۰	۱/۱	سه بُعد
[۸, ۸, ۸]	۱۴۳۴	۱۲۹۸	۱/۲	

بزرگ دارد، الگوریتم C که براساس یک روش تکراری و الگوریتم رد و پذیرش است از نظر زمان محاسباتی نسبت به دو الگوریتم دیگر از سرعت بالایی برخوردار است. همچنین با تغییر بُعد از ۲ به ۳ زمان محاسبات برای ν های بزرگ مثبت

۵۴ شبیه‌سازی توزیع‌های چوله‌نرمال بسته و چوله‌تی بسته

به صورت نمایی برای الگوریتم‌های A و B افزایش می‌یابد درحالی که برای الگوریتم C تفاوت چندانی نمی‌کند. الگوریتم‌های A و B برای بُعدهای بالاتر کاملاً ناکارآمد هستند.

۴ مدل معکوس بیزی

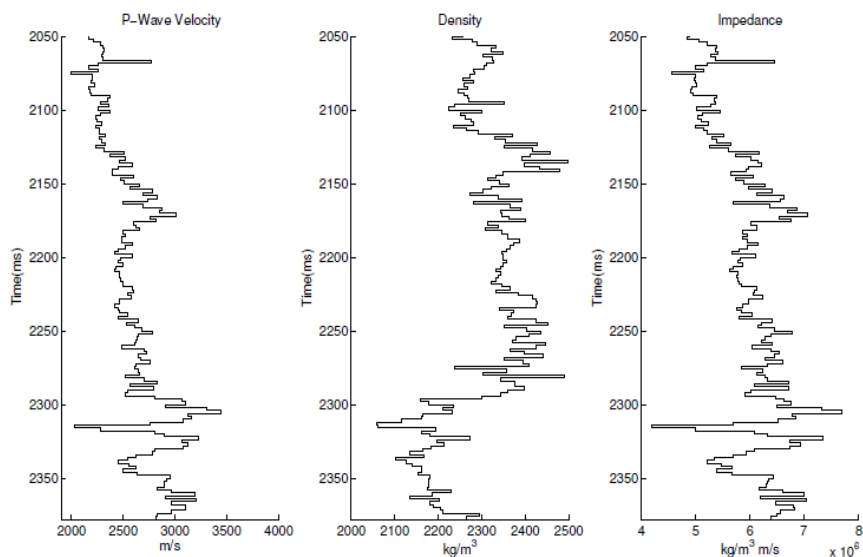
یکی از شاخه‌های آمار فضایی که اغلب در تعیین ذخایر زیرزمینی همچون نفت و گاز مورد استفاده قرار می‌گیرد، تحلیل داده‌های سائسمیک توسط مدل معکوس است، که نقش بسزایی در تحلیل شاخص‌های ذخائر زیرزمینی مانند سنگ‌شناسی -سیال^{۱۰} و ضریب تخلخل-نفوذپذیری^{۱۱} برای تفکیک نفت و گاز زیرزمینی دارد. چون این مدل یک مرحله میانی و حیاتی در فرآیند ارزیابی ذخائر زیرزمینی است، کیفیت آن تاثیر به‌سزایی در بهبود فرآیند دارد. داده‌های سائسمیک یا لرزه‌ای حاصل فرآیندی هستند که در آن یک موج سائسمیک از یک منبع مانند زمین‌لرزه، انفجار یا هر پدیده مشابه مرتعش می‌شود، سپس امواج انعکاس یافته از سطح مقابل توسط مجموعه‌ای از گیرنده‌ها ثبت می‌گردند. به‌عنوان مثال داده‌های سائسمیک دریایی معمولاً توسط آرایه‌ای از تفنگ‌های بادی تولید و از طریق یک یا چند نوار میکروفن‌های زیرآبی به صورت یدک‌کش جمع‌آوری می‌شوند. رابطه خطی پیچشی^{۱۲} بین داده‌های سائسمیک d و ضرایب انعکاسی^{۱۳} r به صورت $d = Wr + e$ است، که در آن W ماتریس موجک، خطای مشاهده لرزه به صورت $e = We_1 + e_2$ است، که در آن e_1 و e_2 دارای توزیع گاوسی مستقل با میانگین صفر و واریانس σ_e^2 هستند. بنابراین e موجک رنگی با میانگین صفر و واریانس $\Sigma_e = \sigma_e^2(WW' + I)$ است. از آنجا که توزیع CSN تعمیمی از توزیع گاوسی است، e نیز دارای توزیع CSN به صورت $CSN(\mathbf{o}, \Sigma_e, \cdot, \cdot, \cdot)$ است، که در آن سه پارامتر بعدی نامشخص هستند، چون $q = 0$ است.

^{۱۰} Lithology-fluid

^{۱۱} Porosity-permeability

^{۱۲} Convolution

^{۱۳} Reflection coefficient



شکل ۲: سرعت موج، چگالی و امپدانس مشاهده شده

لایه z و $z + 1$ ، لایه‌هایی هستند که ضرایب انعکاس آن‌ها متفاوت هستند. ضریب انعکاس برای لایه z را می‌توان به صورت $r_z = \frac{a_z^+}{a_z^-}$ بازنویسی کرد که در آن a_z^+ دامنه منعکس شده از امواج و a_z^- دامنه موج حادثه بین z و $z + 1$ ، v_z سرعت موج p و چگالی در لایه z است. سپس امپدانس^{۱۴} z در لایه z ، $v_z p_z$ است. پارامترهای v, p از چاه در میدان اوست اسلایپنر^{۱۵} است که برای محاسبه امپدانس z مورد استفاده قرار می‌گیرد و داده‌ها در نتیجه در شکل ۲ نشان داده می‌شود. فاصله عمق استفاده شده [۲۰۵۰، ۲۳۷۸] میلی ثانیه با فاصله نمونه برداری دو میلی ثانیه و $T = 165$ تعداد داده‌های بازتاب است. در ادامه مدل معکوس سائسمیک گاوسی بیزی مورد بررسی قرار می‌گیرد که تعمیمی از معکوس گاوسی بیزی است. معکوس بیزی معمولاً در معکوس سائسمیک مورد استفاده قرار می‌گیرد.

^{۱۴} Impedance

^{۱۵} Sleipner Ost

۵ مدل معکوس سائسمیک چوله گاوسی بیزی

ارزیابی مدل برای استفاده در مسائل کاربردی از دشواری زیادی برخوردار است. بولاند و امره (۲۰۰۳) یک مدل معکوس سائسمیک گاوسی بیزی ارائه کردند که به‌طور تحلیلی قابل ارزیابی است و از کارایی محاسباتی فوق‌العاده‌ای برخوردار است. چون داده‌های سائسمیک در این مدل، گاوسی فرض شده است، آن را مدل معکوس سائسمیک گاوسی بیزی نامیده‌اند و مدل به‌صورت $[d|x] = Hx + e$ است، که در آن $d \in R^{n_d}$ داده سائسمیک اندازه‌گیری شده با خطای $e \in R^{n_d}$ ، H ماتریس متشکل از امواج و $x \in R^{n_x}$ لگاریتم طول موج است. هدف تعیین x به شرط d توسط معکوس بیزی می‌باشد. مدل پسین به‌صورت

$$x \sim CSN_{n_x, q_x}(\mu_x, \Sigma_x, \Gamma_x, \nu_x, \Delta_x)$$

$$e \sim CSN_{n_d, q_d}(\mathbf{o}, \Sigma_e, \Gamma_e, \mathbf{o}, I)$$

$$[d|x] \sim CSN_{n_d, q_d}(Hx, \Sigma_e, \Gamma_e, \mathbf{o}, I)$$

$$[x|d] \sim CSN_{n_x, q_x + q_d}(\mu_{x|d}, \Sigma_{x|d}, \Gamma_{x|d}, \nu_{x|d}, \Delta_{x|d})$$

به‌دست می‌آید، که در آن مقدار پارامترها توسط کریمی و همکاران (۲۰۰۹) به‌صورت زیر ارائه شده است:

$$\begin{aligned} \mu_{x|d} &= \mu_x + \Sigma_x H' [H \Sigma_x H' + \Sigma_e]^{-1} (d - H \mu_x) \\ \Sigma_{x|d} &= \Sigma_x - \Sigma_x H' [H \Sigma_x H' + \Sigma_e]^{-1} H \Sigma_x \\ \Gamma_{x|d} &= \begin{bmatrix} \left[\begin{array}{c} \Gamma_x \Sigma_x \\ \mathbf{o} \end{array} \right] - \left[\begin{array}{c} \Gamma_x \Sigma_x H' \\ \Gamma_e \Sigma_e \end{array} \right] [H \Sigma_x H' + \Sigma_e]^{-1} H \Sigma_x \\ \Sigma_{x|d}^{-1} \end{bmatrix} \\ \nu_{x|d} &= \begin{bmatrix} \nu_x \\ \mathbf{o} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \Gamma_x \Sigma_x H' \\ \Gamma_e \Sigma_e \end{bmatrix} [H \Sigma_x H' + \Sigma_e]^{-1} (d - H \mu_x) \\ \Delta_{x|d} &= \begin{bmatrix} \Delta_x + \Gamma_x \Sigma_x \Gamma_x' & \mathbf{o} \\ \mathbf{o} & I + \Gamma_e \Sigma_e \Gamma_e' \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \Gamma_x \Sigma_x H' \\ \Gamma_e \Sigma_e \end{bmatrix} [H \Sigma_x H' + \Sigma_e]^{-1} \\ &\times \begin{bmatrix} \Gamma_x \Sigma_x H' \\ \Gamma_e \Sigma_e \end{bmatrix}' - \Gamma_{x|d} \Sigma_{x|d} \Gamma_{x|d}' \end{aligned}$$

معصومه بخشی شجاعی، امید کریمی ۵۷

این مدل حالت کلی تری از مدل معکوس بیزی گاوسی بولاند و امره (۲۰۰۳) است. که با در نظر گرفتن $\Gamma_e = \circ$ در درستنمایی و $\Gamma_x = \circ$ در مدل پیشین نتیجه می شود. مدل پسین $p(x|d)$ برای پیش گویی x براساس داده d است. از هر سه آماره مکانی میانگین، میانه و مد برای پیش گویی x به شرط d می توان استفاده کرد، در این مقاله میانه برای استفاده انتخاب شد. بنابراین پیش گویی کننده به صورت $[\widehat{x|d}] = Med\{x|d\} = Q_{0.5}\{x|d\}$ داده می شود. میانه مورد بحث توسط کریمی و همکاران (۲۰۰۹) قرار گرفت، که انتخاب خوبی است چون رابطه منطقی با تعریف فاصله پیش گویی $(1 - \alpha)$ به صورت $[Q_{\frac{\alpha}{2}}\{x|d\}, Q_{1-\frac{\alpha}{2}}\{x|d\}]$ دارد. همچنین میانه یک عملگر خطی نسبت به هر تابع یکنوا $h(\cdot)$ است $Q_{0.5}\{h(x|d)\} = h(Q_{0.5}\{x|d\})$ توجه کنید که میانه اغلب به عنوان پیش گویی کننده برای توزیع های چوله به جای میانگین استفاده می شود، چون میانگین ضعیف تر از میانه در توزیع هایی با دنباله های بلند عمل می کند.

۶ مطالعه شبیه سازی روی مدل معکوس سائسمیک CSG

در این بخش الگوریتم ها روی مدل معکوس سائسمیک CSG با پارامترهای مشخص مورد ارزیابی قرار می گیرد. فرض کنید $x \sim \text{CSN}_{3,3}(\mu_x, \sigma_x, \gamma_x, \nu_x, \delta_x)$ با پارامترهای $\mu_x = 2, \sigma_x = 0/3, \nu_x = 1, \delta_x = 1$ و مقادیر متفاوت پارامتر چولگی $\gamma_x = \{-1/5, -1, 0, 1, 1/5\}$ در نظر گرفته شده است. همچنین برای مولفه خطاها، $\Sigma_e = 10^{-2}(HH' + I)$ ، $\Gamma_e = \circ$ تعریف شده است که در آن I ماتریس همانی است. تابع همبستگی نمایی $c(h) = \exp\{-\frac{h}{\delta}\}$ در نظر گرفته شده و ماتریس H در مدل درست نمایی به صورت:

$$H = \begin{bmatrix} 0/75 & 0/25 & 0 \\ 0/2 & 0/6 & 0/2 \\ 0 & 0/25 & 0/75 \end{bmatrix}$$

انتخاب شده است. ابتدا مقدار مرجع x از توزیع پیشین تولید و سپس مقدار d به صورت $[d|x] = Hx + e$ تولید می شود. با استفاده از سه الگوریتم A, B, C برای مدل پسین ۵۰۰۰ نمونه تولید شد که به طور متوسط برای مقایسه الگوریتم ها از ۵۰ مجموعه داده مرجع استفاده شده است. با تغییر γ_x از $-1/5$ تا $1/5$ ، ماکسیمم تغییر

۵۸ شیبه‌سازی توزیع‌های چوله‌نرمال بسته و چوله‌تی بسته

در زمان اجرای الگوریتم C فقط ۰/۱ ثانیه است، اما برای الگوریتم‌های A و B به ترتیب ۶۳۷ و ۴۶۴ ثانیه است که این حاکی از مناسب بودن الگوریتم C است. زمان اجرای الگوریتم C با افزایش بعد افزایش می‌یابد. فرض کنید $T = n_x$ بنابراین $q = q_x + q_d = 2T$ در نتیجه بعد کلی $3T$ است. همه‌ی پارامترهای قبلی را با $\gamma_{x_0} = 3$ و ماتریس بسط داده شده زیر در نظر می‌گیریم:

$$H = \begin{bmatrix} 0/75 & 0/25 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0/20 & 0/60 & 0/20 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0/20 & 0/60 & 0/20 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & 0 & 0/20 & 0/60 & 0/20 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0/25 & 0/75 \end{bmatrix} \in R^{T \times T}$$

بنابراین مدل پسین می‌تواند هر بعدی از T باشد. تغییر زمان اجرای الگوریتم برای مقادیر مختلف T که برای تولید ۱۰۰۰ تحقق از بیست مجموعه داده مرجع برای $T \in \{20, 40, 60, \dots, 420\}$ استفاده شده است را مورد بررسی قرار می‌دهیم. مشاهده شده است که زمان اجرا سریع‌تر از خطی است که به‌عنوان تابع T در نظر گرفته شده است. این می‌تواند یک مشکل مهم در مجموعه‌های سه بعدی باشد. زمان اجرای معکوس کردن Σ_v به‌صورت $O(T \log T)$ خواهد شد و برای اجتناب از مشکلات برای T بزرگ، باید از تقریب برای معکوس کامل Σ_v استفاده کنیم.

۷ توزیع CST و کاربردهای آن

کریمی و همکاران (۲۰۱۰) مدل معکوس را برای خاصیت‌های مواد الاستیکی که توسط سه مولفه سرعت موج اولیه (v_p) ، سرعت موج ثانویه (v_s) و چگالی (ρ) تشریح می‌شوند، مورد بررسی قرار دادند. نتایج نشان می‌دهد که توزیع سرعت موج اولیه v_p کمی دم‌سنگین‌تر از توزیع CSN است. از این رو توزیع CST می‌تواند برای مدل‌بندی چولگی با دم‌سنگین مفید باشد. برای دستیابی به چنین توزیعی نیاز است تا توزیع چندمتغیره‌ی تعریف شود. توزیع CST توزیعی است که چولگی به توزیع‌تی استیودنت اضافه شده است. فرض کنید تابع چگالی احتمال توام توزیع

معصومه بخشی شجاعی، امید کریمی ۵۹

(t, v) تی چندمتغیره به صورت:

$$\begin{bmatrix} t \\ v \end{bmatrix} \sim T \left(\begin{bmatrix} \mu_t \\ \mu_v \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \Omega_t & \Gamma_{tv} \\ \Gamma_{vt} & \Omega_v \end{bmatrix}, \eta \right)$$

باشد. چگالی توزیع به صورت

$$\tau_n(\mathbf{y}; \boldsymbol{\mu}, \Omega, \eta) = \frac{\Gamma(\frac{\eta+n}{\gamma})}{(\frac{\eta}{\gamma})(\eta, \pi)^{n/\gamma}} |\Omega|^{-\frac{1}{\gamma}} \left(\lambda + \frac{1}{\eta} (\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu})' \Omega^{-1} (\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu}) \right)^{-\frac{\eta+n}{\gamma}}$$

است، که در آن $\Gamma(\cdot)$ تابع گاما است، $\boldsymbol{\mu} \in R^n$ بردار مرکزی است، $\Omega \in R^{n \times n}$ ماتریسی معین مثبت و $\eta \in R^+$ درجه آزادی است. متغیر تصادفی $\mathbf{x} = [t|v \geq 0]$ دارای توزیع CST می باشد و تابع چگالی احتمال آن به صورت

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= p(t|v \geq 0) \\ &= \frac{p(v \geq 0|t)p(t)}{p(v \geq 0)} \\ &= [\lambda - T_q(\mathbf{o}; \boldsymbol{\mu}_v, \Omega_v)]^{-1} [\lambda - T_q(\mathbf{o}; \boldsymbol{\mu}_{v|t}, \Omega_{v|t}, \eta + n)] \tau(t, \boldsymbol{\mu}_t, \Omega_t, \eta) \end{aligned}$$

به دست می آید، همان طور که ملاحظه می شود $\boldsymbol{\mu}_{v|t} = \boldsymbol{\mu}_v + \Gamma + vt\Omega_t^{-1}(t - \boldsymbol{\mu}_t)$ و $\Omega_{v|t} = \frac{1}{1+\frac{t^2}{\eta}} \left(\lambda + \frac{1}{\eta} (t - \boldsymbol{\mu}_t)' \Omega_t^{-1} (t - \boldsymbol{\mu}_t) \right) (\Omega_v - \Gamma_{vt}\Omega_t^{-1}\Gamma_{tv})$ توزیع q -تجمعی q -بعدهی تی استیودنت است. توزیع CST با نماد $CST_{n,q}(\boldsymbol{\mu}, \Omega, \Gamma, \boldsymbol{\nu}, \Delta, \eta)$ نشان داده می شود و چگالی آن به صورت

$$f(\mathbf{x}) = [T_q(\mathbf{o}; \boldsymbol{\nu}, \Delta + \Gamma\Omega\Gamma', \eta)]^{-1} T_q(\Gamma(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}); \boldsymbol{\nu}, \Delta, \eta + n) \tau(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}, \Omega, \eta)$$

است، که در آن $\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}_t$ ، $\Omega = \Omega_t$ ، $\Gamma = \Gamma_{vt}\Omega_t^{-1}$ ، $\boldsymbol{\nu} = -\boldsymbol{\mu}_v$ ، $\Delta = \Omega_{v|t}$. برخی از ویژگی های مطلوب توزیع CST همانند توزیع CSN که مربوط به مسائل معکوس است را توسط آیورسن و امره (۲۰۱۰) بیان می کنیم:

۱. ترکیب خطی روی متغیرهای تصادفی توزیع CST، متغیرهای تصادفی با توزیع CST هستند. اگر $\mathbf{x} \sim CST_{n,q}(\boldsymbol{\mu}, \Omega, \Gamma, \boldsymbol{\nu}, \Delta, \eta)$ و A ماتریس یک قطعی $l \times n$ با $(l \leq n)$ باشد. آن گاه

$$[\mathbf{y} = A\mathbf{x}] \sim CST_{l,q}(\boldsymbol{\mu}_y, \Omega_y, \Gamma_y, \boldsymbol{\nu}_y, \Delta_y, \eta_y)$$

۶۰ شیبه سازی توزیع های چوله نرمال بسته و چوله تی بسته

که در آن $\Omega_y = A\Omega A'$, $\mu_y = A\mu$, $\Gamma_y = \Gamma\Omega A'\Omega_y^{-1}$, $\nu_y = \nu$, $\eta_y = \eta$ و $\Delta_y = \Delta + \Gamma\Omega\Gamma' - \Gamma\Omega A'\Sigma_y^{-1}A\Omega\Gamma'$ بنابراین توزیع CST تحت تبدیلات خطی بسته است.

توجه شود که تابع چگالی احتمال حاشیه ای نیز از خانواده توزیع CST خواهد بود. با انتخاب $A = b'_{(i)}$ که در آن $b_{(i)}$ بردار $1 \times n$ با عنصرهای صفر به جز عنصر i ، به طوری $x_i = b'_{(i)}x$ است.

۲. مولفه های توزیع CST متغیرهای تصادفی نامستقل هستند. می دانیم که مولفه های توزیع تی متغیرهای تصادفی نامستقل هستند، از این رو ساخت یک متغیر تصادفی با توزیع CST که شامل اجزای مستقل باشد، امکان پذیر نیست.

۳. متغیرهای تصادفی شرطی مولفه های CST، به متغیرهای تصادفی CST منجر می شود. فرض کنید $x \sim CST_{n,q}(\mu, \Omega, \Gamma, \nu, \Delta, \eta)$ که $x_1 \in R^K$ و $x_2 \in R^{n-K}$ زیربردارهایی از $x = [x'_1, x'_2]'$ هستند، که پارامترها به صورت

$$\mu = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix}, \quad \Sigma = \begin{bmatrix} \Omega_{11} & \Omega_{12} \\ \Omega_{21} & \Omega_{22} \end{bmatrix}, \quad \Gamma = [\Gamma_1, \Gamma_2].$$

تفکیک شده اند. بنابراین

$$[x_1 | x_2] \sim CST_{k,q}(\mu_{1|2}, \Omega_{1|2}, \Gamma_{1|2}, \nu_{1|2}, \Delta_{1|2}, \eta_{1|2}).$$

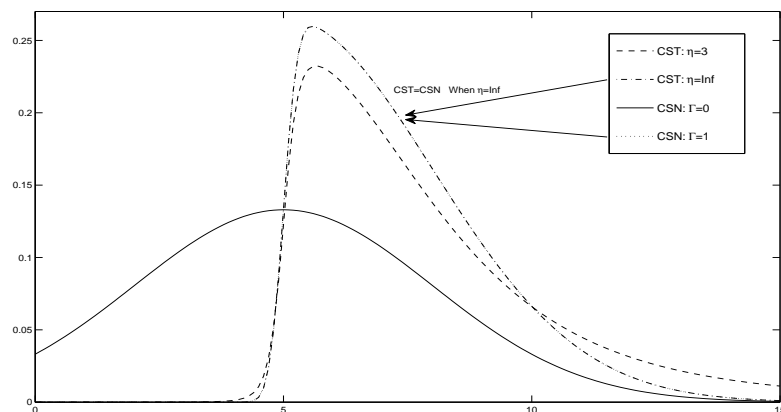
که در آن

$$\kappa(\eta) = \frac{1}{1 + \frac{n-k}{\eta}} \left(1 + \frac{1}{\eta} (x_2 - \mu_2)' \Omega_{11}^{-1} (x_2 - \mu_2) \right).$$

$\Gamma_{1|2} = \Gamma_1$, $\Omega_{1|2} = \kappa(\eta)(\Omega_{11} - \Omega_{12}\Omega_{22}^{-1}\Omega_{21})$, $\mu_{1|2} = \mu_1 + \Omega_{12}\Omega_{22}^{-1}(x_2 - \mu_2)$, $\nu_{1|2} = \nu - (\Gamma_2 + \Gamma_1\Omega_{12}\Omega_{22}^{-1})(x_2 - \mu_2)$, $\eta_{1|2} = \eta$, $\Delta_{1|2} = \kappa(\eta)\Delta$. بنابراین CST تحت تبدیلات خطی و شرطی بسته است.

۱.۷ مقایسه توزیع CSN با توزیع CST

در شکل ۳ تابع چگالی احتمال توزیع CST برای درجه آزادی متفاوت و تابع چگالی احتمال CSN با پارامتر چولگی متفاوت، وقتی $\mu = 5$, $\Sigma = 9$, $\nu = 0$ و



شکل ۳: تابع چگالی احتمال توزیع CST با درجه آزادی متفاوت و تابع چگالی احتمال CSN با پارامتر چولگی متفاوت، با مقادیر پارامتر $\mu = 5, \Sigma = 9, \nu = 0, \Delta = 0.05$

$\Delta = 0.05$ نمایش می‌دهد. مشاهده می‌کنید که توزیع CST دنباله سنگین‌تری نسبت به توزیع CSN می‌سازد. برای $\eta = \infty$ چون هر نوع توزیع CSN را می‌توان با توزیع CST ساخت، پس توزیع CSN زیر رده‌ای از توزیع CST است. چون توزیع CST پارامتر η را نسبت به توزیع CSN بیش‌تر دارد، پس انعطاف‌پذیرتر است. اما برآورد پارامتر η مشکل است، یکی از مشکلات توزیع CST نسبت به توزیع CSN این است که نمی‌توان مولفه‌های نامستقل از توزیع را ساخت.

۸ معکوس CST بیزی

فرض کنید که $x \in R^{n_x}$ متغیر مورد بررسی و شامل مدل خطی $d = Hx$ است، که در آن $d \in R^{n_d}$ داده اندازه‌گیری شده است. توجه کنید که مولفه خطا، e وقتی $n_d < n_x$ نمی‌تواند وجود داشته باشد. از خواص CST می‌دانیم که تعیین بردارهای مستقل Hx و e امکان‌پذیر نیست. بنابراین امکان خطای مستقل از مدل نیست. مدل

۶۲ شیبه سازی توزیع های چوله نرمال بسته و چوله تی بسته

پیشین برای x به صورت

$$x \sim CST_{n_x, q_x}(\mu_x, \Omega_x, \Gamma_x, \nu_x, \Delta_x, \eta).$$

تعریف می شود. فرض کنید که توزیع بردار t به صورت

$$\begin{bmatrix} t \\ r = Ht \\ v \end{bmatrix} \sim T_{n_x + n_d + q_x} \left(\begin{bmatrix} \mu_x \\ H\mu_x \\ -\nu_x \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \Omega_x & \Omega_x H' & \Omega_x \Gamma_x \\ H\Omega_x & H\Omega_x H' & H\Omega_x \Gamma_x' \\ \Gamma_x \Omega_x & \Gamma_x \Omega_x H' & \Delta_x + \Gamma_x \Omega_x \Gamma_x' \end{bmatrix}, \eta \right)$$

باشد که در آن $t \in R^{n_x}$, $v \in R^{q_x}$ است و توزیع شرطی آن ها روی $r \in R^{n_x}$ به صورت

$$\begin{bmatrix} t|r \\ v|r \end{bmatrix} \sim T_{n_x + q_x} \left(\begin{bmatrix} \mu_{t|r} \\ \mu_{v|r} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \Omega_{t|r} & \Gamma_{tv|r} \\ \Gamma_{vt|r} & \Omega_{v|r} \end{bmatrix}, \eta + n_d \right)$$

به دست می آید، که در آن مقدار پارامترها توسط آیورسن و امره (۲۰۱۰) به صورت زیر ارائه شده است:

$$\mu_{t|r} = \mu_x + \Omega_x H' (H\Omega_x H')^{-1} (r - H\mu_x)$$

$$\mu_{v|r} = \nu_x + \Gamma_x \Omega_x H' (H\Omega_x H')^{-1} (r - H\mu_x)$$

$$\Omega_{t|r} = \kappa(\eta + n_d) (\Omega_x - \Omega_x H' (H\Omega_x H')^{-1} H\Omega_x)$$

$$\Omega_{v|r} = \kappa(\eta + n_d) (\Delta_x + \Gamma_x \Omega_x \Gamma_x' - \Gamma_x \Omega_x H' (H\Omega_x H')^{-1} (\Gamma_x \Omega_x H')')$$

$$\Gamma_{v|r} = \kappa(\eta + n_d) (\Gamma_x \Omega_x - \Gamma_x \Omega_x H' (H\Omega_x H')^{-1}).$$

بنابراین از تعریف توزیع CST و قرار دادن $x = [t|v \geq \circ]$, $d = [r|v \geq \circ]$ داریم:

$$[x|d] = [t|r, v \geq \circ] \sim CST_{n_x, q_x}(\mu_{x|d}, \Omega_{x|d}, \Gamma_{x|d}, \nu_{x|d}, \Delta_{x|d}, \eta + n_d + q_x).$$

که در آن

$$\mu_{x|d} = \mu_x + \Omega_x H' (H\Omega_x H')^{-1} (r - H\mu_x)$$

$$\Omega_{x|d} = \kappa(\eta + n_d + q_x) (\Omega_x - \Omega_x H' (H\Omega_x H')^{-1} H\Omega_x)$$

$$\Gamma_{x|d} = \kappa(\eta + n_d + q_x) (\Gamma_x \Omega_x - \Gamma_x \Omega_x H' (H\Omega_x H')^{-1}) \Omega_{x|d}^{-1}$$

$$\nu_{x|d} = \nu_x - \Gamma_x \Omega_x H' (H\Omega_x H')^{-1} (r - H\mu_x)$$

$$\Delta_{x|d} = \kappa(\eta + n_d + q_x) (\Delta_x + \Gamma_x \Omega_x \Gamma_x' - \Gamma_x \Omega_x H' (H\Omega_x H')^{-1} (\Gamma_x \Omega_x H')')$$

$$- \Gamma_{x|d} \Omega_{x|d} \Gamma_{x|d}'.$$

معصومه بخشی شجاعی، امید کریمی ۶۳

وقتی $\eta \rightarrow \infty$ میل می‌کند، می‌توان نشان داد $\kappa(\eta) \rightarrow 1$. بنابراین پارامترهای مدل CST با پارامترهای مدل CSG یکسان می‌شوند. تنها یک پارامتر برای درجه آزادی وجود دارد، به‌خاطر این‌که درجات آزادی مختلف برای حاشیه‌های مختلف امکان‌پذیر نمی‌باشد.

۹ شبیه‌سازی از توزیع CST

الگوریتم ۱ شبیه‌سازی دوگامی از توزیع CST
 ۱. تا زمانی که $v \geq 0$ برقرار شود، تکرار کنید
 $v \sim T_q(-\nu, \Delta + \Gamma\Omega\Gamma)$ تولید نمونه از توزیع
 $x \leftarrow t|v \sim T_n(\mu + \Gamma_{tv}\Omega_n^{-1}(t + \nu), \Omega_t - \Gamma_{tv}\Omega_n^{-1}\Gamma'_{tv})$.
 ۲. مدت زمان اجرای الگوریتم دوگامی برای دو توزیع CSN و توزیع CST با پارامترهای $\mu = 5, \Sigma = 9$ و $\Delta = 0.05$ با درجه آزادی ν و ν های مختلف در جدول ۲ خلاصه شده‌اند. همان‌طور که در جدول ۲ ملاحظه می‌شود، برای درجه آزادی‌های مختلف با $\nu = 0$ زمان

جدول ۲: مدت زمان اجرای الگوریتم‌های دوگامی بر حسب ثانیه

CST	CSN	η	ν
0/090	0/05	1	0
0/093	0/069	3	0
0/090	0/040	10 ⁶	0
0/297	0/278	1	5
0/106	23/732	1	10
0/089	337/670	1	12
0/077	1533/636	1	13
0/093	0/282	3	5
0/094	25/153	3	10
0/105	347/613	3	12
0/098	1556/491	3	13
0/105	0/278	10 ⁶	5
0/099	24/348	10 ⁶	10
0/125	336/313	10 ⁶	12
0/118	1547/194	10 ⁶	13

اجرای الگوریتم دوگامی توزیع CST ثابت است، اما ماکسیمم تغییر زمان اجرای الگوریتم دوگامی توزیع CSN حدود 0/03 است. برای $\eta = 1$ زمان اجرای الگوریتم دوگامی توزیع CST با افزایش مقدار ν کاهش می‌یابد، در حالی‌که ماکسیمم تغییر زمان اجرای الگوریتم

۶۴ شبیه‌سازی توزیع‌های چوله‌نرمال بسته و چوله‌تی بسته

دوگامی توزیع CSN حدود ۱۵۳۳ است. برای ν های مختلف ماکسیمم زمان تغییر اجرای الگوریتم دوگامی توزیع CSN با $\eta = \infty, \eta = 3$ به ترتیب ۵/۰، ۱/۰٪ ثانیه است، در حالی که برای الگوریتم دوگامی توزیع CSN به ترتیب حدود ۱۵۴۷، ۱۵۵۶، ثانیه است.

۱۰ بحث و نتیجه‌گیری

در این مقاله ساختار توزیع چوله‌نرمال بسته و کاربردهای آن بیان گردید و با توجه به مشکلاتی که در تولید نمونه برای محاسبه کمیت‌های مورد نیاز در این توزیع وجود داشت، مخصوصاً زمانی که پارامتر ν مقدار مثبت بزرگ می‌گیرد. سه الگوریتم شبیه‌سازی بیان و بهترین الگوریتم که براساس یک روش تکراری و الگوریتم رد و پذیرش است، مورد مطالعه قرار گرفت. که از نظر زمان محاسباتی از سرعت بالایی برخوردار است. الگوریتم تکراری روی مدل معکوس CSG بیزی اجرا و نتایج مطلوبی از نظر زمان محاسبات حاصل گردید و دیگر نیاز به روش‌های تقریبی برای محاسبه میانه در بعدهای نسبتاً بالا در این مدل نیست. اما با افزایش بعد مشاهده شده است که زمان اجرا سریع‌تر از تابع خطی‌ای از بعد زیاد می‌شود. برای اجتناب از مشکلات برای بعدهای خیلی بزرگ، باید از تقریب برای معکوس Σ^{-1} استفاده کنیم. همچنین ساختار و خواص توزیع CST بیان و نحوه مدل‌بندی برای داده‌های سایسمیک مورد مطالعه قرار گرفت. با توجه به مزیت این توزیع نسبت به توزیع CSN (وجود دم‌های کلفت‌تر)، یکی از مشکلات اصلی عدم وجود یک ساختار مستقل برای مولفه‌های این توزیع است.

تقدیر و تشکر

نویسندگان از پیشنهادهای ارزنده داوران محترم کمال تشکر را دارند.

مراجع

غلامی فشارکی، م.، کاظم‌نژاد، ا. و زایری، ف. (۱۳۹۱)، برآورد بیزی پارامترهای توزیع چوله‌نرمال، مجله علوم آماری، ۶، ۸۳-۹۸.

Allard, D. and Naveau P. (2005), Modeling Skewness in Spatial Data Analysis without Data Transformation, *Quantitative Geology and Geostatistics*, 14,

معصومه بخشی شجاعی، امید کریمی ۶۵

929-937.

Azzalini, A. and Dalla Valle, A. (1996), The Multivariate Skew-Normal Distribution, *Biometrika*, **83**, 715-726.

Buland, A. and Omre, H. (2003), Bayesian Linearized AVO Inversion, *Geophysics*, **68**, 185-198.

Dominguez-Molina, J., Gonzalez-Farias, G., Dominguez-Molina, J. and Gupta, A. (2003), The Multivariate Closed Skew-Normal Distribution, *Technical Report 03-12*, Department of Mathematics and Statistics, Bowling Green State University.

Iversen, H. and Omre, H. (2010), *Close-Skew Distributions*, Norwegian University of Science and Technology.

Karimi, O. and Mohammadzadeh, M. (2011), Bayesian Spatial Prediction for Discrete Closed Skew Gaussian Random Field, *Mathematical Geosciences*, **43**, 565-582.

Karimi, O. and Mohammadzadeh, M. (2012), Bayesian Spatial Regression Models with CSN Correlated Errors and Missing Observations, *Statistical Papers*, **53**, 205-218.

Karimi, O., Omre, H. and Mohammadzadeh, M. (2010), Bayesian Closed-Skew Gaussian Inversion of Seismic AVO Data into Elastic Material Properties, *Geophysics*, **75**, R1-R11.

Robert, C. (1995), Simulation of Truncated Normal Variables, *Statistics and Computing*, **5**, 121-125.