مجله علوم آماری، بهار و تابستان ۱۳۹۵
جلد ۱۰، شماره ۱، ص ۸۱-۹۴
DOI: 10.7508/jss.2016.01.005

تعمیم جدید توزیع وایبول

علی دوستمرادی[1]، محمدرضا زادکرمی[1]، عارف خنجری عیدنک[1]، زهرا فریدونی[2]
[1] گروه آمار، دانشگاه شهید چمران اهواز
[2] گروه ریاضی، دانشگاه یاسوج

تاریخ دریافت: ۱۳۹۲/۳/۲۰ تاریخ آخرین بازنگری: ۱۳۹۴/۷/۲۱

چکیده :در این مقاله توزیعی جدید بر مبنای توزیع وایبول ارائه می‌شود. این توزیع دارای سه پارامتر است که نرخ شکست‌های صعودی، نزولی، وان شکل، تک‌مدی و صعودی نزولی صعودی را شامل می‌شود. سپس خواص توزیع مورد بررسی قرار می‌گیرد آنگاه با استفاده از یک مجموعه داده واقعی ویژگی‌های آن با برخی از تعمیم‌های توزیع وایبول مقایسه می‌شود.

واژه‌های کلیدی : توزیع تعمیم‌یافته وایبول، نرخ شکست، گشتاورها، برآورد ماکسیمم درستنمایی.

۱ مقدمه

توزیع وایبول به علت داشتن نرخ شکست ثابت، نزولی و صعودی نقش مهمی در تحلیل داده‌های طول عمر ایفا می‌کند. با بسط توزیع وایبول، توزیع‌های جدیدی معرفی شده است که نرخ شکست‌های غیر یکنوا را شامل می‌شوند و به عنوان رقیبی برای توزیع‌های دو پارامتری طول عمر رایج مانند وایبول، گاما و لگ‌نرمال محسوب می‌شوند. از جمله این

آدرس الکترونیک مسئول مقاله: علی دوستمرادی، ali.doostmoradi@gmail.com
کد موضوع‌بندی ریاضی (۲۰۱۰): ۶۲F۱۰

تعمیم‌ها می‌توان به توزیع‌هایی با نرخ شکست وان شکل هاپتا و اسکابل (۱۹۹۲)، توزیع‌های جدید بر مبنای وایبول راجارشی و راجارشی (۱۹۸۸)، توزیع وایبول نمایی توسط مادهولکر و همکاران (۱۹۹۶– ۱۹۹۵)، توزیع وایبول تعمیم‌یافته توسط زای و لای (۱۹۹۵)، زای و همکاران (۲۰۰۲)، توزیع وایبول اصلاح‌شده توسط لای و همکاران (۲۰۰۳)، توزیع رایلی تعمیم‌یافته توسط کاندو و راکاب (۲۰۰۵)، توزیع بسط وایبول توسط بیبینگتون و همکاران (۲۰۰۷)، توزیع وایبول اصلاح‌شده سارهان و زیندین (۲۰۰۹)، توزیع تعمیم‌یافته وایبول کاراسکو و همکاران (۲۰۰۸)، توزیع بتا وایبول اصلاح‌شده توسط سیلوا و همکاران (۲۰۱۰) و توزیع تعمیم‌یافته وایبول معکوس توسط فیلیپی و همکاران (۲۰۱۱) اشاره کرد. در میان سایر دانشمندان فام و لای (۲۰۰۷) مرور خوبی بر توزیع‌های وایبول داشتند. در این مقاله به معرفی یک توزیع سه پارامتری جدید بر مبنای توزیع بیبینگتون و همکاران (۲۰۰۷) تحت عنوان تعمیم جدید توزیع وایبول می‌پردازیم و شکل تابع چگالی توزیع جدید علاوه بر نزولی و تک مدی، دو مدی نیز می‌باشد. همچنین با توجه به اینکه توزیع جدید دارای سه پارامتر می‌باشد نرخ شکست‌های متفاوتی را شامل می‌شود. نرخ شکست‌های نزولی، صعودی، وان شکل، تک مدی و صعودی نزولی صعودی که این امربه انعطاف‌پذیری توزیع جدید می‌افزاید. در این مقاله ابتدا، در بخش ۲ به معرفی توزیع جدید، تابع بقا، تابع نرخ شکست، تابع گشتاور مرکزی، برآورد پارامترها به روش ماکسیمم درستنمایی می‌پردازیم، در بخش ۳ با استفاده از یک مثال کاربردی توزیع جدید را با برخی توزیع‌های تعمیم‌یافته وایبول مقایسه می‌کنیم و در بخش ۴ به نتیجه‌گیری خواهیم پرداخت.

۲ تعمیم جدید توزیع وایبول

بیبینگتون و همکاران (۲۰۰۷) تابع توزیع بسط وایبول[1] را به‌صورت

$$F(t) = 1 - e^{-exp(\lambda t - \beta t^{-1})} \qquad , \lambda \geq 0, \beta \geq 0, t > 0$$

ارائه نمودند. تابع چگالی و تابع نرخ شکست این توزیع که با نماد $WE(\lambda, \beta)$ نمایش داده می‌شود به‌صورت

$$\begin{aligned} f(t) &= (\lambda + \beta t^{-2}) e^{\lambda t - \beta t^{-1} - exp(\lambda t - \beta t^{-1})} \qquad t > 0 \\ h(t) &= (\lambda + \beta t^{-2}) e^{\lambda t - \beta t^{-1}} \end{aligned}$$

[1] Weibull Extension distribution

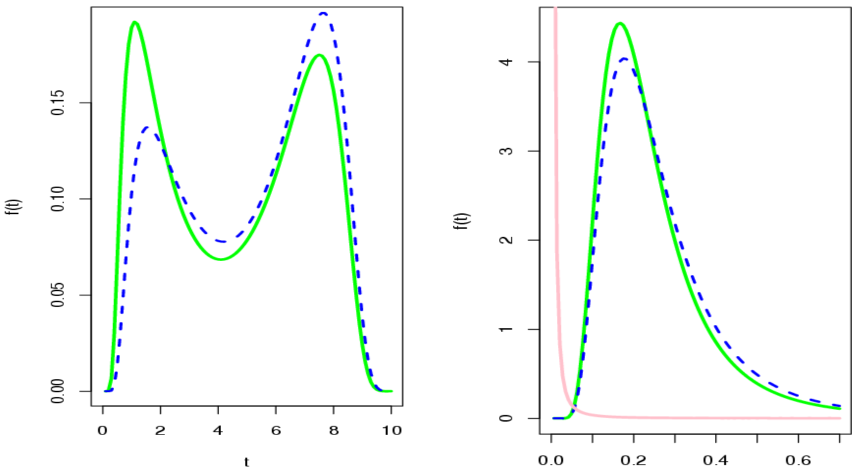
است. شکل تابع چگالی آن نزولی ، تک‌مدی و شکل تابع شکست آن نزولی، صعودی و صعودی نزولی صعودی است. تعمیم جدید توزیع وایبول[۲] $GW(\lambda,\beta,\gamma)$ به‌صورت

$$F(t) = 1 - e^{-exp(\lambda t^{\gamma} - \beta t^{-1})}, \qquad t > 0, \lambda > 0, \beta > 0, \gamma > 0$$

و تابع چگالی آن به‌صورت

$$f(t) = (\lambda\gamma t^{\gamma-1} + \beta t^{-2}) e^{\lambda t^{\gamma} - \beta t^{-1} - exp(\lambda t^{\gamma} - \beta t^{-1})} \qquad t > 0 \qquad (1)$$

است، که در آن λ و β پارامترهای مقیاس و γ پارامتر شکل هستند. با اضافه کردن پارامتر γ شکل هندسی تابع چگالی توزیع جدید علاوه بر نزولی و تک مدی، دومدی نیز می‌شود. همچنین شکل هندسی تابع نرخ شکست آن علاوه بر نزولی، صعودی و صعودی نزولی صعودی، تک‌نما و وان شکل را نیز شامل می‌شود. در شکل ۴ فرم‌های مختلف تابع چگالی را برای مقادیر انتخابی پارامترها رسم شده است.



(ب) (الف)

شکل ۱: تابع چگالی احتمال توزیع GW به ازای مقادیرمختلف پارامترها الف: تابع چگالی نزولی و تک مدی و ب: تابع چگالی دو مدی

$$S(t) = 1 - F_T(t) = e^{-exp(\lambda t^{\gamma} - \beta t^{-1})}, \qquad t > 0$$

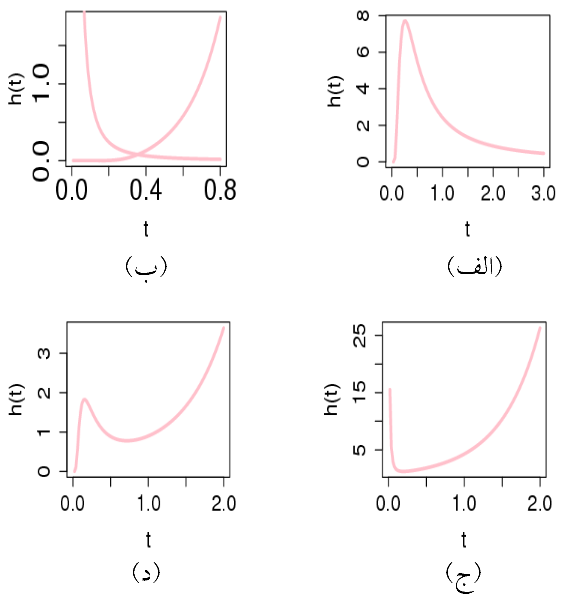
---

۲ Generalization Weibull distribution

$S(t)$ تابع بقا توزیع می‌باشد و تابع نرخ شکست توزیع GW نیز به‌صورت

$$h(t)=\frac{f(t)}{S(t)}=(\lambda\gamma t^{\gamma-1}+\beta t^{-2})e^{\lambda t^{\gamma}-\beta t^{-1}}$$

است. برای رسم نمودار هندسی نرخ شکست تجربی داده‌ها، تبدیل TTT که توسط بارلو و کامپو (۱۹۷۵) معرفی شده است که با تشخیص نرخ شکست داده‌ها به‌صورت تجربی در انتخاب مدلی با نرخ شکست مناسب کاربرد دارد. اگر تغییر شکل تجربی TTT کوژ، کاو، کوژ سپس کاو آنگاه شکل تابع نرخ شکست برای داده به ترتیب نزولی، صعودی، وان شکل، تک مدی و صعودی نزولی صعودی است. شکل ۲ تابع نرخ شکست توزیع GW به ازای مقادیر مشخصی از پارامترهای مختلف را نشان می‌دهد.



شکل ۲: تابع نرخ شکست توزیع GW به ازای مقادیر مختلف پارامترها الف: تابع نرخ شکست نزولی و صعودی، ب: تابع نرخ شکست تک مدی، ج: تابع نرخ شکست صعودی نزولی و د: تابع نرخ شکست وان شکل

۱.۲ تابع گشتاور معمولی

گشتاور مرتبه rام توزیع GW عبارت است از

$$\begin{aligned}\mu'_r &= E(T^r)\\ &= \int_0^\infty t^r f(t;\theta)dt\\ &= \int_0^\infty t^r(\lambda\gamma t^{\gamma-1}+\beta t^{-2})e^{\lambda t^\gamma-\beta t^{-1}-exp(\lambda t^\gamma-\beta t^{-1})}dt \qquad (2)\end{aligned}$$

با جایگذاری عبارت‌های

$$\begin{aligned}e^{-e^{(\lambda t^\gamma-\beta t^{-1})}} &= \sum_{j=0}^\infty \frac{(-1)^j e^{\lambda j t^\gamma - j\beta t^{-1}}}{j!}\\ e^{-(j+1)\beta t^{-1}} &= \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k (j+1)^k \beta^k t^{-k}}{k!}\\ e^{2\lambda t^\gamma (j+1)} &= \sum_{i=0}^\infty \frac{(2\lambda)^i t^{i\gamma}(j+1)^i}{i!}\end{aligned}$$

در رابطه (۲) و با فرض $t^\gamma = x$، $dt = \frac{x^{\frac{1}{\gamma}-1}}{\gamma}dx$ گشتاور مرتبه rام توزیع GW برابر است با

$$\begin{aligned}\mu'_r &= \sum_{j=0}^\infty\sum_{k=0}^\infty\sum_{i=0}^\infty \frac{\beta^k(2\lambda)^i(-j-1)^{k+i}}{i!k!j!}[\lambda\frac{\Gamma(\frac{r+i\gamma-k}{\gamma}+1)}{(\lambda(j+1))^{\frac{r+i\gamma-k}{\gamma}+1}}\\ &+ \frac{\beta}{\gamma}\frac{\Gamma(\frac{\gamma(i-1)+r-k-\gamma-1}{\gamma}+1)}{(\lambda(j+1))^{\frac{\gamma(i-1)+r-k-\gamma-1}{\gamma}+1}}]\end{aligned}$$

امید و واریانس توزیع جدید نیز به‌ترتیب عبارتند از

$$\begin{aligned}E(T)=\mu'_1 &= \sum_{j=0}^\infty\sum_{k=0}^\infty\sum_{i=0}^\infty \frac{\beta^k(2\lambda)^i(-j-1)^{k+i}}{i!k!j!}[\lambda\frac{\Gamma(\frac{1+i\gamma-k}{\gamma}+1)}{(\lambda(j+1))^{\frac{1+i\gamma-k}{\gamma}+1}}\\ &+ \frac{\beta}{\gamma}\frac{\Gamma(\frac{\gamma(i-1)-k-\gamma}{\gamma}+1)}{(\lambda(j+1))^{\frac{\gamma(i-1)-k-\gamma}{\gamma}+1}}]\\ V(T) &= E(T^2)-E^2(T)=\mu'_2-\mu'^2_1.\end{aligned}$$

۲.۲ برآورد ماکسیمم‌درستنمایی

فرض کنید T_i متغیر تصادفی توزیع GW با بردار پارامتر $\theta = (\lambda, \beta, \gamma)^T$ است. براساس نمونه تصادفی $t_۱, \ldots, t_n$ لگاریتم تابع درستنمایی به‌صورت

$$\ell \equiv \ell(\theta) = \sum_{i=۱}^{n} ln(\lambda\gamma t^{\gamma-۱} + \beta t^{-۲}) + \sum_{i=۱}^{n}(\lambda t^{\gamma} - \beta t^{-۱}) - \sum_{i=۱}^{n} exp(\lambda t^{\gamma} - \beta t^{-۱})$$

است که با مشتق‌گیری ازآن بر حسب پارامترها و برابر صفر قرار دادن آن‌ها معادلات

$$\begin{aligned}
\ell_\lambda(\theta) &= \sum_{i=۱}^{n} \frac{\gamma t_i^{\gamma-۱}}{\lambda\gamma t_i^{\gamma-۱} + \beta t_i^{-۲}} - \sum_{i=۱}^{n} t_i^{\gamma} + \sum_{i=۱}^{n} t_i^{\gamma} exp(\lambda t_i^{\gamma} - \beta t_i^{-۱}) = ۰\\
\ell_\beta(\theta) &= \sum_{i=۱}^{n} \frac{t_i^{-۲}}{\lambda\gamma t_i^{\gamma-۱} + \beta t_i^{-۲}} - \sum_{i=۱}^{n} t_i^{-۱} + \sum_{i=۱}^{n} t_i^{-۱} exp(\lambda t_{i_i}^{\gamma} - \beta t_{i_i}^{-۱}) = ۰\\
\ell_\gamma(\theta) &= \sum_{i=۱}^{n} \frac{\lambda\gamma t_i^{\gamma-۱} ln(t_i)}{\lambda\gamma t_{i_i}^{\gamma-۱} + \beta t_{i_i}^{-۲}} + \sum_{i=۱}^{n} t_i^{\gamma} ln(t) - \sum_{i=۱}^{\infty} \lambda t_i^{\gamma} ln(t_i) exp(\lambda t_i^{\gamma} - \beta t_i^{-۱}) = ۰
\end{aligned}$$

حاصل می‌شوند. برآورد ماکسیمم درستنمایی پارامترها از حل این معادلات غیرخطی بدست می‌آیند. اما معادلات این فرم بسته‌ای ندارند و بایستی با روش‌های عددی حل شوند. برای تشکیل بازه‌های اطمینان و انجام آزمون فرض درباره پارامترها نیاز به محاسبه ماتریس اطلاع است. با توجه به اینکه محاسبه ماتریس اطلاع مورد انتظار بسیار پیچیده است و نیازمند محاسبه انتگرال‌ها به روش عددی است می‌توان از ماتریس اطلاع مشاهده شده

$$J(\hat{\theta}) = -\begin{pmatrix} \ell_{\hat{\lambda}\hat{\lambda}} & \ell_{\hat{\lambda}\hat{\beta}} & \ell_{\hat{\lambda}\hat{\gamma}} \\ \ell_{\hat{\beta}\hat{\lambda}} & \ell_{\hat{\beta}\hat{\beta}} & \ell_{\hat{\beta}\hat{\lambda}} \\ \ell_{\hat{\gamma}\hat{\lambda}} & \ell_{\hat{\gamma}\hat{\beta}} & \ell_{\hat{\gamma}\hat{\gamma}} \end{pmatrix}$$

استفاده کرد. عناصراین ماتریس، از دو بار مشتق گرفتن از لگاریتم تابع درستنمایی نسبت به تک تک پارامترها محاسبه می‌شوند. برای نمونه با اندازه بزرگ برآورد ماکسیمم درستنمایی پارامترها، $\hat{\theta} = (\hat{\lambda}, \hat{\beta}, \hat{\gamma})$، تحت شرایط نظم (لهمن و کسلا، ۱۹۹۸) دارای توزیع مجانبی نرمال سه متغیره با میانگین θ و ماتریس -کوواریانس برابر عکس ماتریس اطلاع فیشر $I(\theta)$ است. ماتریس اطلاع فیشر $I(\theta)$ با گرفتن امید ریاضی از ماتریس اطلاع مشاهده شده $J(\theta)$ به‌دست می‌آید. بنابراین

$$\sqrt{n}(\hat{\theta} - \theta) \sim N_۳(۰, I(\theta)^{-۱}).$$

چون ماتریس اطلاع موردنظر بسیار پیچیده و نیازمند حل انتگرال‌ها به روش عددی است می‌توان آن را با $J(\hat{\theta})$ جایگزین کرد (کاراسکو و همکاران ۲۰۰۸). بنابراین توزیع مجانبی

به‌صورت

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}-\theta) \sim N_{۳}(\circ, J(\hat{\theta})^{-۱})$$

است که با استفاده از آن می‌توان بازه اطمینان مجانبی و ناحیه اطمینان را برای تابع بقا، پارامترها و نرخ شکست تعیین کرد. از آزمون نسبت درستنمایی می‌توان برای مقایسه توزیع GW با هر یک از زیر توزیع‌های آن استفاده نمود. در این حالت می‌توان مقدارهای ماکسیمم درستنمایی را تحت محدودیت و غیر محدودیت محاسبه نمود. برای مثال آزمون فرضیه $H_{\circ}: \gamma = ۱$ درمقابل $H_{۱}: \gamma \neq \circ$ معادل با مقایسه توزیع WE با GW است که آماره نسبت درستنمایی آن به‌صورت

$$W = ۲\{\ell(\hat{\lambda}, \hat{\beta}.\hat{\gamma}) - \ell(\tilde{\lambda}, \tilde{\beta}, ۱)\}$$

است. $\hat{\lambda}, \hat{\gamma}, \hat{\beta}$ برآورد ماکسیمم درستنمایی پارامترها تحت فرض $H_{۱}$ و $\tilde{\lambda}, \tilde{\gamma}, \tilde{\beta}$ برآورد ماکسیمم درستنمایی پارامترها تحت فرض $H_{\circ}$ هستند.

۳ مثال کاربردی

موسسه بازآموزی و اصلاح بزه‌کاران کلمبیا در یک ابتکار برای جلوگیری از تکرار جرم، یک تکنیک روشن در مواجه با این مشکل در جامعه استفاده کرده است. این موسسه به تصادف تعدادی مجرم را تحت شرایط، با شرط تکرار نکردن جرم آزاد می‌کند. زمان تکرار به جرم (به روز) ۵۱ مجرم هستند. این داده‌ها توسط استولمیک و هریس (۱۹۷۴) مورد تحلیل قرار گرفتند.

۹۳، ۸۹، ۸۸، ۸۸، ۶۶، ۶۰، ۴۷، ۴۶، ۴۶، ۴۰، ۳۶، ۳۲، ۲۱، ۱۸، ۱۸، ۱۸، ۱۸، ۱۸، ۲۳۳، ۲۲۱، ۲۰۷، ۲۰۴، ۱۹۰، ۱۷۹، ۱۷۷، ۱۶۱، ۱۶۰، ۱۴۷، ۱۲۲، ۱۱۶، ۱۱۲، ۱۰۷، ۹۶، ۳۶۲، ۳۴۳، ۳۳۷، ۳۲۰، ۳۰۷، ۳۰۱، ۲۹۱، ۲۸۳، ۲۷۲، ۲۶۷، ۲۶۴، ۲۴۷، ۲۴۶، ۲۴۰، ۴۲۱، ۳۹۶، ۳۶۷، ۳۶۲

رفتار توزیع معرفی شده را با چند توزیع تعمیم‌یافته بر پایه توزیع وایبول مورد مقایسه قرار می‌دهیم. توابع چگالی این تعمیم‌ها در جدول ۱ ارائه شده‌اند.

با برازش این توزیع‌ها به داده‌ها با استفاده از معیار اطلاع آکائیک[۳] (AIC) و معیار اطلاع بیزی[۴] (BIC) به مقایسه مدل‌های برازش شده به داده‌ها خواهیم پرداخت. معیار اطلاع

[۳] Akaike Information Criterion

[۴] Bysian Information Criterion

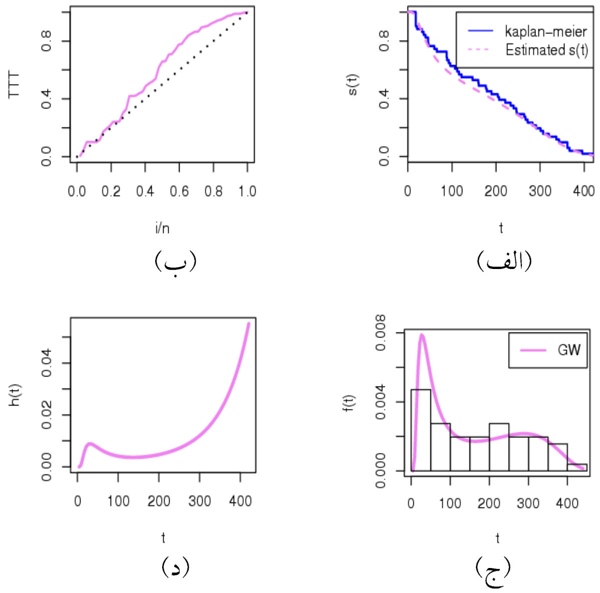
جدول ۱: چند توزیع تعمیم‌یافته بر پایه توزیع وایبول

ردیف	توزیع	تابع چگالی
۱	وایبول نمایی (EW)، مادهولکر و همکاران (۱۹۹۶–۱۹۹۵)	$f(t)=\alpha\beta\gamma t^{\gamma-1}\exp(-\alpha t^{\gamma}\{1-\exp(-\alpha t^{\gamma})\}^{\beta-1}$ $t>\alpha>0, \gamma>0, \beta>0$
۲	تعمیم وایبول اصلاح‌شده (GMW)، کاراسکو وهمکاران (۲۰۰۸)	$\frac{\alpha\beta t^{\gamma-1}(\gamma+\lambda t)\exp(\lambda t-\alpha t^{\gamma}\exp(\lambda t))}{\{1-\exp(-\alpha t^{\gamma}\exp(\lambda t))\}^{1-\beta}}$ $t>0, \alpha>0, \lambda>0, \gamma>0, \beta>0$
	بتا وایبول (BW)، لی و همکاران (۲۰۰۷)	$f(t)=\frac{1}{B(a,b)}G(t)^{a-1}\{1-G(t)\}^{b-1}g(t) t>0, a>0, b>0$ $G(t)=1-\exp(-\alpha t^{\gamma})\alpha>0, \gamma>0, \lambda>0$ $g(t)=\alpha\gamma t^{\gamma-1}\exp(-\alpha t^{\gamma})$
۳	بسط وایبول (WE)، بیبینگتو و همکاران (۲۰۰۶)	$f(t)=(\alpha+\beta t^{-2})e^{\alpha t-\beta t^{-1}-\exp(\alpha t-\beta t^{-1})}$
	بتا وایبول اصلاح‌شده (BWM) سیلوا م همکاران (۲۰۱۰)	$f(t)=\frac{1}{B(a,b)}G(t)^{a-1}\{1-G(t)\}^{b-1}g(t) t>0, a>0, b>0$ $G(t)=1-\exp(-\alpha t^{\gamma}\exp(\lambda t))t>0, \alpha>0 \gamma>0, \lambda>0$ $g(t)=\alpha t^{\gamma-1}(\gamma+\lambda t)\exp(\lambda t-\alpha t^{\gamma}\exp(\lambda t))$
۴	رایلی تعمیم‌یافته (GR)،کاندو و راکاب (۲۰۰۵)	$f(t)=2\alpha\beta t\exp(-\alpha t^{2})\{1-\exp(-\alpha t^{2})\}^{\beta-1}$ $t>0, \alpha>0, \beta>0$
۵	تعمیم‌یافته وایبول معکوس (GIW)، فیلیپی و همکاران (۲۰۱۱)	$f(t)=\alpha\beta\gamma t^{-\lambda-1}\exp(-\alpha\beta t^{-\lambda})$ $t>0, \alpha>0, \lambda>0, \beta>0$
	توزیع وایبول اصلاح‌شده (MW)، لای و همکاران (۲۰۰۳)	$f(t)=\alpha t^{\gamma-1}(\gamma+\lambda t)\exp(\lambda t-\alpha t^{\gamma}\exp(\lambda t))$

آکائیک معیاری برای سنجش نیکویی و برازش است. این معیار نشان می‌دهد که استفاده از یک مدل به چه میزان باعث از دست رفتن اطلاعات می‌شود. به عبارت دیگر این معیار تعادلی بین دقت مدل و پیچیدگی آن برقرارمی‌کند. معیار AIC توسط هیروتسوگو (۱۹۷۴) و معیار BIC توسط شوارتز (۱۹۷۸) برای انتخاب بهترین مدل به‌ترتیب به‌صورت

$$\begin{aligned} AIC &= ۲k - ۲ln(L) \\ BIC &= k\ln(n) - ۲\ln(L) \end{aligned}$$

معرفی می‌شوند، که در آن‌ها k تعداد پارامترهای مدل است n اندازه نمونه و L مقدار ماکسیمم درستنمایی برای مدل برآورد شده است. با توجه به تعاریف فوق مدلی بهتر است که مقدار آکائیک و بیزی کمتری داشته باشد.



شکل ۳: الف: نمودار TTT، ب: منحنی کاپلان مایربقا، ج: برآورد تابع نرخ شکست و د: بافت‌نگار داده‌ها

مقادیر ارائه شده در جدول ۲ برآورد پارامترها و مقادیر داخل پرانتز انحراف معیار برآورد پارامترها هستند که با مینیمم کردن معادلات درستنمائی توسط بسته fminserch درنرم‌افزار MATLAB برآورد شده‌اند. همانطور که ملاحظه می‌شود ملاک‌های AIC و BIC توزیع

جدول ۲: برآورد ماکسیمم درستنمایی پارامترها و ملاک ارزیابی

مدل	$\hat{\alpha}$	$\hat{\gamma}$	$\hat{\lambda}$	$\hat{\beta}$	$\hat{a}$	$\hat{b}$	AIC	BIC
GW	–	۲/۵۳۹۲	۳/۸۲۲$e^{-۷}$	۶۱/۰۵۷	–	–	۶۱۳/۳	۶۱۹/۱
		(۰/۰۲۸۸۱)	(۷/۹۳$e^{-۸}$)	(۷/۹۱۹)				
WE	–	۱	۳/۲۶۲$e^{-۳}$	۶۵/۸۹۴	–	–	۶۲۴/۵	۶۲۸/۳
			(۴/۶۱۸$e^{-۴}$)	(۸/۵۰۰۲)				
BMW	۱۱۲۶$e^{-۹}$	۱۲/۸۴۰۳۰	۰/۰۰۱۹۷	–	۰/۲۸۴۷۶	۰/۴۱۱۳۰	۶۲۶/۲	۶۳۴/۹
	(۱۶/۷۲$e^{-۹}$)	(۰/۲۰۴۳)	(۳/۶$e^{-۳}$)		(۰/۰۲۷۱۴)	(۰/۰۶۷۴۳)		
GMW	۸۸۸$e^{-۷}$	۱/۴۹۶۹	۰/۰۰۳۴۸	۰/۶۴۲۳۸	–	–	۶۲۴/۸	۶۳۲/۶
	(۱/۹۹۶$e^{-۴}$)	(۰/۳۸۹۷)	(۲/۲۹۶۰۳)	۰/۱۷۶۶				
BW	۳/۰۳$e^{-۲۲}$	۸/۴۶۳۳۴	–	–	۰/۱۰۲	۰/۶۶۴۸	۶۲۱/۷	۶۲۹/۲
	(۷۹/۲$e^{-۲۴}$)	(۰/۰۰۶۲۴)						
MW	۰/۰۰۴۶۴	۰/۸۸۷۳۱	۰/۰۰۳۱۰	–	–	–	۶۲۳/۴	۶۲۹/۲
	(۴/۸$e^{-۳}$)	(۰/۲۴۳۰۸)	(۱/۶$e^{-۳}$)					
EW	۲/۶۴$e^{-۲۳}$	۸/۷۶	–	۰/۰۹۹۲۶			۶۱۹/۷	۶۲۶/۶۶
	(۱/۸۹$e^{-۲۲}$)	(۱/۱۹)		(۰/۰۲۰۳)				
GIW	۷/۳۶۶		۸/۸۲۳	۰/۹۷۶۲	–	–	۶۵۰/۵	۶۵۱/۴
	(۰/۱۴۴۴)		(۰/۱۷۲۹)	(۰/۰۱۹۲)				
GR	۱/۴۹۸$e^{-۶}$	۲	–	۰/۶۴۹۶۶	–	–	۶۲۲/۹	۲۶/۸
	(۳/۲۶۱$e^{-۶}$)			(۰/۹۱۱۲)				
W	۰	–	۱/۳۶۶۲	۰/۰۰۰۷۸	–	–	۶۲۶/۶	۶۲۹/۴
			(۰/۱۶۶۶)	(۰/۰۰۰۶۷)				

GW دارای مقادیر کمتر و در نتیجه برازش مناسب‌تری به داده‌ها است. شکل ۳ (الف) نشان می‌دهد که TTT برای مجموعه داده‌ها کوژ است که بیانگر این است تابع نرخ شکست صعودی است. نمودار کاپلان مایر نیز یک روش تجربی برای مقایسه مدل ارائه شده با داده‌ها به صورت تجربی است. شکل ۳ (ب) که منحنی کاپلان مایر بقا و برآورد تابع بقا مدل GW رسم شده است که بیانگر برازش خوب مدل GW به داده‌ها است. با توجه به شکل ۳، (ج) برآورد تابع نرخ شکست ابتدا صعودی سپس در بازه‌ای از زمان سیر نزولی و سپس صعودی می‌باشد. ولی در حالت کلی تابع نرخ شکست صعودی است که بیانگر این است که مجرمان با گذر زمان مجددا مرتکب جرم می‌شوند. شکل ۳، بافت‌نگار داده‌ها را نشان می‌دهد که توزیع GW توزیع مناسب‌تری برای برازش به داده‌ها است که ملاحظه می‌شود نمودار تابع چگالی معرفی شده روی این داده‌ها شکل دومدی دارد. مقادیر ماتریس واریانس کوواریانس برآورد پارامترها برابر است با

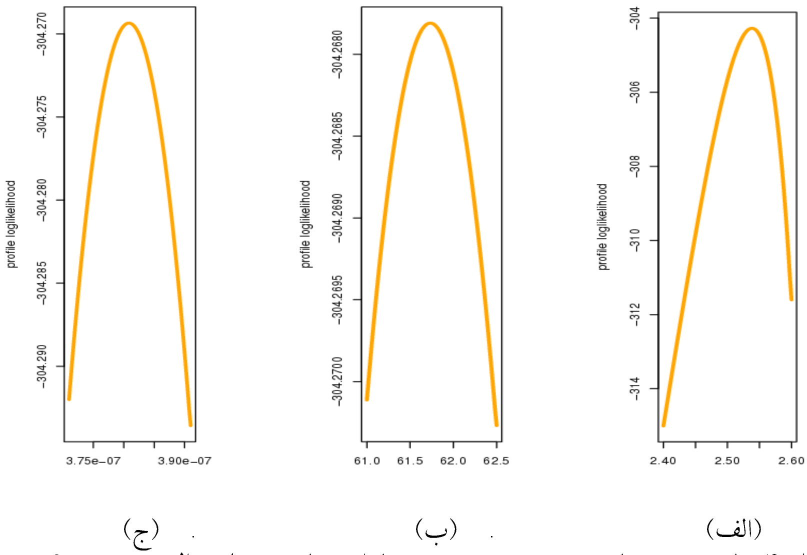
$$I(\theta)^{-۱} = \begin{pmatrix} ۶/۳e^{-۱۵} & -۳/۷۴e^{-۹} & ۲/۷۸e^{-۹} \\ -۳/۷۴e^{-۹} & ۶۲/۷۱ & ۰/۰۱۸۲ \\ ۲/۷۸e^{-۹} & ۰/۰۱۸۲ & ۸/۳e^{-۴} \end{pmatrix}$$

مقدارهای ماکسیمم درستنمایی را تحت محدودیت و غیر محدودیت محاسبه و مقدار آماره LRT را بدست می‌آوریم. برای مثال آزمون فرضیه $H_۰ : \gamma = ۱$ در مقابل $H_۱ : \gamma \neq ۱$ معادل با مقایسه توزیع WE با GW است که مقدار آماره نسبت درستنمایی برابر با $w = ۲\{(-۳۰۳/۶) - (-۳۱۰/۲)\} = ۱۳/۲$ با $p-value < ۰/۰۱$ است. بنابراین توزیع $GW(\lambda, \beta, \gamma)$ تایید می‌شود. برای اینکه نشان دهیم پارامترهای بدست‌آمده در معادلات درستنمایی یکتا هستند تابع درستنمایی نیمرخی[۵] را برحسب پارامترهای γ, β, λ در شکل ۳ رسم شده‌اند. توابع درستنمایی نیمرخی بر حسب پارامترهای مختلف بیانگر این است که برآوردهای به‌دست آمده یکتا هستند.

بحث و نتیجه‌گیری

در این مقاله تعمیم جدیدی از توزیع وایبول (GW) معرفی گردید. تابع چگالی GW علاوه بر نزولی و تک نما، دومدی نیز می‌باشد و شکل هندسی تابع نرخ شکست آن نزولی، صعودی، تک‌نما، وان شکل و صعودی نزولی صعودی می‌باشد که این امر به انعطاف‌پذیری توزیع می‌افزاید. رفتار ریاضی این توزیع که در برگیرنده گشتاور مرکزی، تابع نرخ شکست،

[۵] Porfile log-likelihood



شکل ۴: تابع درستنمایی نیمرخی برحسب پارامترهای مختلف الف: λ ب: β ج: γ

تابع بقا، برآورد پارامترها به روش درستنمایی را محاسبه و کاربرد توزیع پیشنهادی را درقالب یک مثال با برخی توزیع‌های تعمیم‌یافته بر پایه توزیع وایبول مقایسه شد.

تقدیر و تشکر

نویسندگان مقاله از سردبیر محترم مجله علوم آماری و داوران محترم که با راهنمائی‌های خود مقاله را پربار نمودند، کمال تقدیر و تشکر را دارند.

مراجع

Bebbington, M., Lai, C. D. and Zitikis, R. (2007), A Flexible Weibull Extension. *Reliability Engineering and System Safety*, **92**, 719-726

Barlow, R. E. and Campo, R. (1975), Total Time on Test Processes and Applications to Failure Data Analysis. In: Reliability and Fault Tree Analysis, A Life *Society for Industrial and Applied Mathematics*, 451-481.

Carrasco, J. M. F., Ortega, E. M. M. and Cordeiro, G. M. (2008), A Generalized Modified Weibull Distribution for Lifetime Modeling, *Computational Statistics and Data Analysis*, **53**, 450-462.

Felipe, R. S., Edwine, M. M. O. and Cordeiro, M. (2011), The Generalized Inverse Weibull Distribution, *Statistical Paper*, **52**, 591-619.

Haupt, E. and Schable, H. (1992), A New Model for a Lifetime Distribution with Bathtub Shaped Failure Rate, *Microelectronics and Reliability*, **32**, 633-639.

Hirotugu, A. (1974), A New Book at The Statistical Mdel Identification, *IEEE Transecations on Automatic Control*, **19**, 716-723.

Kundu, D. and Rakab, M. Z. (2005), Generalized Rayleigh Distribution: Different Methods of Estimstion, *Computational Statistics and Data Analysis*, **49**, 187-200.

Lai, C. D, Xie, M. and Murthy, D. N. P. (2003), A Modifed Weibull Distribution, *IEEE Transaction on Reliability*, **52**, 33-37.

Lehmann, E. L. and Casella, G. (1998), *Theory of Point Estimation*, 2ndEdn Chpman and Hall New York.

Mudholkar, G.S., Srivastava, D.K. and Kollia, G.D. (1996), A Generalization of the Weibull Distribution with Application to the Analysis of Survival Data, *Journal of American Statistical Association*, **91**, 1575-1583.

Mudholkar, G. S., Srivastava, D. K. and Friemer, M. (1995), The Exponentiated Weibull Family: A Reanalysis of the Bus-Motor-Failure Data, *Tecnometrics*, **37** , 436-445.

Pham, H. and Lai, C. D. (2007), On Recent Generalization of the Weibull Distribution, *IEEE Transaction on Reliability* , **56**,454-458.

Rajarshi, S., Rajarshi, M. B. (1988), Bathtub Distribution: A Review *Communications in Statistics-Theory and Methods*, **17**, 2521-2597.

Sarhan, A. M. and Zaindin, M. (2009), Reliability analysis Using An Additive Weibull Model white Bathtub-Shaped Failure Rate Function Modified Weibull Distribution, *Applied Sciences*, Vol, **11**, 123-136.

Silva, G.O., Edwin, M. M. O. and Gauss, M. C. (2010), The Beta Modified Weibull Distribution, *Lifetime Data Analysis*, **16**, 409-430.

Schwarz, G. (1978), Estimating the Dimension of a Model, *Annals of Statistics*, **6**, 461-464.

Stollmack, S, Harris, C. M. (1974), Failure-Reate Analysis Applied to Recidivism Data, *Operation Research*, **22**, 1192-1205.

Xie, M. and Lai, C.D. (1995), A Modified Weibull Extension with Bathtub Failure Rate Function, *Reliability Engineering and System Safety*, **52**, 87-93.

Xie, M., Tang, Y. and Goh, T.N.(2002), A Modified Weibull Extension with Bathtub Failure Rate Function, *Reliability Engineering and System Safety*, **76**, 279-285.