

مجله علوم آماری، بهار و تابستان ۱۳۹۵

جلد ۱۰، شماره ۱، ص ۱۳۹-۱۵۸

DOI: 10.7508/jss.2016.01.009

توزیع لیندلی-لگاریتمی: مدل و ویژگی‌ها

عیسی محمودی، سمیه ابوالحسینی

گروه آمار، دانشگاه یزد

تاریخ دریافت: ۱۳۹۳/۸/۱۸ تاریخ آخرین بازنگری: ۱۳۹۴/۹/۲۹

چکیده: در این مقاله یک توزیع دو پارامتری جدید به عنوان تعمیمی از توزیع لیندلی، تحت عنوان توزیع لیندلی-لگاریتمی با تابع نرخ شکست صعودی و وانی شکل معرفی می‌شود. توزیع جدید از ترکیب توزیع لیندلی و توزیع لگاریتمی به دست می‌آید. چندین ویژگی از توزیع جدید از جمله تابع چگالی، تابع نرخ شکست، چندک‌ها و گشتاورها محاسبه می‌شود. برآورد ماکسیمم درست‌نمایی با استفاده از الگوریتم EM به دست می‌آید. در نهایت برتری این توزیع نسبت به توزیع لیندلی، با استفاده از دو سری داده واقعی نشان داده می‌شود.

واژه‌های کلیدی: الگوریتم EM، برآوردگر ماکسیمم درست‌نمایی، تابع بقا، تابع نرخ شکست، توزیع لگاریتمی، توزیع لیندلی، شبیه‌سازی مونت-کارلو.

۱ مقدمه

لیندلی (۱۹۵۸) برای اولین بار توزیع لیندلی را برای به‌کارگیری آن در آمار بیز معرفی کرد، سپس خواص، تعمیم‌ها و کاربردهایی از این توزیع در زمینه تحلیل بقا و قابلیت اعتماد توسط قیطانی و همکاران (۲۰۰۸) مورد بررسی قرار گرفت. در طول سالیان اخیر تعمیم‌های بسیار

آدرس الکترونیک مسئول مقاله: عیسی محمودی، emahmoudi@yazd.ac.ir
 کد موضوع‌بندی ریاضی (۲۰۱۰): ۶۲F۱۰، ۶۰E۰۵، ۶۲P۹۹

۱۴۰. توزیع لیندلی-لگاریتمی: مدل و ویژگی‌ها

زیادی از این توزیع معرفی شده است که مهمترین آن‌ها عبارتند از: لیندلی توانی (قیطانی و همکاران، ۲۰۱۳)، لیندلی تعمیم‌یافته (ناداراجا و همکاران، ۲۰۱۱، اصغرزاده و همکاران، ۲۰۱۳، الویده و یانگ، ۲۰۱۴، ذاکرزاده و دولتی، ۲۰۰۹ و ابوامو و همکاران، ۲۰۱۵) و لیندلی توانی تعمیم‌یافته (وارهنا-لیانینگ و پارارای، ۲۰۱۴، پارارای و همکاران، ۲۰۱۵). از جمله مهمترین کاربردهای این توزیع می‌توان به توزیع مدت زمان ارائه خدمت به مشتریان و مدت زمان انتظار در یک سیستم صف تا زمان سرویس دهی اشاره کرد. توزیع لگاریتمی یکی از مهمترین توزیع‌های گسسته آماری است که دارای کاربردهای فراوانی است. این توزیع از بسط مک لورن تابع $-\log(1-\theta)$ به دست می‌آید و دارای تابع جرم احتمال به فرم

$$p(x, \theta) = -\frac{1}{\log(1-\theta)} \frac{\theta^x}{x}, \quad x = 1, \dots, \quad 0 < \theta < 1,$$

است. این توزیع دارای کاربردهای متعددی در زمینه‌های بیمه، تعداد اقلام خریداری شده توسط یک مصرف کننده در یک دوره خاص، تعداد پرندگان یا گیاهان در یک منطقه، تعداد انگل‌ها در هر میزبان است و همچنین در میکروبیولوژی می‌تواند به منظور مدل‌سازی تعداد موجودات زنده در یک کشت به کار گرفته شود. یک سیستم با N مولفه را در نظر بگیرید که در آن تعداد مولفه‌ها (N) یک متغیر تصادفی گسسته با تکیه‌گاه $\{1, 2, \dots\}$ است. طول عمر N امین مولفه، $i = 1, \dots, N$ ، متغیر تصادفی پیوسته X_i است که توزیع آن متعلق به یکی از خانواده‌های توزیع‌های طول مانند: نمایی، وایبول، پارتو، لیندلی و ... است. متغیر تصادفی گسسته N در حالت کلی می‌تواند دارای برخی توزیع‌ها همچون: هندسی (بریده شده در صفر)، پواسن (بریده شده در صفر)، لگاریتمی، دو جمله‌ای (بریده شده در صفر)، دو جمله‌ای منفی و به طور کلی کلاس توزیع‌های سری توانی باشد. اگر مولفه‌ها در سیستم به طور موازی قرار گرفته باشند، طول عمر این سیستم برابر $Y = \max\{X_1, \dots, X_N\}$ و در صورتی که به صورت سری در سیستم قرار گرفته باشند طول عمر سیستم برابر $Y = \min\{X_1, \dots, X_N\}$ است.

در سال‌های اخیر توزیع‌های فراوانی برای مدل‌سازی داده‌های طول عمر با در نظر گرفتن یک سیستم با مولفه‌های سری معرفی شده‌اند، از آن جمله می‌توان به توزیع‌های نمایی-هندسی، نمایی-پواسن، نمایی-لگاریتمی، نمایی-سری توانی، وایبول-هندسی و وایبول-سری توانی، که به ترتیب به وسیله آدامیدیس و لوکاس (۱۹۹۸)، کاس (۲۰۰۷)، طهماسبی و رضایی (۲۰۰۸)، چهکندی و گنجعلی (۲۰۰۹)، بارتو-سوزا و همکاران (۲۰۱۱) و مورایس و بارتو-سوزا (۲۰۱۱) معرفی شده‌اند، اشاره کرد.

عیسی محمودی، سمیه ابوالحسینی ۱۴۱

به تازگی طیف جدیدی از توزیع‌های طول عمر ترکیبی شامل نمایی پواسن توانی، نمایی تعمیم‌یافته-سری توانی، وایبول نمایی شده-پواسن و نرخ شکست نمایی-سری توانی به ترتیب توسط خنجری عیدنک و همکاران (۱۳۹۰)، محمودی و جعفری (۲۰۱۲)، محمودی و سپهدار (۲۰۱۳) و محمودی و جعفری (۲۰۱۵) معرفی شده و مورد تجزیه و تحلیل قرار گرفته است.

با در نظر گرفتن یک سیستم با مولفه‌های سری که متغیر تصادفی N دارای توزیع لگاریتمی و متغیر تصادفی X_i دارای توزیع لیندلی است، ما یک خانواده از توزیع‌ها تحت عنوان لیندلی-لگاریتمی را معرفی می‌کنیم. از مهمترین کاربردهای این توزیع ترکیبی می‌توان به موارد زیر اشاره نمود:

- تعداد مشتریانی که برای خرید مواد غذایی به یک فروشگاه در یک روز مراجعه می‌کنند یک متغیر تصادفی گسسته بوده و دارای توزیع لگاریتمی می‌باشد. مدت زمانی که هر مشتری در صف صندوق تا رسیدن نوبت به وی منتظر می‌ماند از توزیع لیندلی برخوردار است. چنانچه این فروشگاه دارای یک سرویس دهنده بوده و مدیریت این فروشگاه علاقمند به بررسی حداقل مدت زمان انتظار یک فرد در سیستم تا زمان سرویس دهی (تسویه حساب) باشد بایستی متغیر تصادفی $Y = \min\{X_1, \dots, X_N\}$ را مورد توجه قرار دهد.

- در علوم زیستی تعداد انگل‌هایی که در یک دوره زمانی خاص در بدن یک میزبان ایجاد می‌شود دارای توزیع لگاریتمی است. از زمان مصرف دارو، مدت زمانی که طول می‌کشد تا هر انگل به طور کامل از بین برود از توزیع لیندلی پیروی می‌کند. اگر علاقمند به بررسی حداقل زمان لازم برای از بین رفتن انگل‌های این فرد میزبان باشیم استفاده از توزیع لیندلی-لگاریتمی می‌تواند مفید واقع شود.

دلایل اصلی برای معرفی توزیع لیندلی-لگاریتمی به عنوان تعمیمی از توزیع لیندلی به شرح زیر است:

- این توزیع نسبت به توزیع لیندلی از انعطاف بیشتری برخوردار است، از این جهت که تابع نرخ شکست توزیع لیندلی فقط صعودی است اما توزیع جدید علاوه بر آن، حالت وانی شکل را نیز شامل می‌شود. بنابراین اگر با داده‌هایی که تابع نرخ شکست آن‌ها وانی شکل باشد رو به رو شویم توزیع معرفی شده نسبت به توزیع لیندلی به داده‌ها بهتر برازش داده می‌شود.

۱۴۲ توزیع لیندلی-لگاریتمی: مدل و ویژگی‌ها

• این توزیع در حالت خاص توزیع لیندلی را شامل می‌شود بنابراین برای داده‌هایی که توزیع لیندلی برای آن‌ها مناسب است، این توزیع جدید نیز می‌تواند مورد استفاده قرار گیرد.

• این توزیع در بسیاری از زمینه‌ها از جمله: بهداشت عمومی، علوم آماری، مطالعات زیستی، میکروبیولوژی، بیمه و داده‌های مالی، جمعیت‌شناسی، قابلیت اطمینان صنعتی و غیره کاربرد دارد.

بخش ۲ به صورت مختصر به معرفی خانواده توزیع‌های لیندلی-سری توانی می‌پردازد. سپس در بخش ۳ توابع چگالی، توزیع، بقا و نرخ شکست توزیع لیندلی-لگاریتمی ارائه و رفتار توابع چگالی و نرخ شکست بررسی شده است. در بخش ۴ چندک‌ها و گشتاورهای این توزیع بیان می‌شود. در ادامه بخش ۵ به محاسبه توابع عمر باقیمانده و نرخ شکست معکوس اختصاص یافته است. بخش ۶ به برآورد و استنتاج پیرامون توزیع لیندلی-لگاریتمی می‌پردازد. در بخش ۷ نتایج مطالعات شبیه‌سازی بیان شده است. در نهایت، در بخش ۸ برای نشان دادن میزان انعطاف‌پذیری و توانمندی توزیع جدید، از دو سری داده واقعی برای برازش استفاده می‌شود.

۲ خانواده توزیع‌های لیندلی-سری توانی

فرض کنید X_1, \dots, X_N یک نمونه تصادفی از توزیع لیندلی به ترتیب با توابع توزیع و چگالی

$$F(x; \gamma) = 1 - \left(1 + \frac{\gamma x}{\gamma + 1}\right) e^{-\gamma x}, \quad x > 0,$$

$$f(x; \gamma) = \frac{\gamma^2}{\gamma + 1} (1 + x) e^{-\gamma x}, \quad x > 0, \quad \gamma > 0,$$

و N یک متغیر تصادفی گسسته با تابع جرم احتمال

$$P(N = n) = \frac{a_n \theta^n}{C(\theta)}, \quad n = 1, \dots,$$

باشد، لازم به ذکر است که $a_n \geq 0$ فقط به n بستگی دارد؛ هم‌چنین $C(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \theta^n$ و $\theta \in (0, s)$ است. $C(\theta)$ متناهی بوده و مشتق اول، دوم و سوم آن تعریف شده و با $C'(\cdot)$ ، $C''(\cdot)$ و $C'''(\cdot)$ نشان داده می‌شوند.

متغیر تصادفی Y را به صورت $Y = \min\{X_1, \dots, X_N\}$ در نظر بگیرید، در این صورت

عیسی محمودی، سمیه ابوالحسینی ۱۴۳

تابع توزیع تجمعی شرطی $Y|N = n$ به صورت

$$F_{Y|N=n}(y; \gamma) = 1 - \left[\left(1 + \frac{\gamma y}{\gamma + 1} \right) e^{-\gamma y} \right]^n.$$

به دست می آید. کلاس توزیع های لیندلی-سری توانی با نماد $LPS(\theta, \gamma)$ نشان داده می شود و تابع توزیع تجمعی آن به صورت

$$F_Y(y; \theta, \gamma) = 1 - \frac{C(\theta(1 + \frac{\gamma y}{\gamma + 1})e^{-\gamma y})}{C(\theta)}, \quad y > 0. \quad (1)$$

و تابع چگالی احتمال آن به فرم

$$f_Y(y; \theta, \gamma) = \theta \frac{\gamma^2}{\gamma + 1} (1 + y) e^{-\gamma y} \frac{C'(\theta(1 + \frac{\gamma y}{\gamma + 1})e^{-\gamma y})}{C(\theta)}, \quad y > 0. \quad (2)$$

حاصل می شود. این خانواده از توزیع ها برحسب مقادیر مختلف $C(\theta)$ توزیع های مختلفی را شامل می شود. این توزیع ها عبارتند از: لیندلی-هندسی، لیندلی-پواسن (گای و همکاران، ۲۰۱۴)، لیندلی-دوجمله ای و لیندلی-لگاریتمی. در این مقاله توزیع لیندلی-لگاریتمی به عنوان یکی از اعضای خانواده توزیع های لیندلی-سری توانی به طور دقیق با تمام جزئیات آن مورد بررسی قرار می گیرد.

۳ تابع توزیع تجمعی و تابع چگالی احتمال لیندلی-لگاریتمی

با جایگذاری $a_n = \frac{1}{n}$ و $C(\theta) = -\log(1 - \theta)$ در روابط (۱) و (۲)، توزیع لیندلی-لگاریتمی که حالت خاص از کلاس توزیع های لیندلی-سری توانی است، به دست می آید. تابع توزیع تجمعی و تابع چگالی احتمال این توزیع به صورت

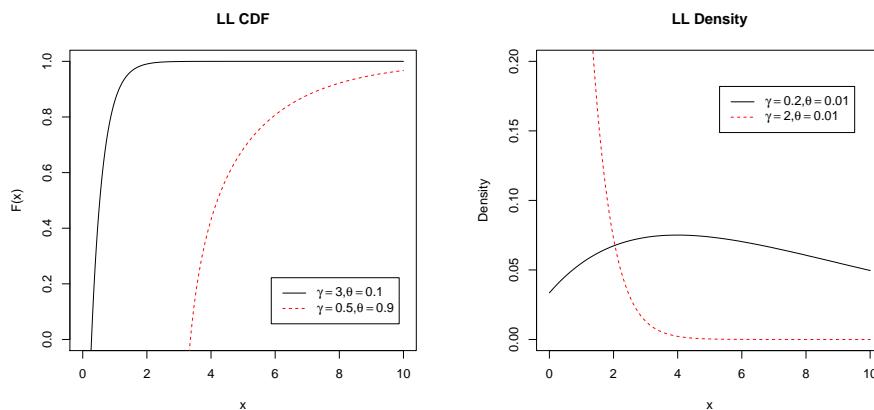
$$F(y; \theta, \gamma) = 1 - \frac{\log(1 - \theta(1 + \frac{\gamma y}{\gamma + 1})e^{-\gamma y})}{\log(1 - \theta)},$$

$$f(y; \theta, \gamma) = \frac{\theta \frac{\gamma^2}{\gamma + 1} e^{-\gamma y} (1 + y)}{(\theta(1 + \frac{\gamma y}{\gamma + 1})e^{-\gamma y} - 1) \log(1 - \theta)}, \quad (3)$$

هستند، که در آن $0 < \theta < 1, \gamma > 0$ است. توابع بقا و نرخ شکست توزیع لیندلی-لگاریتمی به ترتیب عبارتند از:

$$S(y; \theta, \gamma) = \frac{\log(1 - \theta(1 + \frac{\gamma y}{\gamma + 1})e^{-\gamma y})}{\log(1 - \theta)},$$

۱۴۴ توزیع لیندلی-لگاریتمی: مدل و ویژگی‌ها



شکل ۱: تابع چگالی و تابع توزیع لیندلی-لگاریتمی برای مقادیر مختلف θ و γ

$$h(y; \theta, \gamma) = \frac{\theta \frac{\gamma^2}{\gamma+1} e^{-\gamma y} (1+y)}{(\theta(1 + \frac{\gamma y}{\gamma+1}) e^{-\gamma y} - 1) \log(1 - \theta(1 + \frac{\gamma y}{\gamma+1}) e^{-\gamma y})}$$

شکل ۱ نشان‌دهنده نمودارهای توابع چگالی و توابع توزیع لیندلی-لگاریتمی به ازای مقادیر مختلف پارامترهای توزیع است.

قضیه ۱: توزیع لیندلی-لگاریتمی دارای ویژگی‌های زیر است:

الف) اگر $\theta \rightarrow 0$ ، آنگاه توزیع لیندلی-لگاریتمی به توزیع لیندلی با پارامتر γ میل می‌کند.

ب) اگر $\gamma \geq \sqrt{1-\theta}$ ، آنگاه $f(y; \theta, \gamma)$ در y نزولی است.

ج) اگر $0 < \gamma < \sqrt{1-\theta}$ ، آنگاه $f(y; \theta, \gamma)$ یک تابع چگالی تک مدی با مدی برابر y_0 است که از حل معادله $\gamma(y+1) + (A-1) - A \frac{\gamma(y+1)}{\gamma(y+1)+1} = 0$ حاصل می‌شود.

برهان الف) اگر θ به صفر میل کند، داریم:

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} f(y; \theta, \gamma) = \frac{\gamma^2}{\gamma+1} e^{-\gamma y} (1+y),$$

که تابع چگالی توزیع لیندلی است.

عیسی محمودی، سمیه ابوالحسینی ۱۴۵

ب) با توجه به رابطه (۳)، $f(0) = \frac{\theta \frac{\gamma^2}{\gamma+1}}{(\theta-1)\log(1-\theta)}$ و $f(\infty) = 0$. چون

$$\frac{d \log f(y; \theta, \gamma)}{dy} = \frac{\gamma(y+1) + (A-1) - A \frac{\gamma(y+1)}{\gamma(y+1)+1}}{(1+y)(\theta(1 + \frac{\gamma y}{\gamma+1})e^{-\gamma y} - 1)}$$

فرض کنید $s(y) = \gamma(y+1) + (A-1) - A \frac{\gamma(y+1)}{\gamma(y+1)+1}$ ، آنگاه

$$s(0) = \frac{(\gamma+\theta-1)(\gamma+1)-\theta\gamma}{\gamma+1}, s(\infty) = \infty \text{ و } s'(y) > 0 \text{ است.}$$

اگر $\gamma \geq \sqrt{1-\theta}$ ، آنگاه $s(y) \geq 0$ و $\frac{d \log f(y; \theta, \gamma)}{dy} \leq 0$ ، یعنی $f(y; \theta, \gamma)$ در y نزولی است.

ج) اگر $0 < \gamma < \sqrt{1-\theta}$ ، آنگاه $f(y; \theta, \gamma)$ یک تابع تک مدی با مدی برابر y_0 است،

که y_0 از حل معادله $\gamma(y+1) + (A-1) - A \frac{\gamma(y+1)}{\gamma(y+1)+1} = 0$ ، با در نظر گرفتن

$$A = \theta(1 + \frac{\gamma y}{\gamma+1})e^{-\gamma y}$$

قضیه ۲: تابع نرخ شکست توزیع لیندلی-لگاریتمی دارای ویژگی‌های زیر است:

الف) اگر $(\theta-1)(\gamma-1) > (\frac{\theta\gamma^2}{\gamma+1})$ ، آنگاه تابع نرخ شکست صعودی است.

ب) اگر $(\theta-1)(\gamma-1) < (\frac{\theta\gamma^2}{\gamma+1})$ ، آنگاه تابع نرخ شکست وانی شکل است.

برهان به منظور بررسی رفتار تابع نرخ شکست از قضیه‌ی مشهور گلاسر (۱۹۸۰) استفاده

شده است. از این رو در ادامه، ابتدا این قضیه بررسی می‌شود. در تمام قسمت‌های زیر

$\eta(t) = -\frac{f'(t)}{f(t)}$ و $g(t) = \frac{1}{h(t)}$ است، که $h(t)$ تابع نرخ شکست می‌باشد. با توجه به

توضیحات فوق، قضیه گلاسر به صورت زیر بیان می‌شود:

قضیه ۳ (قضیه گلاسر):

الف) اگر به‌ازای همه‌ی مقادیر $t > 0$ ، $\eta'(t) > 0$ ، آنگاه تابع نرخ شکست تابعی صعودی

است.

ب) اگر به‌ازای همه‌ی مقادیر $t < 0$ ، $\eta'(t) < 0$ ، آنگاه تابع نرخ شکست تابعی نزولی است.

ج) فرض کنید یک مقدار $t_0 > 0$ وجود دارد، به طوری که به‌ازای همه‌ی مقادیر $t \in (0, t_0)$

$\eta'(t) < 0$ و $\eta'(t_0) = 0$ و به‌ازای همه‌ی مقادیر $t > t_0$ ، $\eta'(t) > 0$ ، آنگاه تابع نرخ

شکست وانی شکل است، به طوری که $g'(y_0) = 0$ باشد و در غیر این صورت تابع نرخ

شکست صعودی است.

د) فرض کنید یک مقدار $t_0 > 0$ وجود دارد، به طوری که به‌ازای همه‌ی مقادیر $t \in (0, t_0)$

$\eta'(t) > 0$ ، $\eta'(t_0) = 0$ و به‌ازای همه‌ی مقادیر $t > t_0$ ، $\eta'(t) < 0$ ، آنگاه تابع نرخ شکست

تک مدی است، اگر $y_0 > 0$ وجود داشته باشد، به طوری که $g'(y_0) = 0$ باشد و در غیر این

صورت تابع نرخ شکست نزولی است.

۱۴۶ توزیع لیندلی-لگاریتمی: مدل و ویژگی‌ها

(اثبات قضیه ۲): با توجه به فرم تابع نرخ شکست لیندلی-لگاریتمی داریم:

$$h(o) = \frac{\theta \frac{\gamma^2}{\gamma+1}}{(\theta-1) \log(1-\theta)}.$$

بدین منظور تابع $\eta(y) = -\frac{d}{dy} \log f(y) = -\frac{f'(y)}{f(y)}$ را تعریف می‌کنیم، خواهیم داشت:

$$\eta(y) = -\frac{(1-\gamma(1+y))(\theta(1+\frac{\gamma y}{\gamma+1})e^{-\gamma y}-1)}{(\theta(1+\frac{\gamma y}{\gamma+1})e^{-\gamma y}-1)(1+y)} - \frac{\theta \frac{\gamma^2}{\gamma+1} e^{-\gamma y} (1+y)^2}{(\theta(1+\frac{\gamma y}{\gamma+1})e^{-\gamma y}-1)(1+y)^2}$$

و مشتق اول آن به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} \eta'(y) = & \frac{[\gamma(A-1) + \theta \frac{\gamma^2}{\gamma+1} e^{-\gamma y} (1+y)(1-\gamma(1+y))]}{((A-1)(1+y))^2} \\ & \times \frac{(A-1)(1+y)}{((A-1)(1+y))^2} \\ & + \frac{[(A-1) - \theta \frac{\gamma^2}{\gamma+1} e^{-\gamma y} (1+y)^2](1-\gamma(1+y))(A-1)}{((A-1)(1+y))^2} \\ & + \frac{\theta \frac{\gamma^2}{\gamma+1} e^{-\gamma y} (1+y)^2 [(\gamma(1+y) - 2)(A-1)\gamma + 1 e^{-\gamma y} (1+y)^2]}{((A-1)(1+y))^2} \\ & + \frac{(A-1) - \theta \frac{\gamma^2}{\gamma+1} e^{-\gamma y} (1+y)^2}{((A-1)(1+y))^2}. \end{aligned}$$

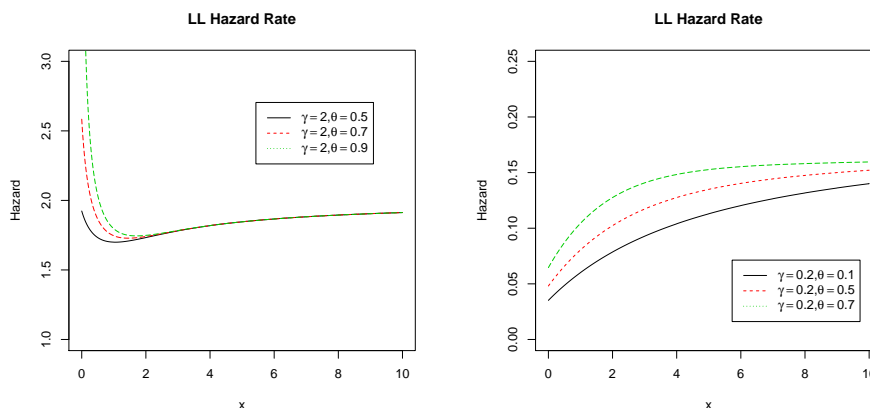
صورت $\eta'(y)$ را برابر $t(y)$ قرار می‌دهیم، بنابراین داریم:

$$\begin{aligned} t(y) = & [\gamma(A-1) + \theta \frac{\gamma^2}{\gamma+1} e^{-\gamma y} (1+y)(1-\gamma(1+y))](A-1)(1+y) \\ & + [(A-1) - \theta \frac{\gamma^2}{\gamma+1} e^{-\gamma y} (1+y)^2](1-\gamma(1+y))(A-1) \\ & + \theta \frac{\gamma^2}{\gamma+1} e^{-\gamma y} (1+y)^2 [(\gamma(1+y) - 2)(A-1) \\ & + (A-1) - \theta \frac{\gamma^2}{\gamma+1} e^{-\gamma y} (1+y)^2], \end{aligned}$$

در این صورت

$$t(\infty) = \infty \text{ و } t(o) = (\theta-1)^2 + \theta \frac{\gamma^2}{\gamma+1} (\theta-1)(\gamma-1) - (\theta \frac{\gamma^2}{\gamma+1})^2$$

چون مخرج $\eta'(y)$ مقداری مثبت است پس علامت $\eta'(y)$ همان علامت $t(y)$ است.



شکل ۲: تابع نرخ شکست توزیع لیندلی-لگاریتمی برای مقادیر مختلف θ و γ

اگر $t(y) = 0$ ، در این صورت $\eta'(y) = 0$ است. ویژگی‌های عنوان شده از قضیه گلاسر پیروی می‌کند.

شکل ۲، نشان‌دهنده تابع نرخ شکست به ازای مقادیر مختلف پارامتر است.

۴ چندک‌ها و گشتاورهای توزیع لیندلی-لگاریتمی

چندک k ام توزیع لیندلی-لگاریتمی از حل معادله

$$(1 - \xi) \log(1 - \theta) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-\theta(1 + \frac{\gamma x \xi}{\gamma + 1})e^{-\gamma x \xi})^j}{j}$$

به دست می‌آید، که برای تولید یک نمونه تصادفی از توزیع لیندلی-لگاریتمی کاربرد دارد.

تابع مولد گشتاور و گشتاور k ام حول صفر برای این توزیع به ترتیب عبارتند از:

$$M_Y(t) = \frac{-\theta^n}{\log(1 - \theta)} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} \frac{\gamma^{n-i+\tau}}{(\gamma+1)^{n-i+1}} \left[\frac{\Gamma(n-i)}{(n\gamma-t)^{n-i}} + \frac{\Gamma(n-i+1)}{(n\gamma-t)^{n-i+1}} \right],$$

و

$$E[Y^k] = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} \frac{-\theta^n \gamma^{i+\tau}}{(\gamma+1)^{i+1} \log(1 - \theta)} \quad (۴)$$

۱۴۸ توزیع لیندلی-لگاریتمی: مدل و ویژگی ها

$$\times \left[\frac{\Gamma(k+i+2)}{(n\gamma)^{k+i+2}} + \frac{\Gamma(k+i+1)}{(n\gamma)^{k+i+1}} \right].$$

با استفاده از (۵)، میانگین توزیع لیندلی-لگاریتمی به صورت

$$E[Y] = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} \frac{-\theta^n \gamma^{i+2}}{(\gamma+1)^{i+1} \log(1-\theta)} \left[\frac{\Gamma(i+2)}{(n\gamma)^{i+2}} + \frac{\Gamma(i+1)}{(n\gamma)^{i+1}} \right].$$

حاصل می‌شود، که ملاحظه می‌شود امید ریاضی و واریانس توزیع لیندلی-لگاریتمی فاقد یک فرم بسته است، بنابراین به نظر می‌رسد مقادیر امید ریاضی و واریانس برای این توزیع قابل دستیابی نیستند، اما در جدول ۱ نشان داده می‌شود علی‌رغم نامتناهی بودن سری‌ها، می‌توان با استفاده از روش‌های عددی به ازای مقادیر مختلف γ و θ ، امید ریاضی، واریانس، چولگی و کشیدگی را برای این توزیع محاسبه نمود.

جدول ۱: مقادیر امید ریاضی، واریانس، چولگی و کشیدگی توزیع لیندلی-لگاریتمی

برای مقادیر مختلف θ و γ

کشیدگی	چولگی	واریانس	امید ریاضی	(θ, γ)
۶/۱۴۶۱	۱/۴۵۰۸	۱۹۵/۲۷۲۱	۱۸/۷۰۰۴۲	(۰/۱, ۰/۱)
۶/۸۶۳۸	۱/۶۱۰۷	۱۷۵/۵۳۲۱	۱۶/۶۴۳۰	(۰/۵, ۰/۱)
۹/۱۲۰۱	۲/۰۴۷۴	۱۳۵/۷۰۳۹	۱۲/۰۸۰۹	(۰/۹, ۰/۱)
۶/۷۷۴۰	۱/۶۱۳۱	۲/۷۵۵۱	۱/۸۹۸۸	(۰/۱, ۰/۸)
۷/۶۹۰۵	۱/۷۹۹۹	۲/۴۴۳۴	۱/۶۶۰۳	(۰/۵, ۰/۸)
۷/۶۵۸۰	۱/۷۹۲۶	۰/۳۷۹۶	۰/۶۵۰۰	(۰/۱, ۲)
۱۲/۶۰۱۸	۲/۵۸۷۷	۰/۲۳۹۹	۰/۳۸۳۱	(۰/۹, ۲)
۸/۰۹۲۹	۱/۸۶۸۹	۰/۱۵۵۸	۰/۴۰۶۱	(۰/۱, ۳)
۱۳/۴۵۰۰	۲/۶۹۰۹	۰/۰۹۷۱	۰/۲۳۷۷	(۰/۹, ۳)

۵ تابع عمر مانده و نرخ شکست و ارون

گشتاور مرتبه r تابع عمر مانده توزیع لیندلی-لگاریتمی به صورت

$$m_r(t) = E[(Y-t)^r | Y > t] = \frac{1}{S(t)} \int_t^{\infty} (y-t)^r f(y) dy$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{S(t)} \frac{1}{\log(1-\theta)} \sum_{i=0}^r \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^j \binom{r}{i} \binom{j}{k} (-1)^{r-i-1} t^{r-i-\theta^{j+1}} \\
 &\quad \times \frac{\gamma^{k+2}}{(\gamma+1)^{k+1}} \frac{\Gamma(j+1)}{j!} \left[\left(\frac{1}{\gamma(j+1)} \right)^{i+k+1} \Gamma(i+k+1; \gamma(j+1)t) \right. \\
 &\quad \left. + \left(\frac{1}{\gamma(j+1)} \right)^{i+k+2} \Gamma(i+k+2; \gamma(j+1)t) \right], \quad (5)
 \end{aligned}$$

به دست می آید. تابع عمر مانده (MRL) توزیع لیندلی-لگاریتمی با قرار دادن $r = 1$ در رابطه (5) به صورت

$$\begin{aligned}
 m_1(t) &= \frac{1}{S(t)} \frac{1}{\log(1-\theta)} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^j \binom{j}{k} \theta^{j+1} \frac{\gamma^{k+2}}{(\gamma+1)^{k+1}} \frac{\Gamma(j+1)}{j!} \\
 &\quad \times [(t-1) \left(\frac{1}{\gamma(j+1)} \right)^{k+2} \Gamma(k+2; \gamma(j+1)t) \\
 &\quad + t \left(\frac{1}{\gamma(j+1)} \right)^{k+1} \Gamma(k+1; \gamma(j+1)t) \\
 &\quad - \left(\frac{1}{\gamma(j+1)} \right)^{k+2} \Gamma(k+2; \gamma(j+1)t)].
 \end{aligned}$$

محاسبه می شود. همچنین به ازای $r = 2$ داریم:

$$\begin{aligned}
 m_2(t) &= \frac{1}{S(t)} \left\{ \frac{1}{\log(1-\theta)} \left[\sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^j \binom{j}{k} t \theta^{j+1} \frac{\gamma^{k+2}}{(\gamma+1)^{k+1}} \frac{\Gamma(j+1)}{j!} \right. \right. \\
 &\quad \times \left(\left(\frac{1}{\gamma(j+1)} \right)^{k+1} \Gamma(k+1; \gamma(j+1)t) \left(\frac{1}{\gamma(j+1)} \right)^{k+2} \Gamma(k+2; \gamma(j+1)t) \right. \\
 &\quad \left. \left. - 2 \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^j \binom{j}{k} \theta^{j+1} \frac{\gamma^{k+2}}{(\gamma+1)^{k+1}} \frac{\Gamma(j+1)}{j!} \left(\frac{1}{\gamma(j+1)} \right)^{k+2} \right. \right. \\
 &\quad \times \Gamma(k+2; \gamma(j+1)t) \left(\frac{1}{\gamma(j+1)} \right)^{k+2} \Gamma(k+3; \gamma(j+1)t) \\
 &\quad \left. \left. + \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^j \binom{j}{k} t^{-1} \theta^{j+1} \frac{\gamma^{k+2}}{(\gamma+1)^{k+1}} \frac{\Gamma(j+1)}{j!} \left(\frac{1}{\gamma(j+1)} \right)^{k+2} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. \times \Gamma(k+3; \gamma(j+1)t) \left(\frac{1}{\gamma(j+1)} \right)^{k+4} \Gamma(k+4; \gamma(j+1)t) \right] \right\}.
 \end{aligned}$$

واریانس تابع عمر مانده برای این توزیع با استفاده از $m_1(t)$ و $m_2(t)$ به راحتی محاسبه می گردد. تابع عمر مانده وارون توزیع لیندلی-لگاریتمی به صورت

$$r(y; \theta, \gamma) = \frac{f(y; \theta, \gamma)}{F(y; \theta, \gamma)}$$

۱۵۰..... توزیع لیندلی-لگاریتمی: مدل و ویژگی ها

$$= \frac{\theta \frac{\gamma^r}{\gamma+1} e^{-\gamma y} (1+y)}{(\theta(1 + \frac{\gamma y}{\gamma+1})e^{-\gamma y} - 1)(\log(1-\theta) - \log(1 - \theta(1 + \frac{\gamma y}{\gamma+1})e^{-\gamma y}))}$$

حاصل می شود. گشتاور r ام تابع عمر مانده وارون برای توزیع لیندلی-لگاریتمی به صورت

$$\begin{aligned} \mu_r(t) &= E[(t-Y)^r | Y \leq t] = \frac{1}{F(t)} \int_0^t (t-y)^r f(y) dy \\ &= \frac{1}{F(t)} \frac{1}{\log(1-\theta)} \sum_{i=0}^r \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^j (-1)^{r-i-1} \binom{r}{i} \binom{j}{k} t^i \\ &\times \frac{\gamma^{j+2}}{(\gamma+1)^{j+1}} \frac{\Gamma(j+1)}{j!} \theta^{j+1} [(\frac{1}{\gamma(1+j)})^{r+j-i+1} \\ &\times \gamma(r+j-i+1; \gamma(j+1)t) + (\frac{1}{\gamma(1+j)})^{r+j-i+2} \\ &\times \gamma(r+j-i+2; \gamma(j+1)t)], \end{aligned}$$

به دست می آید، که در آن تابع گامای ناقص بالایی به فرم

$$\gamma(s; t) = \int_0^t x^{s-1} e^{-x} dx,$$

است. میانگین و گشتاور دوم تابع عمر مانده وارون توزیع لیندلی-لگاریتمی به ترتیب با قرار دادن $r = 1$ و $r = 2$ در $\mu_r(t)$ حاصل می شوند. هم چنین به کمک $\mu_1(t)$ و $\mu_2(t)$ می توان به واریانس تابع عمر مانده وارون توزیع دست یافت.

۶ برآورد پارامترها

در این بخش در رابطه با برآورد پارامترهای توزیع لیندلی-لگاریتمی بحث می شود. فرض کنید Y_1, Y_2, \dots, Y_n یک نمونه ی تصادفی با مقادیر مشاهده شده y_1, y_2, \dots, y_n از توزیع لیندلی-لگاریتمی با پارامترهای θ و γ بوده، هم چنین $\Theta = (\theta, \gamma)^T$ بردار پارامترها باشد. تابع لگاریتم درستنمایی برای این توزیع عبارت است از:

$$\begin{aligned} \ell \equiv \ell(y; \Theta) &= n \log \theta + n \log \left(\frac{\gamma^2}{\gamma+1} \right) - \gamma \sum_{i=1}^n y_i + \sum_{i=1}^n \log(1+y_i) \\ &- \sum_{i=1}^n \log \left(\theta \left(1 + \frac{\gamma y_i}{\gamma+1} \right) e^{-\gamma y_i} - 1 \right) - n \log(\log(1-\theta)). \end{aligned}$$

تابع امتیاز مرتبط از عبارت $U_c(y, \Theta) = (\partial \ell / \partial \theta, \partial \ell / \partial \gamma)^T$ به دست می آید، که مولفه های آن

عبارتند از:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \ell}{\partial \theta} &= \frac{n}{\theta} - \sum_{i=1}^n \frac{(1 + \frac{\gamma y_i}{\gamma+1})e^{-\gamma y_i}}{(\theta(1 + \frac{\gamma y_i}{\gamma+1})e^{-\gamma y_i} - 1)} + \frac{n}{(1-\theta)(\log(1-\theta))}, \\ \frac{\partial \ell}{\partial \gamma} &= n \frac{(\gamma+2)}{\gamma(\gamma+1)} - \sum_{i=1}^n y_i \\ &\quad + \sum_{i=1}^n \frac{\gamma \theta y(\gamma + \gamma y + y + 2)}{(\gamma+1)(\theta + \gamma \theta(y+1) + (\gamma+1)(-e^{\gamma y}))}. \quad (6)\end{aligned}$$

برآورد ماکسیمم درست‌نمایی پارامترهای θ و γ ، از حل دستگاه معادلات غیرخطی $U_c(y, \theta) = 0$ به دست می‌آید. این دستگاه غیرخطی برای معادلات دارای فرم بسته نیست و باید به روش‌های عددی نظیر الگوریتم نیوتن-رافسون حل شود. برای این منظور عناصر ماتریس اطلاع مشاهدات عبارتند از:

$$\begin{aligned}I_{11} &= \frac{n}{\theta^2} - \sum_{i=1}^n \frac{(\gamma + \gamma y + 1)^2}{((\gamma+1)(-e^{\gamma y}) + \theta + \gamma \theta(y+1))^2} - \frac{n \log(1-\theta) + n}{((1-\theta)(\log(1-\theta)))^2}, \\ I_{12} &= \sum_{i=1}^n \frac{\gamma y e^{\gamma y} (\gamma + \gamma y + y + 2)}{((\gamma+1)e^{\gamma y} - \theta(\gamma + \gamma y + 1))^2}, \\ I_{22} &= 2n \left(\frac{1}{(\gamma+1)^2} - \frac{1}{\gamma^2} \right) \\ &\quad - \sum_{i=1}^n \frac{\theta y (\theta(2\gamma(y+1) + y + 2))}{(\gamma+1)^2 (\theta + \gamma \theta(y+1) + (\gamma+1)(-e^{\gamma y}))^2} \\ &\quad + \sum_{i=1}^n \frac{(\gamma+1)e^{\gamma y} ((\gamma+1)y(\gamma + \gamma y + y + 2) - 1) - 2}{(\gamma+1)^2 (\theta + \gamma \theta(y+1) + (\gamma+1)(-e^{\gamma y}))^2}.\end{aligned}$$

۱.۶ الگوریتم EM

الگوریتم EM (امید ریاضی-ماکسیمم سازی) به منظور برآورد ماکسیمم درست‌نمایی در مسایل داده ناقص بکار می‌رود. در هر تکرار الگوریتم EM دو گام وجود دارد: گام E یا مرحله امیدگیری و گام M یا مرحله ماکسیمم‌سازی. الگوریتم EM را همچنین می‌توان در مسایل مربوط به داده‌های گمشده، توزیع‌های بریده شده و مشاهدات سانسور شده بکار گرفت. یکی از مهمترین مشکلات برآوردهای ماکسیمم درست‌نمایی به روش مستقیم عدم تضمین همگرایی روش‌های عددی (نیوتن-رافسون، امتیاز فیشر و ...) است در صورتی که الگوریتم EM

۱۵۲ توزیع لیندلی-لگاریتمی: مدل و ویژگی‌ها

تضمین کافی برای همگرایی روش حتی با شروع از مقادیر اولیه متفاوت را به همراه دارد. برای استفاده الگوریتم EM ابتدا به تابع چگالی احتمال داده‌های کامل نیاز است که به صورت

$$g(y, z; \Theta) = f(y|z)f(z) = -\frac{\gamma^2}{\gamma+1}(1+y)e^{-z\gamma y} \times \left(1 + \frac{\gamma y}{\gamma+1}\right)^{z-1} \frac{\theta^z}{\log(1-\theta)},$$

تعریف می‌شود، به طوری که $0 < \theta < 1$ ، $0 < \gamma < \infty$ و $z \in N$ است. از آن جایی که در مرحله اول الگوریتم EM به محاسبه امید ریاضی $(Z|Y; \Theta^{(r)})$ نیاز هست، تابع چگالی احتمال Z به شرط $Y = y$ به صورت

$$g_{Z|Y=y}(z|y) = (1-\theta)\left(1 + \frac{\gamma y}{\gamma+1}\right)e^{-\gamma y} (\theta e^{-\gamma y}\left(1 + \frac{\gamma y}{\gamma+1}\right))^{z-1}.$$

محاسبه می‌شود. هم‌چنین مقدار امید ریاضی $Z|Y = y$ برابر است با

$$E[Z|Y = y] = \frac{1}{1 - \theta e^{-\gamma y}\left(1 + \frac{\gamma y}{\gamma+1}\right)}.$$

پس از جایگذاری این امید ریاضی به جای Z هادر تابع لگاریتم درست‌نمایی کامل مرحله ماکسیمم‌سازی این تابع با استفاده از روش‌های عددی صورت می‌گیرد. لگاریتم تابع درست‌نمایی برای داده‌های کامل به صورت

$$\ell^*(y_1, \dots, y_n; z_1, \dots, z_n; \Theta) \propto n \log\left(\frac{\gamma^2}{\gamma+1}\right) - \sum_{i=1}^n z_i \gamma y_i + \sum_{i=1}^n (z_i - 1) \log\left(1 + \frac{\gamma y_i}{\gamma+1}\right) + \sum_{i=1}^n z_i \log(\theta) - n \log(-\log(1-\theta)),$$

است. با مشتق‌گیری از این عبارت نسبت به θ و γ ، مولفه‌های تابع امتیاز $U_c^*(\mathbf{y}, \Theta) = (\partial \ell^* / \partial \theta, \partial \ell^* / \partial \gamma)'$ عبارتند از

$$\frac{\partial \ell^*}{\partial \theta} = \frac{\sum_{i=1}^n z_i}{\theta} + \frac{n}{(1-\theta) \log(1-\theta)},$$

$$\frac{\partial \ell^*}{\partial \gamma} = n \frac{\gamma+2}{\gamma(\gamma+1)} - \sum_{i=1}^n z_i y_i + \sum_{i=1}^n (z_i - 1) \left(\frac{y_i}{(\gamma+1)(1+\gamma(1+y_i))} \right).$$

از حل دستگاه غیرخطی معادلات $U_c^*(\mathbf{y}, \Theta) = 0$ ، روش با تکرار الگوریتم EM به دست می‌آید، چنانکه

$$\frac{\sum_{i=1}^n \hat{z}_i^{(t)}}{\hat{\theta}^{(t+1)}} + \frac{n}{(1-\hat{\theta}^{(t+1)}) \log(1-\hat{\theta}^{(t+1)})} = 0,$$

عیسی محمودی، سمیه ابوالحسینی ۱۵۳

$$n \frac{(\hat{\gamma}^{(t+1)} + 2)}{\hat{\gamma}^{(t+1)}(\hat{\gamma}^{(t+1)} + 1)} - \sum_{i=1}^n \hat{z}_i^{(t)} y_i + \sum_{i=1}^n (\hat{z}_i^{(t)} - 1) \times \frac{y_i}{(\hat{\gamma}^{(t+1)} + 1)(\hat{\gamma}^{(t+1)}(y_i + 1))} = 0,$$

و $\hat{\gamma}^{(t+1)}$ و $\hat{\theta}^{(t+1)}$ با روش‌های عددی محاسبه می‌شوند. در اینجا، برای $i = 1, \dots, n$ داریم:

$$\hat{z}_i^{(t)} = \frac{1}{1 - \hat{\theta}^{(t)} e^{-\hat{\gamma}^{(t)} y_i} (1 + \frac{\hat{\gamma}^{(t)} y_i}{\hat{\gamma}^{(t)} + 1})}$$

۷ مطالعات شبیه‌سازی

در این بخش، نتایج حاصل از شبیه‌سازی مونت کارلو به منظور بررسی سازگاری برآوردهای ماکسیمم درست‌نمایی به دو روش ماکسیمم درست‌نمایی مستقیم (روش نیوتن-رافسون) و الگوریتم EM ارائه شده است. تمام محاسبات با نرم افزار R اجرا گردیده است. ابتدا به کمک روش MLE و سپس با به کار گرفتن الگوریتم EM برآورد ماکسیمم درست‌نمایی پارامترهای توزیع لیندلی-لگاریتمی به دست می‌آید.

نتایج مربوط به مقادیر شبیه‌سازی شده برآورد پارامترها و \sqrt{MSE} برای توزیع لیندلی-لگاریتمی با دو روش فوق برای مقادیر $\theta = 0/1, 0/5$ و $\gamma = 0/2, 1, 2, 3$ به ازای مقادیر مختلف n و با تکرار ۱۰۰۰۰ در جدول ۲ آورده شده است. برای نتایج حاصل از الگوریتم EM همگرایی به گونه‌ای در نظر گرفته شده که حداکثر خطای مطلق حاصل از برآورد پارامترهای مدل کمتر از 10^{-4} باشد. همانطور که در جدول ۲ ملاحظه می‌شود:

الف) با افزایش n برآورد پارامترها به مقدار واقعی نزدیکتر و اریبی و \sqrt{MSE} کاهش می‌یابد.

ب) الگوریتم EM همگرایی قابل اعتمادتری در مقایسه با روش مستقیم دارد، یعنی با شروع از هر مقدار دلخواه θ و γ در فضای پارامتر همگرایی همیشه انجام می‌گیرد.

ج) انحراف استاندارد وقتی اندازه نمونه افزایش می‌یابد، کاهش پیدا می‌کند.

د) تعداد تکرارهای مربوط به الگوریتم EM در مقایسه با روش مستقیم به مراتب بیشتر است.

ه) الگوریتم EM نسبت به روش مستقیم از سادگی بیشتری در مرحله اجرا برخوردار است.

۸ تحلیل داده‌های واقعی

در این بخش، به منظور نشان دادن میزان انعطاف‌پذیری و توانمندی توزیع جدید نسبت به توزیع لیندلی از دو سری داده واقعی برای برازش استفاده شده است. در نهایت مقایسه‌ای بین

۱۵۴ توزیع لیندلی-لگاریتمی: مدل و ویژگی‌ها

جدول ۲: میانگین برآوردها، جذر میانگین توان دوم خطا و کواریانس برآوردهای

$\hat{\theta}$ و $\hat{\gamma}$ برای مقادیر مختلف n و (γ, θ)

$Cov(\hat{\theta}, \hat{\gamma})$	$\sqrt{MSE}(\hat{\theta})$	$\sqrt{MSE}(\hat{\gamma})$	$AE(\hat{\theta})$	$AE(\hat{\gamma})$	روش	(γ, θ)	n
-۰/۱۲۰	۰/۲۸۶	۰/۰۴۳	۰/۳۶۵	۰/۲۰۵	MLE	(۰/۲, ۰/۵)	۳۰
۰/۰۰۴	۰/۱۳۴	۰/۰۰۵	۰/۳۶۵	۰/۲۰۵	EM		
-۰/۵۷۶	۰/۲۸۲	۰/۲۳۱	۰/۳۴۹	۱/۰۳۶	MLE	(۱, ۰/۵)	
۰/۰۱۲	۰/۱۵۰	۰/۰۳۷	۰/۳۴۹	۱/۰۳۶	EM		
-۰/۸۸۶	۰/۲۵۶	۰/۳۹۶	۰/۲۵۲	۱/۰۳۶	MLE	(۲, ۰/۱)	
۰/۰۱۲	۰/۱۴۶	۰/۰۶۱	۰/۲۴۶	۱/۰۳۹	EM		
-۱/۲۳۸	۰/۳۴۸	۰/۵۸۷	۰/۲۵۶	۲/۰۰۶	MLE	(۳, ۰/۱)	۳۰
۰/۰۱۱	۰/۱۵۰	۰/۰۸۸	۰/۲۵۰	۲/۰۱۲	EM		
۰/۰۹۷	۰/۳۱۸	۰/۰۲۸	۰/۴۱۳	۰/۲۰۱	MLE	(۰/۲, ۰/۵)	۱۰۰
۰/۰۰۴	۰/۰۸۲	$\lambda e^{-\lambda}$	۰/۴۱۷	۰/۲۰۱	EM		
-۰/۴۹۶	۰/۲۹۵	۰/۱۴۳	۰/۴۲۵	۱/۰۱۷	MLE	(۱, ۰/۵)	
۰/۰۰۶	۰/۰۷۲	۰/۰۱۶	۰/۴۲۸	۱/۰۱۶	EM		
-۰/۵۶۵	۰/۲۷۷	۰/۲۲۸	۰/۲۱۹	۱/۰۳۸	MLE	(۲, ۰/۱)	
۰/۰۰۷	۰/۱۱۶	۰/۰۷۰	۰/۲۱۶	۱/۰۳۰	EM		
-۰/۸۰۵	۰/۲۷۰	۰/۳۵۷	۰/۲۰۲	۲/۰۱۵	MLE	(۳, ۰/۱)	۱۰۰
۰/۰۰۸	۰/۰۹۷	۰/۰۸۲	۰/۱۹۷	۲/۰۱۸	EM		
۰/۰۹۳	۰/۲۴۲	۰/۰۱۹	۰/۴۳۴	۰/۲۰۲	MLE	(۰/۲, ۰/۵)	۳۰۰
۰/۰۰۳	۰/۰۶۱	۰/۰۰۲	۰/۴۳۹	۰/۲۰۲	EM		
-۰/۹۴۸	۰/۲۰۸	۰/۱۹۶	۰/۴۴۹	۲/۰۲۲	MLE	(۱, ۰/۵)	
۰/۰۰۵	۰/۰۶۸	۰/۰۱۴	۰/۴۳۲	۱/۰۱۴	EM		
-۰/۳۸۵	۰/۲۰۲	۰/۱۴۷	۰/۱۶۸	۱/۰۶۲	MLE	(۲, ۰/۱)	
۰/۰۰۴	۰/۰۶۷	۰/۰۳۷	۰/۱۶۷	۱/۰۶۳	EM		
-۰/۵۷۶	۰/۱۹۸	۰/۲۲۰	۰/۱۶۸	۲/۰۴۱	MLE	(۳, ۰/۱)	۳۰۰
۰/۰۰۵	۰/۰۶۸	۰/۰۵۸	۰/۱۶۸	۲/۰۴۱	EM		

این توزیع با توزیع لیندلی، با توجه به مقادیر معیار آکائیک $(AIC = -2 \log L(\theta) + 2k)$ ، معیار آکائیک اصلاح شده $(AICC = AIC + \frac{2k(k+1)}{n-k-1})$ و آماره کولموگروف-اسمیرنوف صورت می‌گیرد که در آن k نشان دهنده تعداد پارامترهای مدل است. داده‌های به کار رفته به منظور برازش عبارتند از: مجموعه داده‌ها معرف فشار گسیختگی که اولین بار توسط بارلو و همکاران (۱۹۸۴) بررسی شده است. مجموعه داده‌های دوم مربوط به غلظت پلاسمایی برای ایندومتاسین است که در بسته datasets در نرم افزار R 3.0.2 موجود است. این مجموعه داده‌ها شامل ۶۶ داده می‌باشد. برآوردهای ماکسیمم درست‌نمایی به دست آمده در جدول ۳ آورده شده است. برای دو سری داده‌ها این‌طور استنباط می‌شود که با توجه به معیارهای محاسبه شده توزیع لیندلی-لگاریتمی به هر دو سری از داده‌ها بهتر از توزیع لیندلی برازش می‌شود و برای داده‌های نوع ۲ توزیع لیندلی-لگاریتمی رقیبی بسیار جدی برای توزیع لیندلی است.

عیسی محمودی، سمیه ابوالحسینی ۱۵۵

جدول ۳: برآورد پارامترها، آماره کولموگروف-اسمیرنوف، p-مقدار و مقادیر

آکائیک برای دو توزیع لیندلی و لیندلی-لگاریتمی

داده	مدل	$\hat{\gamma}(\text{std})$	$\hat{\theta}(\text{std})$	K-S	P-value	AIC	AICC
1	L	۱/۳۸ (۰/۱۰۷)	-	۰/۱۰۶	۰/۲۰۴	۲۱۱/۳	۲۱۱/۴
	LL	۱/۰۹ (۰/۲۰۵)	۰/۶۹۶ (۰/۲۴)	۰/۰۸۳	۰/۴۸۵	۲۱۱/۲	۲۱۱/۳
2	L	۰/۸۲۴ (۰/۱۰۵)	-	۰/۱۳۳	۰/۵۸۸	۱۱۴/۶	۱۱۶/۱
	LL	۰/۶۰۳ (۰/۱۶۸)	۰/۷۹۶ (۰/۲۲۳)	۰/۰۸۳	۰/۹۷۴	۱۱۴/۷	۱۱۷/۷

بحث و نتیجه گیری

در این مقاله توزیع جدیدی، تحت عنوان توزیع لیندلی-لگاریتمی معرفی شد. چندین ویژگی از توزیع جدید مانند تابع چگالی احتمال، تابع توزیع تجمعی، تابع نرخ شکست، تابع مولد گشتاور و گشتاور مرتبه r ام حول صفر محاسبه شد. برای نشان دادن میزان انعطاف پذیری و توانمندی این توزیع نسبت به توزیع لیندلی، از دو سری داده‌های واقعی برای برازش مدل استفاده شد. با توجه به نتایج حاصله از مقایسه در بخش کاربردها می‌توان نتیجه گرفت توزیع جدید برای این مجموعه داده‌ها توانمندتر از توزیع لیندلی است. پس می‌تواند جایگزین مناسبی برای توزیع لیندلی باشد، در مدل‌هایی که توزیع لیندلی به آن‌ها خوب برازش نمی‌شود.

تشکر و قدردانی

نویسندگان مقاله نهایت تشکر و قدردانی را از داوران و سردبیر محترم نشریه، که با رهنمودهای ارزنده خود باعث بهتر شدن مقاله گردیده‌اند، دارند. همچنین نویسندگان از دانشگاه یزد به خاطر حمایت‌های مالی تقدیر و تشکر می‌نمایند.

۱۵۶ توزیع لیندلی-لگاریتمی: مدل و ویژگی‌ها

مراجع

خنجری عیدنک، ع.، زادکرمی، م. ر. و دانشخواه، ع. (۱۳۹۰)، توزیع جدید نمایی پواسن توانی برای مدل طول عمر، مجله علوم آماری، ۵، ۱۶۰-۱۴۹.

Abouammoh, A. M., Alshangiti, A. M. and Ragab, I. E. (2015), A New Generalized Lindley Distribution, *Journal of Statistical Computation and Simulation*, **85**, 3665-3678.

Adamidis, K. and Loukas, S. (1998), A Lifetime Distribution with Decreasing Failure Rate, *Statistics and Probability Letters*, **39**, 35-42.

Asgharzedah, A., Bakouch, H. S. and Esmaeli, H. (2013), Pareto Poisson-Lindley Distribution with Applications, *Journal of Applied Statistics*, **40**, 1717-1734.

Barreto-Souza, W., Morais, A. L. and Cordeiro, G. M. (2011), The Weibull-Geometric Distribution, *Journal of Statistical Computation and Simulation*, **81**, 645-657.

Bhaumik, D. K., Kapur, K. and Gibbons, R. D. (2009), Testing Parameters of A Gamma Distribution for Small Samples, *Technometrics*, **51**, 326-334.

Barlow, R., Toland, R. and Freeman, T. (1984), A Bayesian Analysis of The Stress-Rupture Life of Kevlar-Epoxy Spherical Pressure Vessels, In: *Proceeding of the Canadian Conference in Applied Statistics*, 1981, Marcel Dekker, New York.

Chahkandi, M. and Ganjali, M. (2009), On Some Lifetime Distributions with Decreasing Failure Rate, *Computational Statistics and Data Analysis*, **53**, 4433-4440.

Ghitany, M. E., Atieh, B., and Nadarajah, S., (2008), Lindley Distribution and Its Applications, *Mathematics and Computers in Simulation*, **78**, 493-506.

Ghitany, M. E., Al-Mutairi, D. K., Balakrishnan, N. and Al-Enezi, L. J. (2013), Power Lindley Distribution and Associated Inference, *Computational Statistics and Data Analysis*, **64**, 20-33.

عيسى محمودى، سميه ابوالحسينى ١٥٧

- Glaser, R. E. (1980), Bathtub and Related Failure Rate Characterizations, *Journal of the American Statistical Association*, **75**, 667-672.
- Gui, W., Zhang, S. and Lu, X. (2014), The Lindley-Poisson Distribution in Lifetime Analysis and Its Properties, *Mathematics and Statistics*, **43**, 1063-1077.
- Kus, C. (2007), A New Lifetime Distribution, *Computational Statistics and Data Analysis*, **51**, 4497-4509.
- Lindley, D. V. (1958), Fiducial Distributions and Bayes Theorem, *Journal of the Royal Statistical Society, Series B*, **20**, 102-107.
- Mahmoudi, E. and Jafari, A. A. (2012), Generalized Exponential-Power Series Distributions, *Computational Statistics and Data Analysis*, **56**, 4047-4066.
- Mahmoudi, E. and Jafari, A. A. (2015), The Compound Class of Linear Failure Rate-Power Series Distributions: Model, Properties and Applications, *Communication in Statistics-Simulation and Computation*, Accepted for Publication.
- Mahmoudi, E. and Sepahdar, A. (2013), Exponentiated Weibull-Poisson Distribution: Model, Properties and Applications, *Mathematics and Computers in Simulation*, **92**, 76-97.
- Morais, A. L. and Barreto-Souza, W. (2011), A Compound Class of Weibull and Power series Distributions, *Computational Statistics and Data Analysis*, **55**, 1410-1425.
- Nadarajah, S., Bakouch, H.S. and Tahmasbi, R. (2011), A Generalized Lindley Distribution, *Sankhya B*, **73**, 331-359.
- Oluyede, B. O. and Yang, T. (2014), A New Class of Generalized Lindley Distributions with Applications, *Journal of Statistical Computations and Simulation*, **85**, 2072-2100.

۱۵۸ توزیع لیندلی-لگاریتمی: مدل و ویژگی‌ها

- Pararai, M., Warahena-Liyanage, G. and Oluyede, B.O. (2015). A New Class of Generalized Power Lindley Distribution with Applications to Lifetime Data, *Theoretical Mathematics and Applications*, **5**, 53-96.
- Tahmasbi, R. and Rezaei, S. (2008), A Two-Parameter Lifetime Distribution with Decreasing Failure Rate, *Computational Statistics and Data Analysis*, **52**, 3889-3901.
- Warahena-Liyanage, G. and Pararai, M. (2014). A Generalized Power Lindley Distribution with Applications, *Asian Journal of Mathematics and Applications*, **23**, 2307-7743.
- Zakerzadeh, H. and Dolati, A. (2009), Generalized Lindley Distribution, *Journal of Mathematical Extension*, **3**, 13-25.