مجله علوم آماری، بهار و تابستان ۱۳۹۵
جلد ۱۰، شماره ۱، ص ۱۵۹-۱۷۳
DOI: 10.7508/jss.2016.01.010

نامساوی نوع لوی و نگرشی دیگر بر قانون قوی اعداد بزرگ برای متغیرهای تصادفی وابسته

حمیدرضا نیلی ثانی[۱]، محمد امینی[۲]، ابوالقاسم بزرگ نیا[۳]
[۱] گروه آمار، دانشگاه بیرجند
[۲] گروه آمار، دانشگاه فردوسی مشهد
[۳] گروه آمار، دانشگاه خیام

تاریخ دریافت: ۱۳۹۳/۴/۲۰ تاریخ آخرین بازنگری: ۱۳۹۴/۲/۲۴

چکیده : یک نامساوی مهم برای توزیع ماکسیمم متغیرهای تصادفی مستقل نامساوی لوی است. در این مقاله یک نسخه از این نامساوی برای متغیرهای به‌طور ضعیف وابسته منفی ارایه می‌گردد. قانون قوی برای متغیرهای تصادفی وابسته توسط مولفین مختلفی مورد بررسی قرار گرفته‌اند. در این تحقیق، همچنین، همگرایی کامل وزنی برای آرایه‌ای از متغیرهای تصادفی سطری وابسته منفی کراندار احتمالی به‌دست می‌آید. همگرایی کامل و قانون قوی برای چنین خانواده‌ای از متغیرهای تصادفی از نتایج حاصله می‌باشند.

واژه‌های کلیدی : نامساوی لوی، همگرایی کامل، متغیرهای تصادفی وابسته منفی، متغیرهای تصادفی به‌طور ضعیف وابسته منفی.

آدرس الکترونیک مسئول مقاله: حمید رضا نیلی ثانی ، nilisani@birjand.ac.ir
کد موضوع‌بندی ریاضی (۲۰۱۰): 60F15

۱ مقدمه و پیشنیازها

رفتار حدی دنباله مجموع‌های جزئی یا دنباله مجموع‌های چزارو از متغیرهای تصادفی از موضوعات مهم در نظریه احتمال بوده و توسط مولفین مختلفی بررسی شده است. مطالعه چنین رفتارهایی از دیدگاه‌های مختلف قابل توجه است. ابزار یا شیوه بررسی چگونگی این رفتارها، نوع همگرایی یا سرعت همگرایی این دنباله‌ها برخی از موضوعات مورد مطالعه می‌باشند. یک ابزار مفید برای بررسی چنین رفتارهایی، نامساوی لوی است. این نامساوی کران بالایی برای توزیع ماکسیمم متغیرهای تصادفی مستقل می‌باشد. از سوی دیگر در سالهای اخیر متغیرهای تصادفی وابسته و مفاهیم مربوط به آنها مورد توجه قرار گرفته‌اند. نوشتارهای جو (۱۹۹۷) و ماری و کاتس (۲۰۰۴) از جمله مراجعی هستند که در این خصوص تهیه شده‌اند. تعمیمی از نامساوی لوی (که دارای شکل‌های متنوعی می‌باشد) برای متغیرهای تصادفی وابسته تاکنون کمتر مورد توجه بوده است. در بخش دوم شکلی از نامساوی لوی برای رده‌ای از متغیرهای تصادفی وابسته به‌دست می‌آید. در این مقاله از c برای نمایش مقدار ثابت، که مقدار آن در جاهای مختلف ممکن است متفاوت باشد، استفاده می‌شود.

یکی از مولفه‌های مهم در مبحث همگرایی چزارو مجموع‌های جزئی متغیرهای تصادفی تعیین زیر مجموعه‌ای از فضای نمونه‌ای Ω است که برروی آن زیر مجموعه همگرایی برقرار باشد. در همگرایی قوی (همگرایی تقریبا همه جا، .a.s) اندازه چنین زیر مجموعه‌ای برابر یک است. هسو و رابین (۱۹۴۷) دنباله $\{X_n\}$ را همگرایی کامل به ثابت c نامیدند اگر برای هر ثابت $\varepsilon > 0$

$$\sum_n P(|X_n - c| > \varepsilon) < \infty.$$

به سهولت می‌توان نشان داد که چنین شکلی از همگرایی، همگرایی .a.s را نتیجه می‌دهد. آنها نشان دادند که میانگین نمونه‌ای متغیرهای تصادفی مستقل و هم توزیع (iid) مشروط به آنکه واریانس متناهی باشد، به امید ریاضی مشترکشان همگرایی کامل می باشد. نتایج آنها توسط مولفین متعددی بسط و گسترش داده شده است که از آن جمله می‌توان به چو و تیجر (۱۹۷۱)، چو (۱۹۷۳)، لای (۱۹۷۴)، بینگهام (۱۹۸۵)، گات (۱۹۹۳)، وانگ و همکاران (۱۹۹۳)، گسل وچاندرا (۱۹۹۸) و تیلور و همکاران (۲۰۰۲) اشاره کرد. هیو و همکاران (۱۹۹۹ و ۲۰۰۱) از جمله افرادی هستند که چنین همگرایی را در فضای باناخ بررسی کرده و احمد و همکاران (۲۰۰۲) نتایج آنها را بهبود بخشیدند. با گسترش توجه به متغیرهای

تصادفی وابسته رده‌های متنوعی از متغیرهای تصادفی وابسته شناسایی و معرفی شدند. لهمن (۱۹۶۶) با انگیزه ارائه آزمون ناااریب برای استقلال بین دو متغیر وابستگی‌های مثبت و منفی را برای حالت دو متغیره تعریف نمود.

تعریف ۱ : زوج (X_1, X_2) یا توزیع آن F، را وابسته ربعی منفی[1] (NQD) نامیم اگر برای هر $x_1, x_2 \in R$،

$$P(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2) \leq P(X_1 \leq x_1)P(X_2 \leq x_2) \qquad (1)$$

وابستگی را اکید نامیم اگر برای حداقل یک زوج (x_1, x_2) نامساوی اکید باشد.

تعریف ۲ : متغیرهای $X_1, \ldots, X_n$، $(n \geq 2)$ را از پائین هم راستا وابسته منفی[2] (NLOD) نامیم اگر برای تمام مقادیر حقیقی $x_1, \ldots, x_n$

$$P(X_1 \leq x_1, \ldots, X_n \leq x_n) \leq \Pi_{i=1}^n P(X_i \leq x_i) \qquad (2)$$

و از بالا هم راستا وابسته منفی[3] (NUOD) نامیم اگر برای تمام مقادیر حقیقی $x_1, \ldots, x_n$

$$P(X_1 \geq x_1, \ldots, X_n \geq x_n) \leq \Pi_{i=1}^n P(X_i \geq x_i) \qquad (3)$$

و هم راستا وابسته منفی[4] (NOD)، یا به اختصار وابسته منفی، نامیم اگر هم (۲) و هم (۳) برقرار باشند.

متغیرهای $X_1, \ldots, X_n$، $(n \geq 2)$ را دو بدو وابسته ربعی منفی(یا به اختصار دو بدو وابسته منفی [5] (PND)) نامیم اگر برای هر i, j، $i \neq j$ (X_i, X_j) متغیرهای NQD باشند. بسادگی می‌توان نشان داد که برای $n = 2$ شرایط (۱) و (۲) هم ارز هستند. این موضوع برای $n > 2$ برقرار نمی باشد.

دنباله $\{X_n, n \geq 1\}$ از متغیرهای تصادفی را NUOD(NLOD،NOD،PND) نامیم اگر هر زیر دنباله متناهی‌آن این چنین باشد.

لم ۱ (ماتولا۱۹۹۲) : فرض کنید $\{X_n, n \geq 1\}$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی NOD باشد. آنگاه

[1] Negatively Quadrant Dependent
[2] Negative Lower Orthant Dependent
[3] Negative Upper Orthant Dependent
[4] Negative Orthant Dependent
[5] Pairwise Negatively Dependent

۱. $Cov(X_i, X_j) \leq 0, i \neq j$

۲. هرزیر مجموعه از متغیرهای تصادفی NOD (PND, NLOD یا NUOD)، NOD (PND NLOD, یا NUOD) است.

۳. اجتماع مجموعه‌های مستقل از هم از متغیرهای NOD (PND، NLOD یاNUOD) نیز NOD (PND، NLOD یا NUOD) است.

۴. اگر $X_1, \ldots, X_n$ مجموعه‌ای از متغیرهای NOD (PND) و $g_1, \ldots, g_n$ توابع حقیقی مقدار هماهنگ (همگی صعودی یاهمگی نزولی) باشند، آنگاه $g_1(X_1), \ldots, g_n(X_n)$ نیز NOD (PND) هستند.

بررسی رفتارهای حدی متغیرهای تصادفی وابسته منفی به دلیل خاصیت خنشی سازی آنها به سرعت مورد توجه قرار گرفت. ذیلی‌ثانی و همکاران (۲۰۰۶)، امینی و همکاران (۲۰۰۷) و بیک و پارک (۲۰۱۰)، که از این‌پس و به اختصار BP می‌نامیم، از جمله کسانی هستند که همگرایی کامل برای متغیرهای تصادفی وابسته منفی را مورد بررسی قرار دادند.

قضیه BP: فرض کنید $\{X_{ni}, n \geq 1, i \geq 1\}$ یک آرایه از متغیرهای تصادفی سطری PND با $E(X_{ni}) = 0$ باشد که به طور احتمالی به متغیر X کراندار است، یعنی برای ثابتی مانند c و برای هر $x > 0$ ، $n \geq 1$ و $i \geq 1$، $P(|X_{ni}| > x) \leq cP(|X| > x)$. همچنین فرض کنید $\beta \geq -1$ و اینکه $\{a_{ni}\}$ آرایه‌ای از مقادیر ثابت باشد به قسمی که

$$\begin{aligned} \sup_{i \geq 1} |a_{ni}| &= O(n^{-r}) \quad r > 0, \\ \sum_{i=1}^{\infty} |a_{ni}| &= O(n^{\alpha}) \quad \alpha \in [0, r). \end{aligned}$$

اگر $\alpha + \beta + 1 > 0$ و مقداری مانند $\delta > 0$ موجود باشد به قسمی که $\alpha/r + 1 < \delta \leq 2$، $s = \max(1 + \frac{1+\alpha+\beta}{r}, \delta)$ و $E(|X|^s) < \infty$ آنگاه داریم

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\beta} P(|\sum_{i=1}^{\infty} a_{ni} X_{ni}| > w) < \infty \quad w > 0$$

یک رده دیگر از متغیرهای تصادفی وابسته منفی توسط رنجبر و همکاران (۲۰۰۸) تعریف گردید.

تعریف ۳ : متغیرهای $X_1, \ldots, X_n$، $(n \geq 2)$ با تابع چگالی احتمال توام $f(x_1, \ldots, x_n)$ و توابع چگالی احتمال حاشیه‌ای $f_{X_i}(x_i)$، $(i \geq 1)$ را به‌طور ضعیف وابسته منفی نامیم اگر

ثابتی مانند $c \geq ۱$ موجود باشد به قسمی که برای هر $x_۱, \dots, x_n$ داشته‌باشیم

$$f(x_۱, \dots, x_n) \leq c \prod_{i=۱}^{n} f_{X_i}(x_i). \qquad (۴)$$

دنباله $\{X_n, n \geq ۱\}$ از متغیرهای تصادفی را به‌طور ضعیف وابسته منفی نامیم اگر هر زیر دنباله متناهی‌آن این چنین باشد.

۲ نامساوی لوی برای متغیرهای تصادفی وابسته

برای نامساوی لوی شکل‌های مختلفی، که بسیاری از آنها هم ارز یکدیگرند، پیشنهاد شده است. در این جا نمایش خان (۱۹۸۵) از نامساوی لوی را مورد استفاده قرار می دهیم.

قضیه ۱ : فرض کنید $\{X_n, n \geq ۱\}$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی به‌طور ضعیف وابسته منفی و متقارن و $\{X_n^*, n \geq ۱\}$ نسخه مستقل آن باشد. اگر

$$Y_m = \sum_{n=۱}^{m} X_n, \quad Y = \sum_{n=۱}^{\infty} X_n, \quad M = \sup(|Y_m|),$$
$$Y_m^* = \sum_{n=۱}^{m} X_n^*, \quad Y^* = \sum_{n=۱}^{\infty} X_n^*$$

و $\sum_{n=۱}^{\infty} X_n$، a.s. همگرا باشد، آنگاه برای هر $\varepsilon > ۰$

$$P(M > \varepsilon) \leq ۲cP(|Y^*| > \varepsilon). \qquad (۵)$$

برهان : فرض کنید

$$\Omega_۰ = \{w : Y(w) < \infty\},$$
$$A = \{w : w \in \Omega_۰, M(w) > \varepsilon\}, \quad B = \{w : w \in \Omega_۰, |Y(w)| > \varepsilon\}.$$

مجموعه A را به زیر مجموعه‌های زیر تقسیم می‌کنیم:

$$A_۱ : |Y_۱| > \varepsilon,$$
$$A_۲ : |Y_۱| \leq \varepsilon, |Y_۲| > \varepsilon,$$
$$\vdots$$
$$A_m : |Y_۱| \leq \varepsilon, \dots, |Y_{m-۱}| \leq \varepsilon, |Y_m| > \varepsilon$$

به‌طور مشابه پیشامدهای A^*، A_1^*، ...، A_m^*، ... و B^* تعریف می‌شوند. اگر $w \in A_m$ حداقل یکی از مقادیر

$$Y(w) = Y_m(w) + (X_{m+1}(w) + \cdots)$$

ای

$$Y^{'}(w) = Y_m(w) - (X_{m+1}(w) + \cdots)$$

خارج بازه بسته‌ای به شعاع ε قرار می‌گیرند. بنابراین

$$P(A) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n, |Y| > \varepsilon) + \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n, |Y'| > \varepsilon)$$

فرض کنید $f(x_1, \cdots, x_n)$ و $f_i(x_i)$ به ترتیب تابع چگالی احتمال توام X_1،...،X_n و تابع چگالی احتمال حاشیه‌ای X_i باشد. توابع چگالی احتمال توام و حاشیه‌ای نسخه مستقل به طور مشابه تعریف می‌گردد. در این صورت

$$\begin{aligned} P(A_n) &= \int \cdots \int_{A_n} f(x_1, \cdots x_n) dx_1 dx_2 \cdots dx_n \\ &\leq c \int \cdots \int_{A_n} f_1(x_1) f_2(x_2) \cdots f_n(x_n) dx_1 dx_2 \cdots dx_n \\ &= c \int \cdots \int_{A_n} f_1^*(x_1) f_2^*(x_2) \cdots f_n^*(x_n) dx_1 dx_2 \cdots dx_n \\ &= c P(A_n^*) \end{aligned}$$

از طرف دیگر چون X_n^* ها متغیرهای تصادفی مستقل و متقارن هستند، Y^* و Y'^* همتوزیع و با احتمال یکسانی خارج از بازه‌ای به شعاع ε هستند. بنابراین

$$P(A_m^* \cap B^*) \geq \frac{1}{2} P(A_m^*)$$

و

$$\begin{aligned} P(A) &= \sum_{m=1}^{\infty} P(A_m) \\ &\leq c \sum_{m=1}^{\infty} P(A_m^*) \\ &\leq 2c P(|Y^*| > \varepsilon) \end{aligned}$$

و اثبات کامل می‌گردد.

۳ همگرایی کامل وزنی برای متغیرهای وابسته منفی

بینگهام و نیلی ثانی (۲۰۰۴)، نیلی ثانی و همکاران(۲۰۰۶) و امینی و همکاران (۲۰۰۷) از جمله افرادی هستند که رفتارهای حدی دنباله مجموع‌های جزیی متغیرهای تصادفی وابسته را مطالعه کردند. در این قسمت تعمیمی از قضیه BP برای متغیرهای وابسته منفی ارائه می‌شود.

قضیه ۲ : فرض کنید $\{X_{ni}, n \geq 1, i \geq 1\}$ آرایه‌ای از متغیرهای تصادفی متقارن سطری PND ($E(X_{ni}) = 0$) باشد که به‌طور احتمالی به متغیر X کراندار است، یعنی برای ثابتی مانند c و برای هر $x > 0$ و $n, i \geq 1$، $P(|X_{ni}| > x) \leq cP(|X| > x)$. همچنین فرض کنید $\beta \geq -1$ و $\{a_{ni}, n \geq 1, i \geq 1\}$ آرایه‌ای از مقادیر ثابت باشد به قسمی که

$$\sup_{i\geq 1}|a_{ni}| = O(n^{\frac{-3r}{4}}) \qquad \text{برای مقداری مانند } r > 0 \tag{6}$$

و

$$\sum_{i=1}^{\infty}|a_{ni}| = O(n^{\alpha}) \qquad \text{برای مقداری مانند } \alpha \in [0, r) \tag{7}$$

اگر $\alpha + \beta + 1 > 0$ و مقداری مانند $\delta > 0$، $(1+\beta)\frac{4}{3} \leq \delta < 1$، موجود باشد به قسمی که

$$\beta - 0.75r(\delta - (\frac{\alpha}{0.75r} + 1)) < -1 \tag{8}$$

و برای مقداری مانند θ، $\theta > \frac{4}{3r}(1 + \beta + \alpha) + 1$،

$$E(|X|^{\theta}) < \infty \tag{9}$$

همچنین اگر $W \sim G$، که G تابع توزیعی بر R^+ باشد به قسمی که

$$E(W^{-2}) < \infty \tag{10}$$

آنگاه داریم

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\beta} \int_{0}^{\infty} P(|\sum_{i=1}^{\infty} a_{ni}X_{ni}| > w)dG(w) < \infty. \tag{11}$$

برهان (قضیه ۲). خاطر نشان می‌کنیم $a_{ni} = a_{ni}^{+} - a_{ni}^{-}$ که:

$$a_{ni}^{+} = \max(a_{ni}, 0) \qquad a_{ni}^{-} = \max(-a_{ni}, 0)$$

چون

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\beta} \int_{0}^{\infty} P(|\sum_{i=1}^{\infty} a_{ni}X_{ni}| > w)dG(w)$$
$$\leq \sum_{n=1}^{\infty} n^{\beta} \int_{0}^{\infty} P(|\sum_{i=1}^{\infty} a_{ni}^{+}X_{ni}| > w/2)dG(w)$$
$$+ \sum_{n=1}^{\infty} n^{\beta} \int_{0}^{\infty} P(|\sum_{i=1}^{\infty} a_{ni}^{-}X_{ni}| > w/2)dG(w)$$

بنابراین کافی است نشان دهیم هر یک از جملات سمت راست متناهی هستند. لذا بدون از دست دادن کلیت مسئله فرض می‌کنیم $a_{ni} > 0$. فرض کنید

$$X_{ni}' = -I_{(a_{ni}X_{ni}<-1)} + a_{ni}X_{ni}I_{(|a_{ni}X_{ni}|\leq 1)} + I_{(a_{ni}X_{ni}>1)}$$

لذا

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\beta} \int_{0}^{\infty} P(|\sum_{i=1}^{\infty} a_{ni}X_{ni}| > \frac{w}{2})dG(w) =$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\beta} \int_{0}^{\infty} P(|\sum_{|a_{ni}X_{ni}|>1} a_{ni}X_{ni} + \sum_{|a_{ni}X_{ni}|\leq 1} a_{ni}X_{ni}| > \frac{w}{2})dG(w)$$

$$\leq \sum_{n=1}^{\infty} n^{\beta} \int_{0}^{\infty} P(|\sum_{|a_{ni}X_{ni}|>1}^{\infty} a_{ni}X_{ni}| > \frac{w}{4})dG(w) +$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\beta} \int_{0}^{\infty} P(|\sum_{|a_{ni}X_{ni}|\leq 1} a_{ni}X_{ni}| > \frac{w}{4})dG(w)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} n^{\beta} \int_{0}^{\infty} P(|\sum_{|a_{ni}X_{ni}|>1}^{\infty} a_{ni}X_{ni}| > \frac{w}{4})dG(w) +$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\beta} \int_{0}^{\infty} P(|\sum_{i=1}^{\infty} X_{ni}'| > \frac{w}{4})dG(w)$$

$$= I_1 + I_2$$

بنابراین کافی است ثابت کنیم که هر یک از جملات متناهی است. بدون اینکه به کلیت مسئله خللی وارد آید فرض می‌کنیم

$$\sup_{i\geq 1} a_{ni} = n^{-\frac{3r}{4}}, \qquad \sum_{i=1}^{\infty} a_{ni} = n^{\alpha}, \qquad a_{ni} \leq 1$$

فرض کنید

$$I_{nk} = \{i : (nk)^{3r/4} \leq \mid \frac{1}{a_{ni}} \mid = \mid b_{ni} \mid < (n(k+1))^{3r/4}\}, \quad k \geq 1, n \geq 1 \qquad (12)$$

توجه کنید که بنا به (۱۲) و برای هر $n \geq 1$، $\cup_{i\geq 1} I_{ni} = N$. همچنین خاطر نشان می‌کنیم که برای هر $n \geq 1$ و $k \geq 1$

$$\sum_{j=1}^{k} \sharp I_{nj} = \sharp\{i : \mid b_{ni} \mid < (n(k+1))^{3r/4}\} =: \sharp A_{nk},$$

که در آن $\sharp$ نشان دهنده تعداد اعضای مجموعه است، و بنا به رابطه (۱۲) و برای هر $n \geq 1$ و $k \geq 1$ داریم

$$n^{\alpha} \geq \sum_{i \in A_{nk}} \mid a_{ni} \mid = \sum_{i \in A_{nk}} \frac{1}{\mid b_{ni} \mid} \geq \frac{\sharp A_{nk}}{(n(k+1))^{3r/4}}.$$

بنابراین

$$\sharp A_{nk} \leq n^{\alpha + 3r/4}(k+1)^{3r/4}.$$

نخست همگرایی قسمت اول را ثابت می‌کنیم.

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\beta} \int_{0}^{\infty} P(\mid \sum_{\mid a_{ni}X_{ni}\mid > 1}^{\infty} a_{ni}X_{ni} \mid > \frac{w}{4}) dG(w)$$

$$\leq \sum_{n=1}^{\infty} n^{\beta} \int_{0}^{\infty} P(\mid a_{ni}X_{ni} \mid > 1) dG(w)$$

$$\leq \sum_{n=1}^{\infty} n^{\beta} \int_{0}^{\infty} P(\mid X \mid > \frac{1}{\mid a_{ni} \mid}) dG(w)$$

$$\leq \sum_{n=1}^{\infty} n^{\beta} P(\mid X \mid^{\frac{4}{3r}} > n)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} n^{\beta} \sum_{k=n}^{\infty} P(k < |X|^{\frac{4}{3r}} \leq k+1)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} P(k < |X|^{\frac{4}{3r}} \leq k+1) \sum_{n=1}^{k} n^{\beta} \qquad (13)$$

فرض کنید $\beta \neq -1$ لذا

$$\leq c \sum_{k=1}^{\infty} P(k < |X|^{\frac{4}{3r}} \leq k+1) k^{\beta+1}$$

$$\leq cE(|X|^{(1+\beta)\frac{4}{3r}}) < \infty.$$

اگر $\beta = -1$، آنگاه $\sum_{n=1}^{k} n^{\beta} \leq c \log k$ لذا

$$(13) \leq \sum_{k=1}^{\infty} P(k < |X|^{\frac{4}{3r}} \leq k+1) \log k$$

$$\leq cE(|X|) < \infty.$$

برای اثبات همگرا بودن جمله دوم (I_2) نخست نامساوی زیر(که به سهولت ثابت می‌شود) را یادآوری می‌کنیم :

برای هر $b > 0$ و $\gamma > 0$ داریم

$$E(|X_{ni}|^{\gamma} I_{|X_{ni}|>b}) \leq cE(|X|^{\gamma} I_{|X|>b}).$$

بنابراین داریم

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\beta} \int_{0}^{\infty} P(|\sum_{i=1}^{\infty} X'_{ni}| > \frac{w}{4}) dG(w) \leq c \sum_{n=1}^{\infty} n^{\beta} \sum_{i=1}^{\infty} E(X'^{2}_{ni})$$

آخرین نامساوی از (۱۰) و فرض سطری PND بودن متغیرها نتیجه شده است. اما

$$\sum_{i=1}^{\infty} E(X'^{2}_{ni}) = \sum_{i=1}^{\infty} [\int_{|a_{ni}X_{ni}|>1} X'^{2}_{ni} dP + \int_{|a_{ni}X_{ni}|\leq 1} X'^{2}_{ni} dP]$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} [P(|X_{ni}| > \frac{1}{a_{ni}}) + \int_{|a_{ni}X_{ni}|\leq 1} X'^{2}_{ni} dP]$$

$$\leq c \sum_{i \geq ۱} [P(| X |> \frac{۱}{a_{ni}}) + E((a_{ni}X_{ni})^{۲} I(| a_{ni}X_{ni} | \leq ۱))] \qquad (۱۴)$$

از طرف دیگربا بهره گیری از روش انتگرال گیری جزء بجزء و تعریف کرانداری در احتمال داریم

$$E((a_{ni}X_{ni})^{۲} I(| a_{ni}X_{ni} | \leq ۱)) = a_{ni}^{۲} E(X_{ni}^{۲} I(| a_{ni}X_{ni} | \leq ۱))$$

$$\leq E(a_{ni}^{۲} X^{۲} I(| a_{ni}X | \leq ۱)).$$

فرض کنید $۱ < \theta < ۲$ بنا به نامساوی چی بی چف یک کران بالا برای (۱۴) به صورت

$$(۱۴) \leq c \sum_{i=۱}^{\infty} a_{ni}^{\theta} E(| X |^{\theta}) + c \sum_{i=۱}^{\infty} E(| a_{ni}X_{ni} |^{\theta} | a_{ni}X_{ni} |^{۲-\theta} I_{|a_{ni}X_{ni}|<۱})$$

$$\leq c \sum_{i=۱}^{\infty} a_{ni}^{\theta-۱} a_{ni}$$

$$\leq n^{\alpha} n^{\frac{-۳}{۴} r(\theta-۱)}$$

است. بنابراین

$$I_{۲} \leq c \sum_{n=۱}^{\infty} n^{\beta} n^{\alpha} n^{\frac{-۳}{۴} r(\theta-۱)} < \infty.$$

حالتی که $\theta \geq ۲$ به‌طور مشابه ثابت و لذا اثبات کامل می‌گردد.

مثال ۱ : فرض کنید $r = ۸$، $a_{ni} = n^{-٦}$، $۱ \leq i \leq n$، $\alpha = ۰.۱$، $\beta = ۰$ و $\delta = \frac{۴}{۳}(۱+\beta) = \frac{۴}{۳}$. در این صورت $۱ + \beta + \alpha = ۱.۱ > ۰$ و

$$\beta - ۰.۷۵r(\delta - (\frac{\alpha}{۰.۷۵r} + ۱)) = -٦(\frac{۴}{۳} - (\frac{۰.۱}{٦} + ۱)) = -٦(\frac{۲ - ۰.۱}{٦}) < -۱$$

اگر

$$E(| X |^{\theta}) < \infty,$$

$\theta = \frac{۴}{۳} > \frac{۴}{۳r}(\alpha + \beta + ۱)$ و G تابع توزیعی بر R^{+} باشد به‌قسمی که

$$E(W^{-۲}) < \infty$$

آنگاه، تحت شرایط قضیه ۱ و به‌ازای پارامترهای فوق، داریم

$$\sum_{n=۱}^{\infty}\int_{۰}^{\infty} P(|\sum_{i=۱}^{n} n^{-۶}X_{ni}| > w)dG(w) < \infty.$$

مثال ۲ : تحت شرایط مثال قبل اگر W یک متغیر تباهیده در $a > ۰$ باشد، آنگاه $E(W^{-۲}) < \infty$ و

$$\sum_{n=۱}^{\infty} P(|\sum_{i=۱}^{n} n^{-۶}X_{ni}| > a) < \infty.$$

نامساوی فوق برای هر مقدار دلخواه a برقرار است. چون

$$\sum_{n=۱}^{\infty} P(|\sum_{i=۱}^{n} n^{-۸}X_{ni}| > a) \leq \sum_{n=۱}^{\infty} P(|\sum_{i=۱}^{n} n^{-۶}X_{ni}| > a)$$

لذا قضیه BP به‌ازای مقادیرداده شده برای پارامترهای فوق و برای $a_{ni} = n^{-r}$ نتیجه می‌شود.

۴ بحث و نتیجه گیری

هر چند رفتار حدی متغیرهای تصادفی وابسته در سال‌های اخیر مورد توجه بسیاری از مولفین و محققین قرار گرفته است؛ اما مطالعه رفتار حدی مجموع های وزنی متغیرهای تصادفی وابسته و تعیین سرعت همگرایی آنها از یک سو و ارتباط این رفتارها با گشتاورهای متغیرها از سوی دیگر، به دستاوردهای کمتری منتهی شده است. در این مقاله ضمن تعیین رفتار حدی مجموع های وزنی آرایه ای از متغیرهای تصادفی وابسته تحت شرط به طور احتمالی کراندار بودن متغیرها، سرعت همگرایی نیز تعیین شده است. مولفین امیدوارند در نوشتارهای بعدی بتوانند ارتباط بین چگونگی رفتارهای حدی و گشتاورهای متغیرهای تصادفی را تبیین کنند.

۵ تقدیر و تشکر

مولفین لازم می دانند از داوران گرامی و هیئت تحریریه محترم مجله که با پیشنهادات ارزنده خود باعث بهبود مقاله شدند، صمیمانه تشکر و قدردانی نمایند.

مراجع

Ahmed, S. E., Antonini, R. G. and Volodin, A. (2002), On the Rate of Complete Convergence for Weighted Sums of Arrays of Banach Space Valued Random Elements with Application to Moving Average Processes, *Statistics and Probability Letters*, **58**, 185-194.

Amini, A., Nili Sani, H. R. and Bozorgnia, A. (2007), Complete Convergence and Some Maximal Inequalities for Weighted Sums of Random Variables, *Journal of Sciences Islamic Republic of Iran*, **18**, 311-316.

Beak, J. and Park, S. T. (2010), Convergence of Weighted Sums for Arrays of Negatively Dependent Random Variables and its Applications, *Journal of Staticstical and Planning and Inference*, **140**, 2461-2469.

Bingham, N. H. (1985), Summability Methods and Dependent Strong laws, *In: Dependence in Probability and Statistics*, PP. 291-300.

Bingham, N. H. and Nili Sani, H. R. (2004), Summability Methods and Negatively Associated Random Variables, *Journal of Appled Probability*, **41A**, 231-238.

Bozorgnia, A., Patterson, R. F. and Taylor, R. L. (1996), Limit Theorems for Dependent Random Variables, *Proceedings of the first World Congress Nonlinear Analysis*, **92**, 1639-1650.

Chow, Y. S. (1973), Delayed Sums and Borel Summability of Independent, Identically Distributed Random Variables, *Bulletin of the Institue of Mathematics Academia Sinica*, **1**, 207-220.

Chow, Y. S. and Teicher, H. (1971), Almost Certain Summability of Independent, Identically Distributed Random Variables, *The Annals of Mathematical Statistics*, **42**, 401-404.

Ghosal, S. and Chandra, T. K. (1998), Complete Convergence of Martingale Arrays, *Journal of Theoretical Probability*, **11**, 621-631.

Gut, A. (1993), Complete Convergence and Cesaro Summation for I.I.D. Random Variables, *Probability Thorey and Related Fields*, **97**, 167-178.

Hsu, P.L. and Robbins, H. (1947), Complete Convergence and the Law of Large Numbers, *Proceedings of the National Academy of Sciences, USA*, **33**, 25-31.

Hu, T. C., Rosalsky, A., Szynal, D. and Volodin, A. (1999), On Complete Convergence for Arrays of Rowwise Independent Random Elements in Banach Spaces, *Stochastic Analysis and Applications*, **17**, 963-992.

Hu, T. C., Li, D., Rosalsky, A. and Volodin, A. (2001), On the Rate of Complete Convergence for Weighted Sums of Arrays of Banach Space Valued Random Elements, *Theory of Probability and its Applications*, **47**, 455-468.

Joag-Dev, K. and Proschan, F. (1983), Negative Association of Random Vaiables with Applications, *The Annals of Statistics*, **11**, 286-295.

Joe, H. (1997), *Multivariate Models and Dependence Concepts*, Chapmann and Hall, London.

Kahane, J. P. (1985), *Some Random Series of Functions. Second Edition*, Cambridge University Press.

Lai, T. L. (1974), Summability Methods for Independent Identically Distributed Random Variables, *Proceedings of the American Mathematical Society*, **45**, 253-261.

Lehmann, E. L. (1966). Some Concepts of Dependence, *The Annals of Mathematical Statistics*, **37**, 1137-1153.

Mari, D. D. and Kotz, S. (2004), *Correlation and Dependence*, Imperial College Press.

Matula, P. (1992). A Note on the Almost Sure Convergence of Sums of Negatively Dependent Random Variables, *Statistics and Probability Letters*, **15**, 209-213.

Nili Sani, H. R., Azarnoosh, H. A. and Bozorgnia, A. (2006), On the Convergence Rate of Law of Large Numbers for Sums of Dependent Random Variables, *Journal of Sciences Islamic Republic of Iran* ,**17**, 259-264.

Ranjbar, V., Amini, M. and Bozorgnia, A. (2008), Asymptotic Behavior Weighted Sums of Weakly Negative Dependent Random Variables, *Journal of Sciences Islamic Republic of Iran*, **19**, 357-363.

Taylor, R. L., Patterson, R. F. and Bozorgnia, A. (2002), A Strong Law of Large Numbers for Arrays of Rowwise Negatively Dependent Random Variables, *Stochastic Analysis and Applications*, **20**, 634-656.

Wang, X., Rao, M. B. and Yang, X. (1993), Convergence Rates on Strong Laws of Large Numbers for Arrays of Rowwise Independents Elements, *Stochastic Analysis and Applications*, **11**, 115-132.