مجله علوم آماری، پاییز و زمستان ۱۳۹۵
جلد ۱۰، شماره ۲، ص ۳۴۵-۳۷۳
DOI: 10.18869/acadpub.jss.10.2.345

برآورد پس از گزینش در مدل‌های نرخ شکست متناسب و نرخ شکست وارون متناسب

نادر نعمت‌الهی

گروه آمار، دانشگاه علامه طباطبائی

تاریخ دریافت: ۱۳۹۴/۶/۳۰ **تاریخ آخرین بازنگری:** ۱۳۹۵/۳/۲

چکیده : فرض کنید k نمونهٔ تصادفی از k جامعه به ترتیب با تابع توزیع‌هایی که از مدل نرخ شکست متناسب یا نرخ شکست وارون متناسب پیروی می‌کنند انتخاب شده باشد و براساس یک قاعدهٔ گزینش معین هدف برآورد تابعی از پارامتر بهترین (بدترین) جامعهٔ گزینش شده باشد. در این مقاله تحت تابع زیان نامتقارن آنتروپی، برآوردگر مخاطره - ناارایب با کم‌ترین مخاطره به‌طور یکنواخت پارامترهای جامعهٔ گزینش شده را به‌دست آورده و شرایط کافی برای آن که برآوردگری برای این پارامترها مینیماکس باشد تعیین می‌شود. سپس برآوردگرهای پذیرفتنی و ناپذیرفتنی خطی آن‌ها را به‌دست آورده و ردهٔ کلیه برآوردگرهای غالب بر برآوردگر مفروض مشخص می‌شود. آن‌گاه نشان داده می‌شود که در هر حالت برآوردگر مخاطره - ناااریب با کم‌ترین مخاطره به‌طور یکنواخت ناپذیرفتنی است و برآوردگرهای به‌دست آمده از طریق مخاطره آن‌ها با یکدیگر مقایسه می‌شوند.

آدرس الکترونیک مسئول مقاله: نادر نعمت‌الهی، nematollahi@atu.ac.ir
کد موضوع‌بندی ریاضی (۲۰۱۰): ۶۲C۲۰، ۶۲C۱۵، ۶۲F۱۰، ۶۲F۰۷

واژه‌های کلیدی : برآوردگر با کم‌ترین مخاطره-نااریب به‌طور یکنواخت، برآوردگر مینیماکس، تابع زیان آنتروپی، پذیرفتنی بودن، جامعهٔ گزینش شده، مدل‌های نرخ شکست متناسب و وارون متناسب.

۱ مقدمه

مسئله برآورد پارامتر جامعهٔ گزینش شده یکی از مسائل مهم کاربردی است که در آزمایش‌های کشاورزی، صنعتی و پزشکی مورد استفاده قرار می‌گیرد. در این مسئله تعدادی از جوامع به منظور انتخاب بهترین (بدترین) جامعه با یکدیگر مقایسه شده و از بین آن‌ها یک جامعه گزینش می‌شود. سپس پارامتر یا تابعی پارامتری از جامعهٔ گزینش شده براساس نمونه‌های جمع‌آوری شده از این جوامع برآورد می‌شود. برای مثال در مطالعات کشاورزی، یک زارع نه تنها می‌خواهد با کیفیت‌ترین بذر را از بین بذرهای موجود انتخاب کند، بلکه می‌خواهد میزان محصول در هر هکتار از این بذر انتخابی را برآورد کند (کومار و کار، ۲۰۰۱). یک شرکت دارویی نه تنها می‌خواهد میزان رژیم غذایی با بیش‌ترین اثربخشی یا کم‌ترین اثر سوء را از بین رژیم‌های غذایی انتخاب کند، بلکه می‌خواهد میزان تاثیر این نوع رژیم غذایی را نیز برآورد کند (سیل و سامپسون، ۲۰۰۷).

مسئله برآورد پس از گزینش در چند دهه اخیر مورد توجه بسیاری از پژوهش‌گران قرار گرفته است. از جمله سارکادی (۱۹۶۷)، پوتر و روبین اشتاین (۱۹۶۸)، داهیا (۱۹۷۴)، هسیه (۱۹۸۱)، کوهن و ساکروتیز (۱۹۸۸) و ولای سامی (۱۹۹۳) مسئله را برای جامعه‌های نرمال و ولای سامی و همکاران (۱۹۸۸) و نعمت‌الهی و معتمدالشریعتی (۲۰۱۲) مسئله را برای جامعهٔ یکنواخت مطالعه کردند. در برآورد پارامتر جامعهٔ نمایی گزینش شده، ساکروتیز و کان (۱۹۸۴) میانگین $k(\geq 2)$ توزیع نمایی گزینش شده را تحت تابع زیان توان دوم خطا و تابع زیان توان دوم خطای ناوردای مقیاس برآورد کردند. در ادامه، شارما و کومار (۱۹۹۴)، کومار و شارما (۱۹۹۶) و کومار و کار (۲۰۰۱) این مسئله را مورد بررسی قرار دادند. همچنین کومار و همکاران (۲۰۰۹) به مسئله برآورد قابلیت اعتماد و ارشد و مسیرا

(۲۰۱۶) به مسئله برآورد در حالت نامساوی بودن نمونه‌ها تحت تابع زیان توان دوم خطا پرداختند. در برآورد پارامتر جامعهٔ گامای گزینش شده، ولای سامی و شارما (۱۹۸۸ و ۱۹۸۹) برآوردگر ناریب با کم‌ترین واریانس به‌طور یکنواخت[1] (UMVU) پارامتر جامعهٔ گزینش شده را به‌دست آورده و ناپذیرفتنی بودن برآوردگر UMVU را تحت تابع زیان توان دوم خطا بررسی کردند. پس از آن پژوهش‌گران زیادی در این زمینه به بررسی پرداختند که برای مطالعه در این زمینه و یافتن مراجع بیش‌تر می‌توان به مسیرا و همکاران (۲۰۰۶a و ۲۰۰۶b) مراجعه نمود.

فرض کنید $\Pi_1,\ldots,\Pi_k$، $k(\geq 2)$ جامعهٔ مستقل باشند که جامعهٔ i ام دارای توزیعی با تابع توزیع

$$F_{\alpha_i}(x) = 1 - [1 - F(x)]^{\alpha_i} = 1 - [\overline{F}(x)]^{\alpha_i}, \quad i = 1,\ldots,k, \qquad (1)$$

باشد، که در آن $\overline{F}(x) = 1 - F(x)$، $F(0) = 0$ و $F(+\infty) = 1$. از جامعهٔ i ام نمونه تصادفی $X_{i1},\ldots,X_{in_i}$، $i = 1,\ldots,k$ انتخاب می‌شود. با قرار دادن $X_i = \min(X_{i1},\ldots,X_{in_i})$، تابع توزیع X_i عبارت است از

$$G_{\theta_i}(x) = 1 - [1 - F_{\alpha_i}(x)]^{\theta_i} = 1 - [\overline{F}(x)]^{\theta_i}, \quad i = 1,\ldots,k, \qquad (2)$$

که در آن $\theta_i = n_i\alpha_i$، $i = 1,\ldots,k$. توجه شود که از (۲) نتیجه می‌شود که $\overline{G}_{\theta_i}(x) = [\overline{F}(x)]^{\theta_i}$، $i = 1,\ldots,k$. مدل (۱) یا (۲) را مدل نرخ شکست متناسب می‌نامند (گوپتا و همکاران، ۱۹۹۸). برخی از توزیع‌های مشهور مانند توزیع نمایی با $\overline{F}(x) = e^{-x}, x > 0$، توزیع رایلی با $\overline{F}(x) = e^{-x^2/2}, x > 0$، توزیع پارتو با $\overline{F}(x) = \frac{\beta}{x}, x > \beta$ و توزیع بُر با $\overline{F}(x) = (1 + x^{\beta})^{-1}, x > 0$ در این خانواده قرار دارند. برای مشاهدهٔ توزیع‌های بیش‌تر در این خانواده و استنباط درستنمایی و بیزی مدل تنش-نیرو بر اساس داده‌های رکوردی در این خانواده به سنجری و ریاحی (۱۳۹۲) مراجعه شود.

فرض کنید $X_{(1)} \leq \cdots \leq X_{(k)}$ آماره‌های ترتیبی $X_1,\ldots,X_k$ باشند. برای گزینش بهترین (یا بدترین) جامعه از قاعده گزینش طبیعی (گوپتا، ۱۹۶۵) استفاده

[1] Uniformly Minimum Variance Unbiased

می‌شود و جامعهٔ متناظر با $X_{(k)}$ (یا $X_{(1)}$) انتخاب می‌گردد. فرض کنید θ_M (و θ_J) پارامتر θ_i جامعهٔ گزینش شده باشد. در این صورت θ_M و θ_J پارامترهای تصادفی هستند که به صورت

$$\theta_M = \sum_{i=1}^{k} \theta_i I(X_i, \max_{j\neq i} X_j), \quad \theta_J = \sum_{i=1}^{k} \theta_i I(\min_{j\neq i} X_j, X_i), \tag{۳}$$

تعریف می‌شوند، که در آن $I(a,b) = \begin{cases} 1 & a \geq b \\ 0 & a < b \end{cases}$. در حالت $k = 2$ این پارامترها عبارتند از

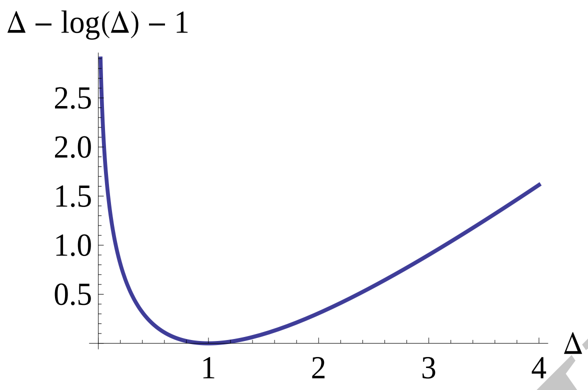
$$\theta_M = \begin{cases} \theta_1 & X_1 \geq X_2 \\ \theta_2 & X_1 < X_2 \end{cases}, \quad \theta_J = \begin{cases} \theta_2 & X_1 \geq X_2 \\ \theta_1 & X_1 < X_2 \end{cases}$$

در این مقاله پارامترهای تصادفی θ_M و θ_J در خانواده توزیع‌های (۲) برآورد می‌شوند. بیش‌تر مطالعات انجام شده در زمینه برآورد پس از گزینش تحت زیان توان دوم خطا $L(h(\theta), \delta) = (\delta - h(\theta))^2$ انجام پذیرفته است، که در آن $\theta = (\theta_1, \cdots, \theta_k)$ و $h(\theta)$ تابعی پارامتری از θ مانند θ_M یا θ_J است (داهیا، ۱۹۷۴؛ کومار و کار، ۲۰۰۱؛ مسیرا و همکاران، 2006a و 2006b؛ رابینز، ۱۹۸۸؛ ولای سامی و شارما، ۱۹۸۸ و ۱۹۸۹؛ ولای سامی، ۱۹۹۳؛ کومار و همکاران، ۲۰۰۹). تابع زیان توان دوم خطا یک تابع متقارن نسبت به $\Delta = \delta - h(\theta)$ است و جریمه یکسانی به کم برآوردن کردن و بیش برآورد کردن نسبت می‌دهد. یکی از تابع‌های نامتقارن، تابع زیان آنتروپی است که به‌صورت

$$L(h(\theta), \delta) = \frac{h(\theta)}{\delta} - \ln(\frac{h(\theta)}{\delta}) - 1. \tag{۴}$$

تعریف می‌شود، که نسبت به $\Delta = \frac{h(\theta)}{\delta}$ نامتقارن است و جریمه‌زیادتری را به کم برآورد کردن نسبت به بیش برآورد کردن می‌دهد. این تابع زیان نسبت به Δ محدب است و دارای یک نقطه مینیمم یکتا در $\Delta = 1$ است (شکل ۱).

تابع زیان آنتروپی برای اولین بار توسط جیمز و اشتاین (۱۹۶۱) معرفی و در برآورد ماتریس واریانس کوواریانس توزیع نرمال چند متغیره مورد استفاده قرار گرفت. در برآورد پارامتر جامعهٔ گزینش شده تحت تابع زیان آنتروپی، نعمت‌الهی و



شکل ۱: نمودار تابع زیان آنتروپی $\Delta = \frac{h(\theta)}{\delta}$

معتمدالشریعتی (۲۰۱۲) به برآورد پارامتر توریع یکنواخت گزینش شده پرداختند. همچنین تحت تابع زیان اشتاین که به صورت $L(h(\theta), \delta) = \frac{\delta}{h(\theta)} - \ln \frac{\delta}{h(\theta)} - 1$ است، نعمت‌الهی و معتمدالشریعتی (۲۰۰۹) به برآورد پارامتر مقیاس جامعهٔ گامای گزینش شده و الموسوی و شانبهوگ (۲۰۱۰) و شانبهوگ و الموسوی (۲۰۱۰) به ترتیب به برآورد پارامترهای توزیع پواسون تعمیم یافته و پواسون بریده شده پرداختند.

تاکنون مطالعه‌ای در مورد برآورد پارامتر گزینش شده جامعه‌ای با تابع توزیع از نوع (۲) تحت تابع زیان آنتروپی (۴) انجام نشده است. در این مقاله به این مهم پرداخته می‌شود. بر این اساس در بخش ۲ برآوردگر با کم‌ترین مخاطره - ناااریب به‌طور یکنواخت[۲] (UMRU) پارامترهای θ_M و θ_J به‌دست آورده می‌شود. در بخش ۳ برآوردگرهای پذیرفتنی و ناپذیرفتنی خطی برای θ_M و θ_J در حالت $k = 2$ را به‌دست آورده و ردهٔ برآوردگرهای غالب بر یک برآوردگر مفروض تعیین و نشان داده می‌شود که برآوردگرهای UMRU پارامترهای θ_M و θ_J ناپذیرفتنی هستند. در بخش ۴ شرایط کافی برای مینیماکس بودن برآوردگرهای پارامترهای θ_M و θ_J را به‌دست آورده و برآوردگرهای مینیماکس پارامتر θ_M تعیین می‌شود. در بخش ۵ برآوردگرهای به‌دست آمده به‌وسیله رسم نمودار مخاطره آن‌ها مقایسه می‌شود.

[۲] Uniformly Minimum Risk Unbiased

سرانجام در بخش ۶ به نتیجه‌گیری و تعمیم نتایج به مدل نرخ شکست وارون متناسب با تابع توزیع $G_\theta(x) = [F(x)]^\theta$ پرداخته می‌شود.

۲ برآوردگرهای UMRU

در این بخش برآوردگرهای UMRU پارامترهای θ_M و θ_J در خانواده توزیع‌های (۲) تحت تابع زیان آنتروپی (۴) به‌دست آورده می‌شوند. با توجه به تعریف نااریبی در لهمن (۱۹۵۱)، برآوردگر δ را برای تابع پارامتری $h(\theta)$ مخاطره - نااریب گویند هرگاه در شرط

$$E_\theta[L(h(\theta), \delta(\mathbf{X}))] \leq E_\theta[L(h(\theta', \delta(\mathbf{X}))], \quad \forall\, \theta' \neq \theta, \tag{۵}$$

صدق کند، که در آن $\mathbf{X} = (X_1, \cdots, X_k)$. تحت تابع زیان (۴)، نامساوی (۵) منجر به شرط $E_\theta[\frac{1}{\delta(\mathbf{X})}] = \frac{1}{h(\theta)}$ برای مخاطره - نااریبی δ می‌شود و اگر $h(\theta)$ پارامتری تصادفی (مانند θ_M یا θ_J) باشد آن گاه شرط مخاطره - نااریبی به‌صورت

$$E_\theta[\frac{1}{\delta(\mathbf{X})}] = E_\theta[\frac{1}{h(\theta)}]. \tag{۶}$$

تبدیل می‌شود. برای به‌دست آوردن برآوردگر مخاطره - نااریب که در شرط (۶) صدق کند از تعمیم روش U-V را بینز (۱۹۸۸) که توسط نعمت‌الهی و معتمدالشریعتی (۲۰۱۲) به‌دست آمده است، استفاده می‌شود. بر طبق این روش ابتدا براساس یک جامعه و یک نمونه X_i از توزیعی با تابع توزیع $G_{\theta_i}(x)$ به فرم (۲)، برای تابع $U(X_i)$ داده شده تابع $V(X_i)$ چنان پیدا می‌شود که

$$E_{\theta_i}[\frac{1}{V(X_i)}] = \frac{1}{\theta_i} E[U(X_i)].$$

با استفاده از (۲) داریم

$$\begin{aligned} E_{\theta_i}[\frac{1}{\theta_i}U(X_i)] &= \int_0^\infty \frac{1}{\theta_i} U(x)\theta_i f(x)[\overline{F}(x)]^{\theta_i - 1} dx \\ &= \int_0^\infty \frac{U(t)f(t)}{\overline{F}(t)}[\int_t^\infty \theta_i f(y)[\overline{F}(y)]^{\theta_i - 1} dy] dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \int_{\circ}^{\infty} [\int_{\circ}^{y} \frac{U(t)f(t)}{\overline{F}(t)} dt] \theta_i f(y) [\overline{F}(y)]^{\theta_i - ۱} dy \\ &= \int_{\circ}^{\infty} \frac{۱}{V(y)} g_{\theta_i}(y) dy = E_{\theta_i}[\frac{۱}{V(X_i)}], \end{aligned}$$

که در آن $g_{\theta_i}(y) = \frac{d}{dy} G_{\theta_i}(y)$ و

$$\frac{۱}{V(X_i)} = \int_{\circ}^{X_i} U(t) \frac{f(t)}{\overline{F}(t)} dt.$$

حال اگر $X_۱, \ldots, X_k$ متغیرهای تصادفی مستقل و X_i دارای تابع توزیع به‌صورت (۲) باشد و تابع پارامتری تصادفی به‌صورت $\frac{۱}{S_k} = [\sum_{i=۱}^{k} \frac{۱}{\theta_i} U_i(\mathbf{X})]$ باشد (همانند $\frac{۱}{\theta_M}$ و $\frac{۱}{\theta_J}$)، آن گاه برآوردگر $\frac{۱}{V_k} = \sum_{i=۱}^{k} \frac{۱}{V_i(\mathbf{X})}$ با

$$\frac{۱}{V_i(\mathbf{X})} = \int_{\circ}^{X_i} U(X_۱, \cdots, X_{i-۱}, t, X_{i+۱}, \cdots, X_k) \frac{f(t)}{\overline{F}(t)} dt, \tag{۷}$$

در شرط $E[\frac{۱}{V_k}] = E[\frac{۱}{S_k}]$ صدق می‌کند (نعمت‌الهی و معتمدالشریعتی، ۲۰۱۲).

برای به‌دست آوردن برآوردگر مخاطره - نااریب برای θ_M در رابطه (۳)، قرار داده می‌شود $U_i(\mathbf{X}) = I(X_i, \max_{j \neq i} X_j)$. در این صورت

$$\frac{۱}{\theta_M} = \sum_{i=۱}^{k} \frac{۱}{\theta_i} I(X_i, \max_{j \neq i} X_j) = \sum_{i=۱}^{k} \frac{۱}{\theta_i} U_i(\mathbf{X}),$$

و با استفاده از (۷) داریم

$$\begin{aligned} \frac{۱}{V_k} &= \sum_{i=۱}^{k} \frac{۱}{V_i(\mathbf{X})} = \sum_{i=۱}^{k} \int_{\circ}^{X_i} I(t, \max_{j \neq i} X_j) \frac{f(t)}{\overline{F}(t)} dt \\ &= \int_{X_{(k-۱)}}^{X_{(k)}} \frac{f(t)}{\overline{F}(t)} dt - \int_{\overline{F}(X_{(k-۱)})}^{\overline{F}(X_{(k)})} \frac{۱}{u} du \\ &= -\ln(\overline{F}(X_{(k)})) + \ln(\overline{F}(X_{(k-۱)})). \end{aligned}$$

حال چون $(X_{(۱)}, \ldots, X_{(k)})$ آمارهٔ بسنده و کامل برای $\theta = (\theta_۱, \ldots, \theta_k)$ است و $E[\frac{۱}{V_k}] = E[\frac{۱}{\theta_M}]$، پس با استفاده از مسیرا و سینگ (۱۹۹۳) و مسیرا (۱۹۹۴)، برآوردگر

$$\delta_M^U(\mathbf{X}) = \frac{۱}{V_k} = \frac{۱}{-\ln(\overline{F}(X_{(k)})) + \ln(\overline{F}(X_{(k-۱)}))}, \tag{۸}$$

برای θ_M تحت تابع زیان آنتروپی (۴) برآوردگری UMRU است. به همین ترتیب با استفاده از (۳) داریم

$$\frac{1}{\theta_J} = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{\theta_i}(\min_{j\neq i}\{X_j, X_i\}) = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{\theta_i} U_i(\mathbf{X}).$$

در نتیجه با استفاده از (۷) داریم

$$\begin{aligned}
\frac{1}{V_k} &= \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{V_i(\mathbf{X})} \\
&= \sum_{i=1}^{k} \int_0^{X_i} I(\min_{j\neq i}\{X_j, X_i\}) \frac{f(t)}{\overline{F}(t)} dt \\
&= \sum_{i=1}^{k} \int_0^{X_{(1)}} \frac{f(t)}{\overline{F}(t)} dt \\
&= -k \ln(\overline{F}(X_{(1)})).
\end{aligned}$$

در نتیجه برآوردگر UMRU پارامتر θ_J عبارت است از

$$\delta_J^U(\mathbf{X}) = \frac{1}{-k \ln(\overline{F}(X_{(1)}))}. \qquad (۹)$$

تذکر ۱ : اگر X_i دارای تابع توزیع به فرم $G_{\theta_i}(x)$ در (۲) باشد آن گاه به راحتی می‌توان نشان داد $T_i = -\ln(\overline{F}(X_i))$ دارای توزیع نمایی با میانگین $\frac{1}{\theta_i}$، $i = 1, \ldots, k$ است. حال اگر $T_{(1)} \leq \cdots \leq T_{(k)}$ آماره‌های ترتیبی $T_1, \ldots, T_k$ باشند، آن گاه برآوردگرهای UMRU پارامترهای θ_M و θ_J به ترتیب عبارتند از

$$\delta_M^U(\mathbf{X}) = \frac{1}{T_{(k)} - T_{(k-1)}}, \quad \delta_J^U(\mathbf{X}) = \frac{1}{kT_{(1)}}. \qquad (۱۰)$$

بنابراین از این به بعد هر جا لازم باشد از آماره‌های ترتیبی $T_{(1)} \leq \cdots \leq T_{(k)}$ استفاده می‌شود. لازم به ذکر است که تاکنون پارامتر گزینش شده جامعهٔ نمایی تحت تابع زیان آنتروپی (۴) برآورد نشده است و نتایج حاصل را می‌توان برای تمام اعضای خانواده توزیع‌های به‌صورت (۲) به کار برد.

۳ برآوردگرهای پذیرفتنی و ناپذیرفتنی

در این بخش در حالت دو جامعه ($k=۲$) ردهٔ برآوردگرهای پذیرفتنی خطی برای θ_M و θ_J و همچنین ردهٔ برآوردگرهای غالب بر یک برآوردگر مفروض به‌دست آورده می‌شود.

در خانواده توزیع‌های (۲) با $k=۲$، به راحتی می‌توان نشان داد که برآوردگر ماکسیمم درستنمایی (ML) پارامتر θ_i عبارت است از $\widehat{\theta}_i=\frac{۱}{-\ln(\overline{F}(X_{(i)}))}=\frac{۱}{T_i}$، $i=۱,۲$. بنابراین برآوردگر طبیعی برای θ_M و θ_J به ترتیب عبارتند از

$$\delta_M^N(\mathbf{X})=\frac{۱}{T_{(۲)}}\ ,\qquad \delta_J^N(\mathbf{X})=\frac{۱}{T_{(۱)}}.$$

در ادامه براساس این برآوردگرها، رده‌هایی از برآوردگرهای θ_M و θ_J ساخته می‌شوند و پذیرفتنی یا ناپذیرفتنی بودن آن‌ها در این رده‌ها بررسی می‌شوند.

۱.۳ رده برآوردگرهای پذیرفتنی خطی

رده برآوردگرهای خطی به ترتیب برای θ_M و θ_J را به‌صورت

$$D_M^c=\{\delta_{۱c}:\delta_{۱c}(\mathbf{X})=\frac{c}{T_{(۲)}},c>۰\},\tag{۱۱}$$

$$D_J^c=\{\delta_{۲c}:\delta_{۲c}(\mathbf{X})=\frac{c}{T_{(۱)}},c>۰\},\tag{۱۲}$$

در نظر بگیرید. در این زیربخش مقادیری از c تعیین می‌شود که برآوردگر $\delta_{۱c}$ ($\delta_{۲c}$) در رده برآوردگرهای D_M^c (D_J^c) برای θ_M (θ_J) پذیرفتنی باشد.

لم ۱ : فرض کنید $T_۱,T_۲$ متغیرهای تصادفی مستقل و T_i دارای توزیع نمایی با میانگین $\frac{۱}{\theta_i}$ و $T_{(۱)}\leq T_{(۲)}$ آماره‌های ترتیبی آن‌ها باشند. اگر قرار داده شود $\lambda=\frac{\min(\theta_۱,\theta_۲)}{\max(\theta_۱,\theta_۲)}$ ($۰<\lambda\leq ۱$) آن‌گاه

الف) $E[\theta_M T_{(۲)}]=۲-\frac{\lambda^۲+۱}{(\lambda+۱)^۲}$، که تابعی صعودی از λ است.

ب) $E[\theta_J T_{(۱)}]=\frac{\lambda^۲+۱}{(\lambda+۱)^۲}$، که تابعی نزولی از λ است.

پ) $E[\ln(\theta_M T_{(۲)})]=\psi(۱)+\frac{\lambda}{\lambda+۱}\ln(\frac{\lambda+۱}{\lambda})+\frac{۱}{\lambda+۱}\ln(\lambda+۱)$

ت) $E[\ln(\theta_J T_{(1)})] = \psi(1) - \frac{\lambda}{\lambda+1}\ln(\frac{\lambda+1}{\lambda}) - \frac{1}{\lambda+1}\ln(\lambda+1)$
که در آن $\psi(x) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$ تابع دی‌گاما است.

برهان : با توجه به یکسان بودن برهان قسمت‌های مختلف، تنها برهان قسمت پ ارائه می‌شود.

$$
\begin{aligned}
E[\ln(\theta_M T_{(2)})] &= \int_0^\infty \{\int_0^{t_2} \ln(\theta_2 t_2)\theta_1 e^{-\theta_1 t_1} dt_1\}\theta_2 e^{-\theta_2 t_2} dt_2 \\
&+ \int_0^\infty \{\int_0^{t_1} \ln(\theta_1 t_1)\theta_2 e^{-\theta_2 t_2} dt_2\}\theta_1 e^{-\theta_1 t_1} dt_1. \\
&= \int_0^\infty (1 - e^{-\theta_2 t_2}) \ln(\theta_2 t_2)\theta_2 e^{-\theta_2 t_2} dt_2 \\
&+ \int_0^\infty (1 - e^{-\theta_1 t_1}) \ln(\theta_1 t_1)\theta_1 e^{-\theta_1 t_1} dt_1.
\end{aligned}
$$

با فرض $\theta_1 < \theta_2$ ($\lambda = \frac{\theta_1}{\theta_2}$) و تغییر متغیر $y = \theta_2 t_2$ در انتگرال اول و $y = \theta_1 t_1$ در انتگرال دوم داریم

$$
\begin{aligned}
E[\ln(\theta_M T_{(2)})] &= \int_0^\infty (1 - e^{-\lambda y}) \ln(y) e^{-y} dy \\
&+ \int_0^\infty (1 - e^{-\frac{y}{\lambda}}) \ln(y) e^{-y} dy \\
&= \psi(1) + \frac{1}{\lambda+1}\ln(\lambda+1) + \frac{\lambda}{\lambda+1}\ln(\frac{\lambda+1}{\lambda}).
\end{aligned}
$$

برای حالت $\theta_1 > \theta_2$ نیز همین نتیجه حاصل خواهد شد

قضیه ۱ : فرض کنید X_1, X_2 متغیرهای تصادفی مستقل دارای تابع توزیع به صورت (۲) و آماره‌های ترتیبی $X_{(1)} \leq X_{(2)}$ باشند. تحت تابع زیان آنتروپی (۴) برآوردگرهای $\delta_{1c}(\mathbf{X}) = \frac{c}{T_{(2)}}$ در ردهٔ برآوردگرهای D_M^c پذیرفتنی هستند اگر و فقط اگر $c \in [1, \frac{3}{2}]$ باشد.

برهان : تابع مخاطره برآوردگر $\delta_{1c}(\mathbf{X}) = \frac{c}{T_{(2)}}$ عبارت است از

$$R(\theta_M, \frac{c}{T_{(2)}}) = E[\frac{1}{c}\theta_M T(2) - \ln(\frac{1}{c}\theta_M T_{(2)}) - 1].$$

با استفاده از لم ۱، این تابع مخاطره در $c = c_1(\lambda)$ مینیمم می‌شود که در آن

$$c_1(\lambda) = E[\theta_M T_{(2)}] = 2 - \frac{\lambda^2 + 1}{(\lambda+1)^2},$$

تابعی صعودی از $\circ < \lambda \leq ۱$ است. در نتیجه $\lim_{\lambda\to\circ^+} c(\lambda) = \inf_{\circ<\lambda\leq ۱} c(\lambda) = ۱$ و $\sup_{\circ<\lambda\leq ۱} c(\lambda) = c(۱) = \frac{۳}{۲}$. بنابراین هر مقدار $c \in (۱, \frac{۳}{۲}]$ تابع مخاطره $R(\theta_M, \frac{c}{T_{(۲)}})$ را برای هر $\circ < \lambda < ۱$ مینیمم می‌کند و این مقادیر c برآوردگر پذیرفتنی را به‌دست می‌دهد. پذیرفتنی بودن $\delta_{۱c}$ به ازای $c = ۱$ از پیوستگی تابع مخاطره حاصل می‌شود. همچنین برای هر مقدار ثابت $\circ < \lambda < ۱$، تابع مخاطره $R(\theta_M, \frac{c}{T_{(۲)}})$ تابعی پیوسته و نزولی از c برای $c < c_۱(\lambda)$ و صعودی برای $c > c_۱(\lambda)$ است. چون برای هر $\circ < \lambda < ۱$، $۱ \leq c_۱(\lambda) \leq \frac{۳}{۲}$، نتیجه می‌شود که $\delta_{۱c} = \frac{c}{T_{(۲)}}$ برای $c \in (\circ, ۱) \cup (\frac{۳}{۲}, \infty)$ ناپذیرفتنی است، که برهان را کامل می‌کند.

قضیه ۲ : تحت فرض‌های قضیه ۱ و تحت تابع زیان آنتروپی (۴)، برآوردگرهای $\delta_{۲c} = \frac{c}{T_{(۱)}}$ در ردهٔ برآوردگرهای D_J^c پذیرفتنی هستند اگر و فقط اگر $c \in [\frac{۱}{۲}, ۱]$.

برهان : مشابه برهان قضیه ۱ ثابت می‌شود.

تذکر ۲ : با توجه به قضیه‌های ۱ و ۲، برآوردگر طبیعی $\delta_M^N = \frac{۱}{T_{(۲)}}$ در رده برآوردگرهای D_M^c برای θ_M پذیرفتنی است. همچنین برآوردگر طبیعی $D_J^N = \frac{۱}{T_{(۱)}}$ و برآوردگر UMRU پارامتر θ_J یعنی $\delta_J^U = \frac{۱}{۲T_{(۱)}}$ در رده برآوردگرهای D_J^c پذیرفتنی هستند.

۲.۳ شرایط کافی برای ناپذیرفتنی بودن برآوردگرها

حالت کلی‌تر رده برآوردگرهای D_M^c و D_J^c در (۱۱) و (۱۲) به‌صورت

$$D_M = \{\delta_\psi : \delta_\psi(\mathbf{X}) = \frac{۱}{T_{(۲)}}\psi(\frac{T_{(۱)}}{T_{(۲)}}) = \frac{۱}{T_{(۲)}}\psi(Y)\},$$
$$D_J = \{\delta_\varphi : \delta_\varphi(\mathbf{X}) = \frac{۱}{T_{(۱)}}\varphi(\frac{T_{(۲)}}{T_{(۱)}}) = \frac{۱}{T_{(۱)}}\varphi(V)\},$$

است، که در آن $Y = \frac{T_{(۱)}}{T_{(۲)}}$، $V = \frac{T_{(۲)}}{T_{(۱)}}$ و $\psi(\cdot)$ و $\varphi(\cdot)$ تابع‌های حقیقی مقدار که به ترتیب روی بازه‌های $[\circ, ۱)$ و $[۱, \infty)$ هستند. در این بخش شرایطی به‌دست آورده می‌شوند که برآوردگر $\delta_{\psi_۱} = \frac{۱}{T_{(۲)}}\psi_۱(Y)$ ($\delta_{\varphi_۱} = \frac{۱}{T_{(۱)}}\varphi_۱(V)$) بر برآوردگرهای رده‌ی D_M (D_J) غلبه یابد و ناپذیرفتنی بودن برآوردگرهای مورد نظر را نتیجه دهد.

با استفاده از این مطلب، ناپذیرفتنی بودن برآوردگرهای UMRU نتیجه خواهد شد. برای این منظور ابتدا لم زیر بیان می‌شود.

لم ۲ : تحت شرایط قضیه ۱، فرض کنید $Y = \frac{T_{(1)}}{T_{(2)}}$، $V = \frac{T_{(2)}}{T_{(1)}}$، $S = \theta_M T_{(2)}$، $U = \theta_J T_{(1)}$ و $\lambda = \frac{\min(\theta_1,\theta_2)}{\max(\theta_1,\theta_2)}$. با قرار دادن

$$g_\lambda(x) = 2\frac{(1+\lambda x)^{-3} + \lambda(\lambda+x)^{-3}}{(1+\lambda x)^{-2} + (\lambda+x)^{-2}},$$

نتیجه می‌شود

الف) $$f_Y(y) = \frac{\lambda}{(1+\lambda y)^2} + \frac{\lambda}{(\lambda+y)^2},\quad y \leq 1$$

ب) $$f_{S|Y}(s|y) = \frac{1}{f_Y(y)}\{\frac{\lambda s e^{-s(1+\lambda y)}}{(1+\lambda y)^2} + \frac{\frac{s}{\lambda}e^{-s(1+\frac{y}{\lambda})}}{(1+\frac{y}{\lambda})^2}\},\quad s > 0$$

پ) $$f_V(v) = \frac{\lambda}{(1+\lambda v)^2} + \frac{\lambda}{(\lambda+v)^2},\quad v \geq 1$$

ت) $$f_{U|V}(u|v) = \frac{1}{f_V(v)}\{\frac{\lambda u e^{-u(1+\lambda v)}}{(1+\lambda v)^2} + \frac{\frac{u}{\lambda}e^{-u(1+\frac{v}{\lambda})}}{(1+\frac{v}{\lambda})^2}\},\quad u > 0$$

ث) برای هر $0 < y \leq 1$ اگر $\psi_{11}(y) = \frac{2}{1+y}$ آن گاه

$$\sup_{0<\lambda<1} g_\lambda(y) = \frac{2}{1+y} = \psi_{11}(y).$$

ج) برای هر $v \geq 1$ اگر $\varphi_{11}(v) = \frac{2}{1+v}$ آن گاه

$$\inf_{0<\lambda<1} g_\lambda(v) = \frac{2}{1+v} = \varphi_{11}(v).$$

برهان : الف)

$$\begin{aligned}
F_Y(y) &= 1 - P(\frac{T_{(1)}}{T_{(2)}} > y) \\
&= 1 - P(T_1 < T_2, T_1 > T_2 y) + P(T_1 \geq T_2, T_2 > T_1 y) \\
&= 1 - \{\int_0^\infty \{\int_{t_2 y}^{t_2} \theta_1 e^{-\theta_1 t_1} dt_1\}\theta_2 e^{-\theta_2 t_2} dt_2 \\
&+ \int_0^\infty \{\int_{t_1 y}^{t_1} \theta_2 e^{-\theta_2 t_2} dt_2\}\theta_1 e^{-\theta_1 t_1} dt_1\} \\
&= 2 - \frac{1}{1+\lambda y} - \frac{\lambda}{\lambda+y}.
\end{aligned}$$

بنابراین

$$f_Y(y) = \frac{۱}{(۱+\lambda y)^۲} + \frac{\lambda}{(\lambda + y)^۲}.$$

ب)

$$F_{S|Y}(s|y) = P(S \le s|Y = y) = \frac{۱}{f_Y(y)} \lim_{h \to ۰^+} \frac{N(h)}{h},$$

که در آن

$$\begin{aligned}
N(h) &= P(S \le s, y-h \le Y \le y) \\
&= P(T_۱ < T_۲, T_۲ \le \frac{s}{\theta_۲}, T_۲(y-h) \le T_۱ \le T_۲ y) \\
&+ P(T_۲ < T_۱, T_۱ \le \frac{s}{\theta_۱}, T_۱(y-h) \le T_۲ \le T_۱ y) \\
&= \int_۰^{\frac{s}{\theta_۲}} \{\int_{t_۲(y-h)}^{t_۲ y} \theta_۱ e^{-\theta_۱ t_۱} dt_۱\} \theta_۲ e^{-\theta_۲ t_۲} dt_۲ \\
&+ \int_۰^{\frac{s}{\theta_۱}} \{\int_{t_۱(y-h)}^{t_۱ y} \theta_۲ e^{-\theta_۲ t_۲} dt_۲\} \theta_۱ e^{-\theta_۱ t_۱} dt_۱ \\
&= \frac{۱}{۱+\lambda(y-h)} - \frac{۱}{۱+\lambda y} - \frac{e^{-s[۱+\lambda(y-h)]}}{۱+\lambda(y-h)} + \frac{e^{-s(۱+\lambda y)}}{۱+\lambda y} \\
&+ \frac{۱}{۱+(y-h)/\lambda} - \frac{۱}{۱+y/\lambda} - \frac{e^{-s[۱+(y-h)/\lambda]}}{۱+(y-h)/\lambda} + \frac{e^{-s(۱+y/\lambda)}}{۱+y/\lambda}.
\end{aligned}$$

بنابراین

$$\begin{aligned}
\lim_{h \to ۰^+} \frac{N(h)}{h} &= \frac{\lambda}{(۱+\lambda y)^۲} - \frac{\lambda\{s(۱+\lambda y)+۱\}e^{-s(۱+\lambda y)}}{(۱+\lambda y)^۲} \\
&+ \frac{۱/\lambda}{(۱+y/\lambda)^۲} - \frac{\{s(۱+y/\lambda)\}e^{-s(۱+y/\lambda)}}{\lambda(۱+y/\lambda)^۲}.
\end{aligned}$$

در نتیجه

$$\begin{aligned}
f_{S|Y}(s|y) &= \frac{d}{ds} F_{S|Y}(s|y) \\
&= \frac{۱}{f_Y(y)} \{\frac{\lambda s e^{-s(۱+\lambda y)}}{(۱+\lambda y)^۲} + \frac{s e^{-s(۱+y/\lambda)}}{\lambda(۱+y/\lambda)^۲}\}.
\end{aligned}$$

برهان قسمت‌های پ و ت مشابه قسمت‌های الف و ب است.

ث) با توجه به این‌که

$$\lim_{\lambda \to 1^-} g_\lambda(y) = 2\frac{(1+y)^{-3}}{(1+y)^{-2}} = \frac{2}{1+y}.$$

برای $y \geq 1$ نابرابری $g_\lambda(y) \leq \frac{2}{1+y}$ برقرار است. بنابراین $\sup_{0<\lambda<1} g_\lambda(y) = \frac{2}{1+y}$.
قسمت ج نیز به طور مشابه اثبات می‌شود.

قضیه ۳ : تحت فرض‌های قضیه ۱، فرض کنید $\delta_\psi = \frac{1}{T_{(2)}}\psi(Y) \in D_M$ برآوردگری برای θ_M باشد. اگر $\psi_{11}(Y) = \frac{2}{1+y}$ و برای هر $\theta = (\theta_1, \theta_2) \in R_+^2$، $P_\theta(\psi(Y) > \psi_{11}(Y)) > 0$، آن‌گاه تحت تابع زیان آنتروپی (۴) برآوردگر $\delta_\psi = \frac{1}{T_{(2)}}\psi(Y)$ برای θ_M ناپذیرفتنی است و توسط برآوردگر $\delta_{\psi_1} = \frac{1}{T_{(2)}}\psi_1(Y)$ مغلوب می‌شود که در آن

$$\psi_1(Y) = \min(\psi_{11}(Y), \psi(Y)) = \begin{cases} \psi_{11}(Y) & \psi(Y) > \psi_{11}(Y) \\ \psi(Y) & \psi(Y) \leq \psi_{11}(Y) \end{cases}.$$

برهان : برای هر $0 < \lambda < 1$ تفاوت مخاطره‌های δ_ψ و δ_{ψ_1} عبارت است از

$$\begin{aligned}
\Delta &= R(\theta_M, \delta_\psi) - R(\theta_M, \delta_{\psi_1}) \\
&= E[\frac{\theta_M T_{(2)}}{\psi(Y)} - \ln(\frac{\theta_M T_{(2)}}{\psi(Y)}) - 1] - E[\frac{\theta_M T_{(2)}}{\psi_1(Y)} - \ln(\frac{\theta_M T_{(2)}}{\psi_1(Y)}) - 1] \\
&= Et[\theta_M T_{(2)}(\frac{1}{\psi(Y)} - \frac{1}{\psi_1(Y)}) - \ln(\frac{\psi_1(Y)}{\psi(Y)})] \\
&= E\{E(\theta_M T_{(2)}|Y)(\frac{1}{\psi(Y)} - \frac{1}{\psi_1(Y)}) - \ln(\frac{\psi_1(Y)}{\psi(Y)})\} \\
&= E_\theta[D_\theta(Y)]. \qquad (13)
\end{aligned}$$

با استفاده از لم ۲-ب داریم

$$\begin{aligned}
E(\theta_M T_{(2)}|Y=y) &= E(S|Y=y) \\
&= \frac{1}{f_Y(y)}\{2[\frac{\lambda}{(1+\lambda y)^3} + \frac{1}{\lambda(1+\frac{y}{\lambda})^3}]\}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \ 2\frac{(1+\lambda y)^{-3}+\lambda(\lambda+y)^{-3}}{(1+\lambda y)^{-2}+(\lambda+y)^{-2}} \\
&= \ g_\lambda(y),
\end{aligned}
$$

که $g_\lambda(\cdot)$ در لم ۲ داده شده است. بنابراین طبق لم ۲–ث، $E(\theta_M T_2|Y) \leq \psi_{11}(Y)$. حال اگر $\psi(Y) \leq \psi_{11}(Y)$ آن‌گاه برای هر $\theta \in R_+^2$، $D_\theta(Y) = 0$. همچنین اگر $\psi(Y) > \psi_{11}(Y)$، آن گاه $\psi_1(Y) = \psi_{11}(Y)$ و در نتیجه از رابطهٔ (۱۳) داریم

$$
\begin{aligned}
D_\theta(Y) &= E(\theta_M T_{(2)}|Y)(\frac{1}{\psi(Y)} - \frac{1}{\psi_{11}(Y)}) - \ln(\frac{\psi_{11}(Y)}{\psi(Y)}) \\
&\geq \psi_{11}(Y)(\frac{1}{\psi(Y)} - \frac{1}{\psi_{11}(Y)}) - \ln(\frac{\psi_{11}(Y)}{\psi(Y)}) \\
&= \frac{\psi_{11}(Y)}{\psi(Y)} - 1 - \ln(\frac{\psi_{11}(Y)}{\psi(Y)}) > 0, \ \ \forall\, \theta \in R_+^2,
\end{aligned}
$$

زیرا برای $x \neq 1$، $x - 1 - \ln(x) > 0$. چون برای هر $\theta \in R_+^2$، $P_\theta(\psi(Y) > \psi_{11}(Y)) > 0$، پس نتیجه می‌شود که برای هر $\theta \in R_+^2$، $\Delta > 0$ است.

قضیه ۴ : تحت فرض‌های قضیه ۱، فرض کنید $\delta_\varphi = \frac{1}{T_{(1)}}\varphi(V) \in D_J$ برآوردگری برای θ_J باشد. اگر $\varphi_{11}(V) = \frac{2}{1+v}$ و برای هر $\theta \in R_+^2$، $P_\theta(\varphi(V) < \varphi_{11}(V)) > 0$، آن گاه تحت تابع زیان آنتروپی (۴) برآوردگر $\delta_\varphi = \frac{1}{T_{(1)}}\varphi(V)$ برای θ_J ناپذیرفتنی است و توسط برآوردگر $\delta_{\varphi_1} = \frac{1}{T_{(1)}}\varphi_1(V)$ مغلوب می‌شود که در آن

$$
\varphi_1(Y) = \max(\varphi_{11}(V), \varphi(V)) = \begin{cases} \varphi(V) & \varphi(V) \geq \varphi_{11}(V) \\ \varphi_{11}(V) & \varphi(V) < \varphi_{11}(V) \end{cases} .
$$

برهان : مشابه برهان قضیه ۳ ثابت می‌شود.

نتیجه ۱: با توجه به این که در حالت $k = 2$ برآوردگر UMRU پارامتر θ_M داده شده در (۱۰) به‌صورت

$$
\delta_M^U = \frac{1}{T_{(2)} - T_{(1)}} = \frac{1}{T_{(2)}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{T_{(1)}}{T_{(2)}}} = \frac{1}{T_{(2)}}\psi(\frac{T_{(1)}}{T_{(2)}}),
$$

است، که در آن $\psi(\frac{T_{(۱)}}{T_{(۲)}}) = \psi(Y) = \frac{۱}{۱-Y}$ و همچنین $y > \frac{۱}{۳} \Leftrightarrow \frac{۲}{۱+y} > \frac{۱}{۱-y}$ پس $P_\theta(\psi(Y) > \psi_{۱۱}(Y)) > ۰$. بنابراین طبق قضیه ۳ برآوردگر δ_M^U ناپذیرفتنی است و توسط برآوردگر زیر مغلوب می‌شود.

$$\begin{aligned}
\delta_M^* &= \frac{۱}{T_{(۲)}}\min(\psi(Y), \psi_{۱۱}(Y)) \\
&= \frac{۱}{T_{(۲)}}\min(\frac{۱}{۱-\frac{T_{(۱)}}{T_{(۲)}}}, \frac{۲}{۱+\frac{T_{(۱)}}{T_{(۲)}}}t) \\
&= \min(\frac{۱}{T_{(۲)}-T_{(۱)}}, \frac{۲}{T_{(۱)}+T_{(۲)}}). \qquad (۱۴)
\end{aligned}$$

به‌علاوه، برآوردگرهای خطی $\delta_{۱c}$ در رده‌ی برآوردگرهای خطی D_M^c به صورت

$$\delta_{۱c} = \frac{c}{T_{(۲)}} = \frac{۱}{T_{(۲)}}\psi(Y),$$

هستند، که در آن $c = \psi(Y)$ و $c > \frac{۲}{۱+Y} \Leftrightarrow Y > \frac{۲}{c} - ۱$. چون $\frac{۲}{c} - ۱ < ۱ \Leftrightarrow c > ۱$ پس به ازای $c > ۱$، $P_\theta(\psi(Y) > \psi_{۱۱}(Y)) > ۰$ و در نتیجه طبق قضیه ۳ برآوردگرهای خطی $\delta_{۱c} = \frac{c}{T_{(۲)}}$ به ازای $c > ۱$ در ردهٔ کلی برآوردگرهاناپذیرفتنی بوده و توسط براوردگر $\delta_۱^* = \min\{\frac{c}{T_{(۲)}}, \frac{۲}{T_{(۱)}+T_{(۲)}}\}$ مغلوب می‌شوند. اما به ازای $c = ۱$ برآوردگر $\delta_{۱c}$ به شکل $\delta_{۱۱} = \frac{۱}{T_{(۲)}} = \frac{۱}{T_{(۲)}}\psi(Y)$ با $\psi(Y) = ۱$ است. از طرفی چون همواره $\frac{۲}{۱+Y} \le ۱$ و یا $\psi(Y) \le \psi_{۱۱}(Y)$، پس $P(\psi(Y) > \psi_{۱۱}(Y)) = ۰$. در نتیجه ناپذیرفتنی بودن برآوردگر طبیعی $\delta_{۱۱} = \delta_M^N = \frac{۱}{T_{(۲)}}$ را از قضیه ۳، نمی‌توان نتیجه گرفت.

نتیجه ۲: مشابه نتیجه ۱، با استفاده از قضیه ۴ می‌توان نتیجه گرفت که برآوردگرهای خطی به فرم $\delta_{۲c} = \frac{c}{T_{(۱)}}$ به ازای $c > ۱$، در ردهٔ کلی براوردگرها، ناپذیرفتنی بوده و توسط برآوردگر $\delta_۲^* = \max\{\frac{c}{T_{(۱)}}, \frac{۲}{T_{(۱)}+T_{(۲)}}\}$ مغلوب می‌شوند. بنابراین برآوردگر UMRU پارامتر θ_M در حالت $k = ۲$، یعنی $\delta_J^U = \frac{۱}{۲T_{(۱)}}$ ناپذیرفتنی است. به‌طور مشابه با نتیجه ۱، به ازای $c = ۱$ ناپذیرفتنی بودن برآوردگر طبیعی $\delta_J^N = \frac{۱}{T_{(۱)}}$ را از قضیه ۴ نمی‌توان نتیجه گرفت.

۴ برآوردگرهای مینیماکس

در این بخش در حالت $k=۲$ شرایطی به‌دست آورده می‌شود که تحت آن می‌توان مینیماکس بودن یک برآوردگر پارامتر θ_M یا θ_J را تحت تابع زیان آنتروپی (۱۲) بررسی کرد. برای این منظور از نتایج ساکرووتیز و کان (۱۹۸۷) استفاده می‌شود. در ابتدا مسئله در حالت تک مولفه‌ای در نظر گرفته می‌شود. فرض کنید X_i، $i=۱,۲$ دارای توزیعی با تابع توزیع $G_{\theta_i}(x)$ داده شده در (۲) با تابع چگالی احتمال

$$g(x_i|\theta_i)=\theta_i f(x_i)[\overline{F}(x_i)]^{\theta_i-۱},\quad x_i>۰,\ \theta_i>۰.$$

باشد، حال اگر برای θ_i توزیع پیشین گاما $\mathrm{Gamma}(\frac{۱}{m},\frac{۱}{m})$ با تابع چگالی

$$\pi_i^m(\theta_i)=\frac{۱}{m^{\frac{۱}{m}}\Gamma(\frac{۱}{m})}\theta_i^{\frac{۱}{m}-۱}e^{-\frac{\theta_i}{m}},\quad \theta_i>۰,\ i=۱,۲. \tag{۱۵}$$

در نظر گرفته شود، آن‌گاه با استفاده از $g(x_i|\theta_i)$ و (۱۵)، توزیع پسین θ_i به شرط $X_i=x_i$ توزیع گاما $\mathrm{Gamma}(\frac{۱}{m}+۱,\frac{۱}{m}-\ln(\overline{F}(x_i)))$ است. به راحتی می‌توان نشان داد که برآورد بیزی θ_i تحت تابع زیان آنتروپی (۴) عبارت است از

$$\delta_{\pi_i^m}(x_i)=E(\theta_i|x_i)=\frac{\frac{۱}{m}+۱}{\frac{۱}{m}-\ln(\overline{F}(x_i))},\quad i=۱,۲. \tag{۱۶}$$

همچنین مخاطرهٔ پسین برآورد بیزی $\delta_{\pi_i^m}(x_i)$ تحت تابع زیان آنتروپی (۴) عبارت است از

$$\begin{aligned}\gamma(x_i,\delta_{\pi_i^m}(x_i)) &= E(\frac{\theta_i}{\delta_{\pi_i^m}(x_i)}-\ln(\frac{\theta_i}{\delta_{\pi_i^m}(x_i)})-۱|x_i)\\ &= -E[\ln(\theta_i)|x_i]+\ln(\delta_{\pi_i^m}(x_i))\\ &= -\psi(\frac{۱}{m}+۱)+\ln(\frac{۱}{m}-\ln(\overline{F}(x_i)))+\ln(\delta_{\pi_i^m}(x_i))\\ &= \ln(\frac{۱}{m}+۱)-\psi(\frac{۱}{m}+۱),\end{aligned} \tag{۱۷}$$

که به x_i بستگی ندارد. در نتیجه مخاطرهٔ بیزی برآوردگر بیزی $\delta_{\pi_i^m}(X_i)$ عبارت است از

$$\gamma^*(\pi_i^*, \delta_{\pi_i^m}) = \ln(\frac{1}{m} + 1) - \psi(\frac{1}{m} + 1), \quad i = 1, 2. \tag{18}$$

حال برآوردیابی بیزی پارامترهای θ_M و θ_J را در نظر بگیرید. فرض کنید θ_1 و θ_2 دو متغیر تصادفی مستقل و هم‌توزیع هر یک با توزیع (۱۵) باشند. در این صورت با استفاده از (۱۶) و لم ۲.۳ در ساکرووتیز و کان (۱۹۸۷)، برآوردگر یکتای بیز θ_M و θ_J تحت تابع زیان آنتروپی (۴) و تحت پیشین $\pi^m = (\pi_1^m, \pi_2^m)$ به ترتیب عبارت است از

$$\delta_M^m(\mathbf{X}) = \frac{\frac{1}{m} + 1}{\frac{1}{m} - \ln(\overline{F}(X_{(2)}))} \quad , \quad \delta_J^m(\mathbf{X}) = \frac{\frac{1}{m} + 1}{\frac{1}{m} - \ln(\overline{F}(X_{(1)}))}.$$

توجه شود که برآوردگرهای بیزی حدی $\delta_M^\infty(\mathbf{X}) = \frac{1}{-\ln(\overline{F}(X_{(2)}))}$ و $\delta_J^\infty(\mathbf{X}) = \frac{1}{-\ln(\overline{F}(X_{(1)}))}$ پارامترهای θ_M و θ_J، همان برآوردگرهای بیزی تعمیم یافته θ_M و و θ_J تحت پیشین ناسره $\pi(\theta_i) = \frac{1}{\theta_i}, \ \theta_i > 0$، $i = 1, 2$ هستند. چون مخاطره‌ی پسین (۱۷) در حالت تک مولفه‌ای به $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ بستگی ندارد، بنابراین طبق قضیه ۱.۳ ساکرووتیز و کان (۱۹۸۷) مخاطره‌ی بیزی برآوردگرهای بیزی δ_M^m و δ_J^m نیز همانند (۱۸) است، یعنی برای $i = 1, 2$،

$$\gamma_1^*(\pi^m, \delta_M^m) = \gamma_2^*(\pi^m, \delta_J^m) = \gamma^*(\pi_i, \delta_{\pi_i^m}) = \ln(\frac{1}{m} + 1) - \psi(\frac{1}{m} + 1),$$

بنابراین

$$\lim_{m \to \infty} \gamma_1^*(\pi^m, \delta_M^m) = \lim_{m \to \infty} \gamma_2^*(\pi^m, \delta_J^m) = -\psi(1) = \gamma,$$

که در آن $\gamma = 0/5772156$. حال با استفاده از قضیه ۲.۳ در ساکرووتیز و کان (۱۹۸۷)، برآوردگر δ_M و δ_J به ترتیب برای δ_M^m و δ_J^m مینیماکس خواهند بود اگر

$$R(\theta_M, \delta_M) \leq \lim_{m \to \infty} \gamma_1^*(\pi^m, \delta_M^m) = \gamma, \tag{19}$$

و

$$R(\theta_J,\delta_J)\leq \lim_{m\to\infty}\gamma_{۲}^{*}(\pi^m,\delta_J^m)=\gamma, \qquad (۲۰)$$

که در آن $R(\theta_M,\delta_M)$ و $R(\theta_J,\delta_J)$ به ترتیب تابع‌های مخاطره برآوردگرهای δ_M و δ_J تحت تابع زیان آنتروپی (۴) هستند.

در ادامه نشان داده می‌شود برآوردگر UMRU پارامتر θ_M، $\delta_M^U=\frac{۱}{T_{(۲)}-T_{(۱)}}$ و برآوردگر طبیعی (و بیزی تعمیم یافته) $\delta_M^N=\frac{۱}{T_{(۲)}}$ مینیماکس هستند. در مورد برآوردگر UMRU توجه کنید که

$$\begin{aligned}
R(\theta_M,\delta_M^U) &= R(\theta_M,\frac{۱}{T_{(۲)}-T_{(۱)}})\\
&= E[\theta_M(T_{(۲)}-T_{(۱)})-\ln\{\theta_M(T_{(۲)}-T_{(۱)})\}-۱]\\
&= \int_{۰}^{\infty}\{\int_{t_۱}^{\infty}[\theta_۲(t_۲-t_۱)\\
&- \ln(\theta_۲(t_۲-t_۱))-۱]\theta_۲e^{-\theta_۲t_۲}dt_۲\}\theta_۱e^{-\theta_۱t_۱}dt_۱\\
&+ \int_{۰}^{\infty}\{\int_{t_۲}^{\infty}[\theta_۱(t_۱-t_۲)\\
&- \ln(\theta_۱(t_۱-t_۲))-۱]\theta_۱e^{-\theta_۱t_۱}dt_۱\}\theta_۲e^{-\theta_۲t_۲}dt_۲. \qquad (۲۱)
\end{aligned}$$

با تغییر متغیر $y=\theta_۲(t_۲-t_۱)$ در انتگرال عبارت اول و $y=\theta_۱(t_۱-t_۲)$ در انتگرال عبارت دوم داریم

$$\begin{aligned}
R(\theta_M,\delta_M^U) &= \int_{۰}^{\infty}\{\int_{۰}^{\infty}(y-\ln(y)-۱)e^{-y}dy\}\theta_۱e^{-(\theta_۱+\theta_۲)t_۱}dt_۱\\
&+ \int_{۰}^{\infty}\{\int_{۰}^{\infty}(y-\ln(y)-۱)e^{-y}dy\}\theta_۲e^{-(\theta_۱+\theta_۲)t_۲}dt_۲\\
&= \gamma\{\int_{۰}^{\infty}\theta_۱e^{-(\theta_۱+\theta_۲)t_۱}dt_۱+\int_{۰}^{\infty}\theta_۲e^{-(\theta_۱+\theta_۲)t_۲}dt_۲\}\\
&= \gamma\{\frac{\theta_۱}{\theta_۱+\theta_۲}+\frac{\theta_۲}{\theta_۱+\theta_۲}\}=\gamma. \qquad (۲۲)
\end{aligned}$$

بنابراین با استفاده از (۱۹) برآوردگر UMRU پارامتر θ_M و همچنین برآوردگر غالب بر آن یعنی $\delta_۱^*=\min\{\frac{۱}{T_{(۲)}-T_{(۱)}},\frac{۲}{T_{(۱)}-T_{(۲)}}\}$ مینیماکس هستند. در مورد براوردگر

طبیعی $\delta_M^N = \frac{۱}{T_{(۲)}}$ با استفاده از لم ۱ داریم

$$\begin{aligned} R(\theta_M, \delta_M^N) &= R(\theta_M, \frac{۱}{T_{(۲)}}) \\ &= E[\theta_M T_{(۲)} - \ln(\theta_M T_{(۲)}) - ۱] \\ &= [۲ - \frac{\lambda^۲ + ۱}{(\lambda + ۱)^۲}] \\ &- \{\psi(۱) + \frac{۱}{\lambda + ۱}\ln(\lambda + ۱) + \frac{\lambda}{\lambda + ۱}\ln(\frac{\lambda + ۱}{\lambda})\} - ۱ \\ &= \gamma + ۱ - \frac{\lambda^۲ + ۱}{(\lambda + ۱)^۲} + \frac{۱}{\lambda + ۱}\ln(\frac{۱}{\lambda + ۱}) \\ &+ \frac{\lambda}{\lambda + ۱}\ln(\frac{\lambda}{\lambda + ۱}). \end{aligned} \tag{۲۳}$$

چون تابع لگاریتم طبیعی یک تابع مقعر است، پس

$$\frac{۱}{\lambda + ۱}\ln(\frac{۱}{\lambda + ۱}) + \frac{\lambda}{\lambda + ۱}\ln(\frac{\lambda}{\lambda + ۱}) < \ln(\frac{۱}{(\lambda + ۱)^۲} + \frac{\lambda^۲}{(\lambda + ۱)^۲}),$$

در نتیجه

$$R(\theta_M, \delta_M^N) < \gamma + ۱ - \frac{\lambda^۲ + ۱}{(\lambda + ۱)^۲} + \ln(\frac{\lambda^۲ + ۱}{(\lambda + ۱)^۲}) < \gamma, \tag{۲۴}$$

زیرا برای $x \neq ۱$، $۱ - x + \ln(x) < ۰$. بنابراین با استفاده از (۱۹) براوردگر طبیعی δ_M^N پارامتر θ_M مینیماکس است. با توجه به (۲۲) و (۲۴) نتیجه می‌شود که $R(\theta_M, \delta_M^N) < R(\theta_M, \delta_M^U)$، یعنی برآوردگر طبیعی بر برآوردگر UMRU غلبه می‌یابد.

در ادامه مخاطره برآوردگر UMRU پارامتر θ_J یعنی $\delta_J^U = \frac{۱}{۲T_{(۱)}}$ و برآوردگر طبیعی آن یعنی $\delta_J^N = \frac{۱}{T_{(۱)}}$ و به طور کلی برآوردگرهای خطی به فرم $\delta_{۲c} = \frac{c}{T_{(۱)}}$ را به‌دست آورده می‌شود. با استفاده از لم ۱ داریم

$$\begin{aligned} R(\theta_M, \delta_{۲c}) &= E[\frac{\theta_J T_{(۱)}}{c} - \ln(\frac{\theta_J T_{(۱)}}{c}) - ۱] \\ &= \frac{\lambda^۲ + ۱}{c(\lambda + ۱)^۲} - \{\psi(۱) - \frac{\lambda}{\lambda + ۱}\ln(\frac{\lambda + ۱}{\lambda}) \\ &- \frac{۱}{\lambda + ۱}\ln(\lambda + ۱)\} + \ln(c) - ۱ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \gamma + \frac{\lambda^{۲}+۱}{c(\lambda+۱)^{۲}} - ۱ - \frac{\lambda}{\lambda+۱}\ln(\frac{\lambda}{\lambda+۱}) \\
&- \frac{۱}{\lambda+۱}\ln(\frac{۱}{\lambda+۱}) + \ln(c) \\
&> \gamma + \frac{\lambda^{۲}+۱}{c(\lambda+۱)^{۲}} - ۱ \\
&- \ln(\frac{\lambda^{۲}}{(\lambda+۱)^{۲}} + \frac{۱}{(\lambda+۱)^{۲}}) + \ln(c) \\
&= \gamma + \frac{\lambda^{۲}+۱}{c(\lambda+۱)^{۲}} - ۱ - \ln(\frac{\lambda^{۲}+۱}{c(\lambda+۱)^{۲}}) > \gamma. \qquad (۲۵)
\end{aligned}$$

چون شرط (۲۰) یک شرط کافی برای مینیماکس بودن یک برآوردگر است پس از رابطهٔ (۲۰) و (۲۵) نمی‌توان اظهار نظری در مورد منیماکس بودن برآوردگرهای به فرم $\delta_{۲c} = \frac{c}{T_{(۱)}}$ کرد. بنابراین یافتن براوردگر مینیماکس برای θ_J تحت تابع زیان آنتروپی به عنوان یک مسئله باز باقی می‌ماند.

۵ مقایسه برآوردگرها

با استفاده از (۲۲) و (۲۳) تابع مخاطره برآوردگرهای UMRU و طبیعی پارامتر θ_M عبارتند از

$$R(\theta,\delta_M^U) = \gamma,$$
$$R(\theta,\delta_M^N) = \gamma + \frac{۲\lambda}{(\lambda+۱)^{۲}} - \ln(\lambda+۱) + \frac{\lambda}{\lambda+۱}\ln(\lambda).$$

همچنین با استفاده از روش به کار برده شده در روابط (۲۱) و (۲۲)، با کمی محاسبات انتگرالی می‌توان تابع مخاطره براوردگر غالب بر برآوردگر UMRU پارامتر θ_M یعنی $\delta_M^* = \min(\frac{۱}{T_{(۲)}-T_{(۱)}}, \frac{۲}{T_{(۱)}+T_{(۲)}})$ را به‌صورت

$$R(\theta,\delta_M^*) = \gamma - \frac{۴\lambda}{(\lambda+۳)(۳\lambda+۱)} + \frac{۲\lambda}{(\lambda+۱)^{۲}} + \frac{۲\lambda}{(\lambda+۱)(\lambda-۱)}\ln(\frac{\lambda+۳}{۳\lambda+۱}).$$

به‌دست آورد. با استفاده از رابطهٔ (۲۵) و با کمی محاسبات انتگرالی می‌توان تابع مخاطره برآوردگر طبیعی و UMRU و برآوردگر غالب بر برآوردگر UMRU پارامتر

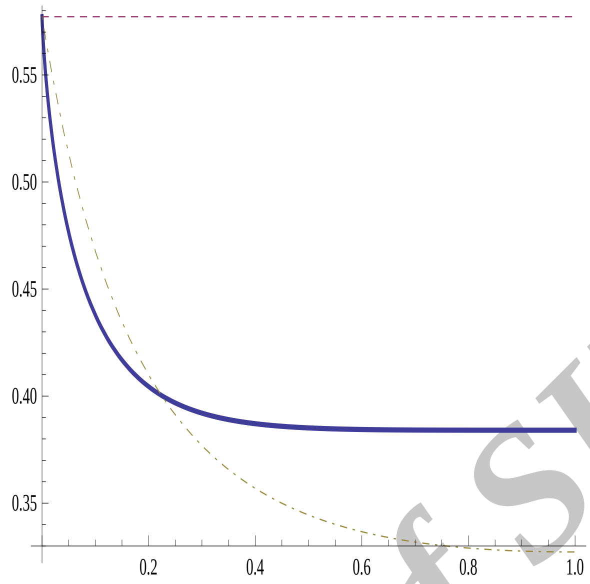
θ_J یعنی $\delta_J^* = \max(\frac{۱}{۲T_{(۱)}}, \frac{۲}{T_{(۱)}+T_{(۲)}})$ را به‌صورت

$$\begin{aligned} R(\theta, \delta_J^U) &= \gamma + \frac{۲(\lambda^۲+۱)}{(\lambda+۱)^۲} - ۱ - \ln(\frac{۲(\lambda^۲+۱)}{(\lambda+۱)^۲}), \\ R(\theta, \delta_J^N) &= \gamma + \frac{\lambda^۲+۱}{(\lambda+۱)^۲} - ۱ - \ln(\frac{\lambda^۲+۱}{(\lambda+۱)^۲}), \\ R(\theta, \delta_J^*) &= \gamma + \frac{۲\lambda^۲}{(\lambda+۱)(\lambda+۳)} - \frac{۲}{(\lambda-۱)(۱+۳\lambda)} - \frac{۲\lambda}{(\lambda+۱)^۲} - ۱ \\ &+ \frac{\lambda}{\lambda-۱}\ln(\frac{\lambda+۳}{۲\lambda}) - \frac{۱}{\lambda-۱}\ln(\frac{۱+۳\lambda}{۲}) \\ &+ \frac{۲\lambda}{(\lambda-۱)(\lambda+۱)}\ln(\lambda). \end{aligned}$$

به‌دست آورد. با توجه به پیچیدگی تابع‌های مخاطره δ_M^* و δ_J^* امکان مقایسه صریح آن‌ها با دیگر براوردگرها وجود ندارد. لذا با استفاده از نرم افراز Mathematica تابع مخاطره براوردگرهای θ_M و θ_J به ترتیب در شکل‌های ۲ و ۳ رسم شده‌اند. همان‌طور که در شکل ۲ مشاهده می‌شود برآوردگر طبیعی و برآوردگر غالب همواره بر برآوردگر UMRU غلبه می‌یابند. اما برآوردگر غالب برای $۰ < \lambda < ۰/۲$ بر برآوردگر طبیعی و برآوردگر طبیعی برای $۰/۲ < \lambda < ۱$ بر برآوردگر غالب غلبه می‌یابد. همین مسئله در مورد شکل ۳ نیز برقرار است. همچنین $R(\theta_M, \delta_M^*)$ ($R(\theta_J, \delta_J^*)$) تابعی نزولی (صعودی) از λ است.

۶ بحث و نتیجه‌گیری

در این مقاله در خانواده توزیع‌های (۲) و تحت تابع زیان آنتروپی (۴) پارامترهای جامعهٔ گزینش شده θ_M و θ_J برآورد شدند. براوردگرهای UMRU این پارامترها و براوردگرهای غالب بر آن‌ها را یافته و رده برآوردگرهای خطی پذیرفتنی این پارامترها تعیین شدند. همچنین شرایط کافی برای مینیماکس بودن یک برآوردگر و برآوردگرهای مینیماکس پارامتر θ_M را به‌دست آورده و به مقایسه برآوردگرها از طریق تابع مخاطره آن‌ها پرداخته شد. پارامترهای جامعهٔ گزینش شده تحت مدل نرخ شکست متناسب برآورد شدند. مدل دیگری که در مدل‌بندی زمان شکست داده‌های طول عمر مورد استفاده قرار می‌گیرد، مدل نرخ شکست وارون متناسب



شکل ۲: نمودار تابع مخاطره برآوردگرهای θ_M، خط تیره $R(\theta_M, \delta_M^*)$، خط‌چین $R(\theta_M, \delta_M^U)$ و نقطه خط‌چین $R(\theta_M, \delta_M^N)$

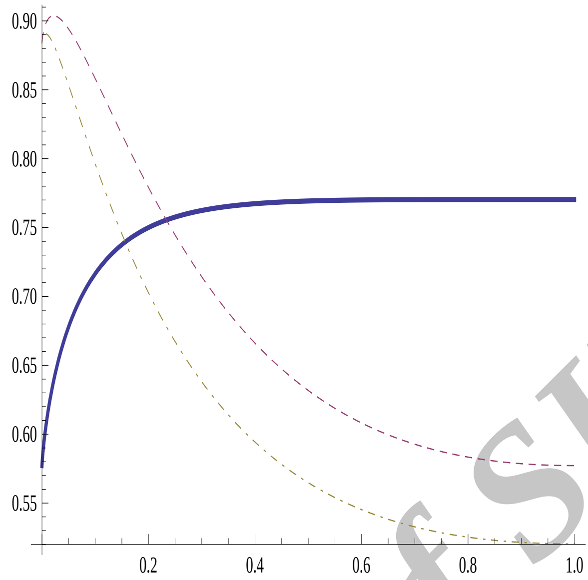
است که تابع توزیع این مدل به‌صورت $G_\theta(x) = [F(x)]^\theta$، $\theta > 0$ است (گوپتا و همکاران، ۱۹۹۸). فرض کنید $\Pi_1, \dots, \Pi_k$، $k(\geq 2)$ جامعهٔ مستقل باشند که جامعهٔ iام دارای توزیع

$$F_{\alpha_i}(x) = [F(x)]^{\alpha_i}, \quad i = 1, \dots, k,$$

باشد، که در آن $F(0) = 0$ و $F(+\infty) = 1$. از جامعه‌ی iام نمونه تصادفی $X_{i1}, \dots, X_{in_i}$، $i = 1, \dots, k$ انتخاب می‌شود و با قراردادن $X_i = \max(X_{i1}, \dots, X_{in_i})$ تابع توزیع X_i به‌صورت

$$G_{\theta_i}(x) = [F(x)]^{\theta_i}, \quad i = 1, \dots, k, \tag{۲۶}$$

به‌دست می‌آید، که در آن $\theta_i = n_i \alpha_i$، $i = 1, \dots, k$. از جمله توزیع‌ها متعلق به خانواده توزیع‌های (۲۶) می‌توان توزیع بتا $\mathrm{Beta}(\theta_i, 1)$ با $F(x) = x$ را نام برد. حال اگر $X_{(1)} \leq \cdots \leq X_{(k}$ آماره‌های ترتیبی $X_1, \dots, X_k$ باشند و قرار



شکل ۳: نمودار تابع مخاطره برآوردگرهای θ_J، خط تیره $R(\theta_J, \delta_J^*)$، خطچین $R(\theta_J, \delta_J^U)$ و نقطه خطچین $R(\theta_J, \delta_J^N)$

دهیم $T_{(i)} = -\ln(F(X_{(i)}))$ آن گاه $T_{(k)} \geq \cdots \geq T_{(1)}$ و با انجام عملیات مشابه بخش‌های ۲ تا ۴ می‌توان نتایج زیر را در برآورد پارامترهای θ_M و θ_J در خانواده توزیع‌های (۲۶) تحت تابع زیان آنتروپی به‌دست آورد.

در براورد θ_M:

الف) برآوردگر UMRU عبارت است از $\delta_M^U = \frac{1}{kT_{(k)}} = \frac{1}{-k\ln(F(X_{(k)}))}$.

ب) برآوردگر طبیعی عبارت است از $\delta_M^N = \frac{1}{T_{(k)}}$.

پ) در حالت $k = 2$ برآوردگر $\delta_{1c} = \frac{c}{T_{(k)}}$ پذیرفتنی است اگر و فقط اگر $c \in [\frac{1}{2}, 1]$.

ت) در حالت $k = 2$ برآوردگر غالب بر براوردگر به شکل $\delta_\psi = \frac{1}{T_{(2)}}\psi(Y)$ که $Y = \frac{T_{(1)}}{T_{(2)}}$ عبارت است از $\delta_{\psi_1} = \frac{1}{T_{(2)}}\max\{\psi_{11}(Y), \psi(Y)\}$ که در آن $\psi_{11}(Y) = \frac{2}{1+Y}$ به شرط آن که $P_\theta(\psi(Y) < \psi_{11}(Y)) > 0$. در حالت خاص

برآوردگر $\delta_M^U = \frac{1}{2T_{(2)}}$ غلبه بر براوردگر UMRU، $\delta_M^* = \max\{\frac{1}{2T_{(2)}}, \frac{2}{T_{(1)}+T_{(2)}}\}$ غلبه می‌یابد.

در برآورد θ_J:

الف) براوردگر UMRU عبارت است از $\delta_J^U = \frac{1}{T_{(1)}-T_{(2)}}$.
ب) برآوردگر طبیعی عبارت است از $\delta_J^N = \frac{1}{T_{(1)}}$.
پ) در حالت $k = 2$ برآوردگر $\delta_{2c} = \frac{c}{T_{(1)}}$ پذیرفتنی است اگر و فقط اگر $c \in [1, \frac{3}{2}]$.
ت) در حالت $k = 2$ براوردگرهای طبیعی و UMRU برآوردگرهای مینیماکس هستند.
ث) در حالت $k = 2$ برآوردگر غالب بر برآوردگر به شکل $\delta_\varphi = \frac{1}{T_{(1)}}\varphi_1(V)$ که $V = \frac{T_{(2)}}{T_{(1)}}$ عبارت است از $\delta_{\varphi_1} = \frac{1}{T_{(1)}}\min\{\varphi_{11}(V), \varphi(V)\}$ که در آن $\varphi_{11}(V) = \frac{2}{1+V}$ به شرط آن که $P_\theta(\varphi(V) > \varphi_{11}(V)) > 0$. در حالت خاص برآوردگر $\delta_J^U = \frac{1}{T_{(1)}-T_{(2)}}$ بر براوردگر UMRU، $\delta_J^* = \min\{\frac{1}{T_{(1)}-T_{(2)}}, \frac{2}{T_{(1)}+T_{(2)}}\}$ غلبه می‌یابد.

مراجع

سنجری ف.، ن. و ریاحی، ه. (۱۳۹۲)، استنباط درستنمایی و بیزی مدل تنش-نیرو بر اساس داده‌های رکوردی در خانواده‌های نرخ خطر متناسب و معکوس متناسب، مجله علوم آماری، ۷، ۲۰۷-۲۳۲.

Al-Mosawi, R. R. and Shanubhogue, A. (2010), Estimation of the Functions of Parameters of the Selected Subset Under Stein Loss Function, *Journal of Applied Statistical Science*, **17**, 1-15.

Arshad, M. and Misra, N. (2016), Estimation After Selection from Exponential Populations with Unequal Scale Parameters, *Statistical Papers*, **57**, 605-621.

Cohen, A. and Sackrowitz, H. (1988), A Decision Theory Formulation for Population Selection Followed by Estimating the Mean of the Selected Population, In: Gupta, S. S., Berger, J. O. (Eds.), *Statistical Decision Theory and Related Topics-IV*, vol. 2. Springer, New York, 33 -36.

Dahiya, R. C. (1974), Estimation of Mean of the Selected Population, *Journal of the American Statistical Association*, **69**, 226-230.

Gupta, S. S. (1965), On Some Multiple Decision (Selection and Ranking) Rules, *Technometrics*, **7**, 225-245.

Gupta, R. C., Gupta, P. L. and Gupta, R. D. (1998), Modeling Failure Time Data by Lehmann Alternatives, *Communications in Statistics - Theory and Methods*, **27**, 887-904.

Hseih, H. (1981), On Estimating the Mean of the Selected Population with Unknown Variance, *Communications in Statistics - Theory and Methods*, **10**, 1869-1878.

James, W. and Stein, C. (1961), Estimation with Quadratic Loss, *Fourth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*, **1**, 361-379, Univ. California Press.

Kumar, S. and Kar, A. (2001), Estimation Quantiles of a Selected Exponential Population, *Statistics and Probability Letters*, **52,** 9-19.

Kumar, S., Mahapatra, A. K. and Vellaisamy, P. (2009), Reliability Estimation of the Selected Exponential Populations, *Statistics and Probability Letters*, **79,** 1372-1377.

Kumar, S. and Sharma, D. (1996), A Note on Estimating Quantiles of Exponential Populations, *Statistics and Probability Letters*, **26,** 115-

118.

Lehmann, E. L. (1951), A General Concept of Unbiasedness, *The Annals of Mathematical Statistics*, **22,** 578-592.

Misra, N. (1994), Estimation of the Average Worth of the Selected Subset of Gamma Populations, *Sankhya*, Series B, **56**, 344-355.

Misra, N. and Singh, G. N. (1993), On the UMRUE for Estimating the Parameter of the Selected Exponential Population, *Journal of Indian Statistical Association*, **31**, 61-69.

Misra, N., van der Meulen, E. C. and Branden, K. V. (2006a), On Estimating the Scale Parameter of the Selected Gamma Population Under the Scale Invariant Squared Error Loss Function, *Journal of Computional and Applied Mathematics*, **186**, 268-282.

Misra, N., van der Meulen, E. C. and Branden, K. V. (2006b), On Some Inadmissibility Results for the Scale Parameters of Selected Gamma Populations, *Journal of Statistical Planning and Inference*, **136**, 2340-2351.

Nematollahi, N. and Motamed-Shariati, F. (2009), Estimation of the Scale Parameter of the Selected Gamma Population Under the Entropy Loss Function, *Communications in Statistics - Theory and Methods*, **38**, 208-221.

Nematollahi, N. and Motamed-Shariati, F. (2012), Estimation of the Parameter of the Selected Uniform Population Under the Entropy Loss Function, *Journal of Statistical Planning and Inference*, **142**, 2190-2202.

Putter, J. and Rubinstein, D. (1968), On Estimating the Mean of a Selected Population, *Technical Report*, No. 165, Department of Statistics, University of Wisconsin.

Robbins, H. (1988), The UV Method of Estimation. In: Gupta, S. S., Berger, J. O., eds. *Statistical Decision Theory and Related Topics-IV,* Vol. 1. New York: Springer-Verlag, 265-270.

Sackrowitz, H. and Cahn, E. S. (1984), Estimation of the Mean of a Selected Negative Exponential Population, *Journal of the Royal Statistical Society*, Series B, **46**, 242-249.

Sackrowitz, H. and Cahn, E. S. (1987), Evaluating the Chosen Population: a Bayes and Minimax Approach, *Adaptive Statistical Procedures and Related Topics*, IMS Lecture Notes-Monograph Series, **8**, ed. John Van Ryzin.

Sarkadi, K. (1967), Estimation After Selection, *Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica*, **2**, 341-350.

Shanubhogue, A. and Al-Mosawi, R. (2010), Estimation Following Subset Selection from Truncated Poison Distributions Under Stein Loss Function, *Revstat - Statistical Journal*, **8**, 1-20.

Sharma, D. and Kumar, S. (1994), Estimation Quantiles of Exponential Populations, *Statistics and Decisions*, **12**, 343-352.

Sill, M. W. and Sampson, A. R. (2007), Extension of a Two-Stage Conditionally Unbiased Estimator of the Selected Population to the Bivariate Normal Case, *Communications in Statistics - Theory and Methods*, **36**, 801-813.

Vellaisamy, P. (1993), On UMVU Estimation Following Selection, *Communications in Statistics - Theory and Methods*, **22**, 1031-1043.

Vellaisamy, P., Kumar, S. and Sharma, D. (1988), Estimation the Mean of the Selected Uniform Population, *Communications in Statistics - Theory and Methods*, **17**, 3447-3475.

Vellaisamy, P. and Sharma, D. (1988), Estimation the Mean of the Selected Gamma Population, *Communications in Statistics - Theory and Methods*, **17**, 2797-2918.

Vellaisamy, P. and Sharma, D. (1989), A Note on the Estimation of the Mean of the Selected Gamma Population, *Communications in Statistics - Theory and Methods*, **18**, 555-560.