مجله علوم آماری، بهار و تابستان ۱۳۹۶
جلد ۱۱، شماره ۱، ص ۱-۱۵
DOI: 10.18869/acadpub.jss.11.1.1

مدل‌های احتمال و توابع درستنمایی برای فرآیند تعمیرات در سانسور پنجره‌ای

جعفراحمدی ، منصوره رزمخواه
گروه آمار، دانشگاه فردوسی مشهد

تاریخ دریافت: ۱۳۹۴/۸/۱۶   تاریخ آخرین بازنگری: ۱۳۹۵/۴/۳

چکیده: سیستم قابل تعمیری را در نظر بگیرید که از زمان صفر شروع به کار کند، به محض از کار افتادن با یک سیستم از نوع خودش تعویض می‌شود یا تعمیر شده و دوباره به فعالیت خود ادامه می‌دهد. در این مقاله فعالیت این سیستم در حالت‌های مختلف برحسب نوع تعمیر در نظر گرفته و برای هر حالت مدل احتمال و تابع درستنمایی برای فرآیند تعداد تعمیرات در بازه‌ای با طول معین، تحت عنوان سانسور پنجره‌ای، به‌دست آورده می‌شود. با توجه به اینکه مدل‌های حاصل به توزیع اولیه طول عمر مؤلفه بستگی دارند، با فرض اینکه این توزیع نمایی باشد، برآورد ماکسیمم درستنمایی و میزان اطلاع فیشر برای برخی از حالت‌ها محاسبه شده است. بدیهی است در صورت تعمیر کامل، مدل تحت مطالعه منطبق با ساختار احتمال یک فرآیند تجدید است.

واژه‌های کلیدی: فرآیند تجدید، تعمیر مینیمال، تعمیر کامل، سانسور پنجره‌ای، برآوردگر درستنمایی ماکسیمم، اطلاع فیشر.

۱ مقدمه

وقتی یک سیستم از کار می‌افتد، یافتن روشی برای تعمیر و برگرداندن سیستم به وضعیت فعال قبل از خرابی، به منظور استفاده بهینه از آن، یکی از مسایل حائز اهمیت در مباحث قابلیت اعتماد است. در این راستا معمولاً می‌توان سیستم‌ها را از نقطه نظر تعمیرات به دو دسته قابل تعمیر و غیر قابل تعمیر تقسیم

آدرس الکترونیکی نویسنده مسئول مقاله: جعفر احمدی، ahmadi-j@um.ac.ir
کد موضوع‌بندی ریاضی (۲۰۱۰): 62N05، 60K05، 90B25

نمود. به عنوان مثال لامپ روشنایی یک سیستم غیر قابل تعمیر و رادیو یک سیستم قابل تعمیر است. در باره قابلیت اعتماد سیستم‌های تعمیرپذیر و الگوهای تعمیر، مقالات و کتاب‌های تخصصی زیادی چاپ شده است، به عنوان مثال می‌توان برای جزییات به کتاب‌های تألیف شده توسط اشر و فینگلد (۱۹۸۴) و ریگدون و باسو (۲۰۰۰) و لیست مقالاتی که آنها استفاده نموده‌اند، مراجعه نمود. در حالت ساده، سیستم‌ها بعد از خرابی می‌توانند به دو شیوه تعمیر شوند. در روش اول، قطعه خراب با یک قطعه نو از جنس خود تعویض می‌شود که به این نوع تعمیر، در مباحث قابلیت اعتماد، تعمیر کامل گفته می‌شود. در روش دوم، قطعه از کار افتاده، تعمیر شده و به سیستم برمی‌گردد و سیستم فعالیت خود را با همان قطعه قبل ادامه می‌دهد. این روش با صرف نظر کردن از زمان تعمیر و برگشتن قطعه به سیستم، مانند حالتی است که سیستم بدون خرابی به فعالیت خود ادامه می‌دهد. در متون قابلیت اعتماد به روش دوم، تعمیر مینیمال[۱] نامیده می‌شود. برای جزئیات می‌توان به تدج و همکاران (۲۰۱۱) مراجعه نمود.

امروزه با توجه به مسایل اقتصادی و هزینه‌های بالا برای تعویض قطعات ازکارافتاده سیستم‌ها، مطالعه در خصوص یافتن الگوهای تعمیر سیستم‌های از کارافتاده و استفاده بیشتر از آنها مورد توجه پژوهشگران در علوم مهندسی و آمار و احتمال قرار گرفته است. برای مطالعه جزئیات بیشتر در باره استفاده از مدل‌ها و روش‌های آماری در مباحث قابلیت اعتماد و تعمیرات سیستم‌ها می‌توان به بارلو و پروشان (۱۹۷۵)، میکر و اسکوبار (۱۹۹۸)، باندی (۱۹۹۱)، ریگدون و باسو (۲۰۰۰)، راساند و هویلند (۲۰۰۴) و اسدی (۱۳۹۱) مراجعه کرد. بنابراین تعمیرات سیستم‌های از کار افتاده می‌تواند به روش کامل یا مینیمال یا تلفیقی از هر دو صورت گیرد. اگر تمامی تعمیرها در سیستم کامل باشند، یعنی قطعه از کار افتاده با هم‌نوع خود تعویض شود، چون طول عمر هر قطعه نو متغیر تصادفی، مستقل و هم‌توزیع با طول عمر سایر مؤلفه‌ها است، در این حالت مفروضات لازم برای برقراری یک فرآیند تجدید[۲] برقرار است و فرآیند تعمیرات رفتاری مشابه فرآیند تجدید دارد. بنابراین در مدل تعمیر کامل می‌توان از نتایج و خواص فرآیند تجدید برای بررسی فرآیند تعمیرات و مطالعه ساختار احتمالی مدل و استنباط‌های مورد نیاز استفاده کرد. لازم به یادآوری است که فرآیند تصادفی شمارشی $\{N(t); t \geq ۰\}$ را فرآیند تجدید گویند، هرگاه $N(t)$ تعداد کل خرابی‌های رخ داده تا زمان t باشد و زمان‌های بین دو خرابی متوالی متغیرهای تصادفی مستقل و هم‌توزیع باشند. فرآیند تجدیدی را که در آن زمان اولین تجدید دارای توزیعی متفاوت از بقیه باشد، فرآیند تجدید با تأخیر گویند. اگر مشاهده یک فرآیند تجدید از زمانی غیر از صفر، مانند t شروع شود و تجدیدی در زمان t رخ

---

[۱] Minimal repair
[۲] Rnewal process

ندهد، آنگاه توزیع زمان انتظار تا اولین تجدید به‌صورت

$$G(x)=\frac{1}{\mu}\int_{\circ}^{x}(1-F(y))dy, \qquad x>\circ, \qquad \circ<\mu<\infty, \qquad (1)$$

است، که در آن $F(\cdot)$ توزیع زمان بین دو خرابی متوالی در فرآیند تجدید است و $\mu=\int_{\circ}^{\infty}xdF(x)$. در متون فرآیندهای تصادفی به $G(\cdot)$ در (۱) توزیع تعادل[۳] $F(\cdot)$ و به فرآیند مربوطه، فرآیند تجدید تعادل[۴] گفته می‌شود. برای جزئیات بیشتر در باره فرآیند تجدید به راس (۱۹۹۲) و استفاده از آن در قابلیت اعتماد به ناکاگاوا (۲۰۱۱) مراجعه شود. در مطالعه فرآیند تعمیرات سیستم‌ها هر گاه تعمیر کامل انجام شود، روابط فوق برقرارند و می‌توان از آنها استفاده نمود.

حال سیستمی قابل تعمیر را در نظر بگیرید که از زمان صفر شروع به کار کرده است، سیستم از لحظه t به مدت w تحت نظر قرار می‌گیرد و زمان‌های خرابی در این مدت ثبت می‌شوند. به عنوان مثال خط تولید یک کارخانه را در نظر بگیرید که اگر مولفه‌های آن خراب شوند توسط متصدیان، تعویض یا تعمیر می‌شوند ولی بازرس از زمان t به مدت w عملکرد و تعمیرات سیستم را ثبت می‌کند و اطلاعاتی از زمان خرابی خارج بازه ندارد. چون سیستم درون پنجره‌ای به طول w، مورد مطالعه قرار می‌گیرد و اطلاعی راجع به فعالیت آن، خارج از این پنجره در اختیار نیست، با نوعی سانسور مواجه هستیم که در متون داده‌های ترتیبی به سانسور پنجره‌ای[۵] معروف است. از آنجا که سانسورها در مباحث قابلیت اعتماد نقش به سزایی ایفا می‌کنند، پرداختن به این نوع سانسور نیز می‌تواند مفید واقع شود. ژائو (۲۰۰۶) و ژائو و ناگاراجا (۲۰۱۱) فرآیند تعداد تعمیرات درون این پنجره را برای سیستمی با تعمیرات کامل (تعویض با قطعه نو) بررسی کردند و مدل احتمال و توابع درستنمایی زمان‌های طول عمر قطعات درون این پنجره را به دست آوردند. همان‌طور که اشاره شد به منظور تعویض مؤلفه‌های از کار افتاده سیستم‌ها با توجه به مسایل اقتصادی و هزینه‌های زیاد برای تهیه قطعات نو، انجام تعمیر قطعات تعمیرپذیر حائز اهمیت است. موارد زیادی در مسایل کاربردی در واقعیت وجود دارد که از نظر اقتصادی، تعمیر یک سیستم از کار افتاده و هزینه‌های راه‌اندازی مجدد آن کمتر از هزینه‌های مربوط به خرید سیستم نو و جایگزینی آن است. برای این منظور ابتدا نتایج کار ژائو و ناگاراجا (۲۰۱۱) مرور می‌شود، سپس عملکرد سیستم در حالت‌هایی که تعمیرهای آن مینیمال یا تلفیقی از دو نوع کامل و مینیمال باشند، مورد بررسی قرار می‌گیرد. در هر یک از حالت‌ها،

---

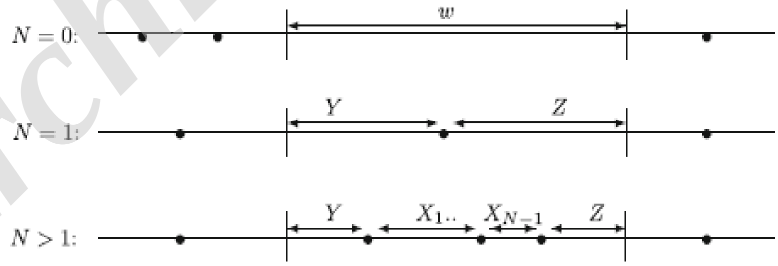
[۳] Equilibrium distribution
[۴] Equilibrium enewal process
[۵] Window censored

مدل احتمال مربوطه معرفی و تابع درستنمایی سانسور پنجره‌ای محاسبه می‌شود و همچنین در حالت خاص که توزیع اولیه سیستم، نمایی باشد، توزیع تعداد تعمیرات درون این پنجره، اطلاع فیشر در خصوص پارامتر توزیع و برآوردگر درستنمایی ماکسیمم مورد بحث قرار می‌گیرند.

۲ مدل ژائو و ناگاراجا

در این بخش مدل ژائو و ناگاراجا (۲۰۱۱) در سانسور پنجره‌ای به طور مختصر معرفی می‌شود. سیستمی را در نظر بگیرید که پس از هر خرابی، به روش کامل (تعویض با قطعه نو) تعمیر می‌شود. یک نقطه زمانی مانند $t > ۰$ را انتخاب کرده و از آن زمان به مدت w، فعالیت و عملکرد سیستم، تحت نظر قرار می‌گیرد. بدیهی است اگر دنباله زمان‌های بین خرابی‌های متوالی در این فرآیند را با $\{X_n; n \geq ۱\}$ نشان دهید، آنگاه X_nها دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی پیوسته نامنفی مستقل و هم‌توزیع را تشکیل می‌دهند. همچنین، اگر زمان اولین شکست درون این بازه را با Y نشان داده و فرض کنید X_nها دارای توزیع F با میانگین متناهی $\mu = E(X_n)$ باشند، آنگاه بنا بر رابطه (۱)، تابع چگالی احتمال Y عبارت است از $g(y) = \frac{۱-F(y)}{\mu}$.

ژائو و ناگاراجا (۲۰۱۱) فرآیند درون پنجره‌ای از زمان را، یک فرآیند تجدید سانسور پنجره‌ای[۶] نامگذاری کرده‌اند. حال اگر N را تعداد تعمیرات و D را مجموعه داده‌های به دست آمده از یک فرآیند تجدید سانسور پنجره‌ای در نظر بگیرید، آنگاه مجموعه داده‌های D به مقدار N بستگی دارد، از این رو سه حالت ممکن است رخ دهد. شکل ۱ را ملاحظه نمایید.



شکل ۱. حالت‌های مختلف فرآیند تجدید سانسور پنجره‌ای

[۶]Window censored renewal process

حالت اول: وقتی $N=0$، هیچ تعمیری در پنجره زمانی مورد نظر w رخ نداده است.
حالت دوم: وقتی $N=1$، Y و Z مشاهده می‌شوند و $D=(N=1, Y=y, Z=z)$، به طوری که Z یک متغیر تصادفی سانسور شده از راست است و زمان بین آخرین تجدید و پایان پنجره را نشان می‌دهد.
حالت سوم: وقت $N \geq 2$ باشد، آنگاه $D=(N=n, Y=y, \mathbf{X}=\mathbf{x}, Z=z)$، که در آن $\mathbf{X}=(X_1, X_2, \cdots, X_{N-1})$.

برای تعیین تابع احتمال توأم بردار D از یک فرآیند تجدید سانسور پنجره‌ای با طول پنجره w، ابتدا تابع نشانگر

$$\delta_n = \begin{cases} 1 & N=n, \\ 0 & N \neq n, \end{cases}$$

را در نظر بگیرید. در این صورت طبق نتایج ژائو و ناگاراجا (۲۰۱۱) تابع احتمال توأم به‌صورت

$$L(D;\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta_n L_n(D;\theta), \tag{2}$$

است، که در آن θ پارامتر توزیع F است و $\sum_{n=0}^{\infty} \delta_n = 1$، به طوری که

$$\begin{aligned} L_0(D;\theta) &= 1-G(w), \\ L_1(D;\theta) &= g(y)[1-F(z)], \qquad z=w-y, \\ L_n(D;\theta) &= g(y)\Pi_{i=1}^{n-1} f(x_i)[1-F(z)],\ n \geq 2,\ \ z=w-y-\sum_{i=1}^{n-1} x_i, \end{aligned}$$

که در آن G و g به ترتیب تابع توزیع و تابع چگالی احتمال Y هستند.

۳ طرح‌های پیشنهادی

سیستمی را در نظر بگیرید که پس از هر خرابی می‌تواند به دو روش مینیمال یا کامل تعمیر شده و به وضعیت فعال برگردد. در این راستا چهار طرح متفاوت معرفی می‌شود.
طرح الف: فعالیت یک سیستم را با این سیاست که نوع تعمیر در بازه زمانی تحت بررسی، تعمیر مینیمال

باشد، در نظر بگیرید. اگر $\cdots < T_۲ < T_۱ < ۰$ دنباله زمان‌های تعمیر مینیمال و $X_۱, X_۲, \ldots$ زمان بین خرابی‌های متوالی باشند و $T_۱$ دارای تابع توزیع پیوسته F باشد، آنگاه با توجه به نتایج بدست آمده توسط بالاکریشنان و همکاران (۲۰۰۹)، داریم

$$\begin{aligned} P(T_{i+۱} - T_i > x | T_i = t_i) &= P(T_{i+۱} > x + t_i | T_i = t_i) \\ &= P(X_{i+۱} > x | \sum_{j=۱}^{i} X_j = t_i) \\ &= \frac{\bar{F}(x + t_i)}{\bar{F}(t_i)}, \end{aligned}$$

که در آن $\bar{F}(t) = ۱ - F(t)$ تابع بقای X_iهاست. همچنین تابع چگالی احتمال توأم $T_۱, \ldots, T_n$ عبارتست از

$$f_{T_۱,\cdots,T_n}(t_۱, \cdots, t_n) = (\prod_{i=۱}^{n-۱} \frac{f(t_i)}{\bar{F}(t_i)}) f(t_n), ۰ < t_۱ < \cdots < t_n. \qquad (۳)$$

با استفاده از (۳)، تابع چگالی احتمال توأم T_i و $T_{i+۱}$ به‌صورت

$$f_{T_i,T_{i+۱}}(t_i, t_{i+۱}) = \frac{(-\log(\bar{F}(t_i))^{i-۱}}{(i-۱)!} f(t_i) \frac{f(t_{i+۱})}{\bar{F}(t_i)}, \quad ۰ < t_i < t_{i+۱}, \qquad (۴)$$

حاصل می‌شود. برای بررسی عملکرد سیستم از لحظه $t > ۰$ به مدت w، تعداد تعمیرها تا قبل از زمان t با $N_۱(t)$ و تعداد تعمیرها در پنجره‌ای به طول w با $N_۲(w)$ نشان داده می‌شود. دراین صورت مجموعه داده‌های این طرح عبارتست از $D = (\mathbf{X} = \mathbf{x}, N_۱(t) = n_t, N_۲(w) = n_w)$، که در آن $\mathbf{X} = (X_۱, X_۲, \ldots, X_{N_۲(w)})$. با معلوم بودن $N_۱(t) = i$، دو حالت برای $N_۲(w)$ رخ می‌دهد

الف: وقتی $N_۲(w) = ۰$، هیچ تعمیری در پنجره انجام نشود.

ب: وقتی $N_۲(w) \geq ۱$، مجموعه مشاهدات این پنجره عبارت است از

$$D = (\mathbf{X} = \mathbf{x}, N_۱(t) = i, N_۲(w) = n).$$

در طرح الف تابع درستنمایی مجموعه داده‌های D به $N_۱(t)$ و $N_۲(w)$ وابسته است. از این رو، تابع نشانگر به‌صورت

$$\delta_{i,n} = \begin{cases} ۱ & N_۱(t) = i, N_۲(w) = n, \\ ۰ & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

پیشنهاد می‌شود، در این حالت تابع درستنمایی برای یک مجموعه داده D از پنجره‌ای با طول w، برابر است با

$$L(D;\theta) = \sum_{i=۰}^{\infty} \sum_{n=۰}^{\infty} \delta_{i,n} L_{i,n}(D;\theta), \tag{۵}$$

به طوری که $\sum_{i=۰}^{\infty} \sum_{n=۰}^{\infty} \delta_{i,n} = ۱$. برای تعریف $L_{i,n}(D;\theta)$، دنباله $\{T_n; n \geq 1\}$ را به‌عنوان دنباله زمان‌های تعمیر مینیمال از لحظه شروع فرآیند در نظر بگیرید. وقتی $N_۲(w) = ۰$ باشد، یعنی iامین تعمیر قبل از پنجره و $(i + ۱)$امین تعمیر بعد از پنجره انجام گرفته است، بنابراین، با استفاده از (۴) می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} L_{i,۰}(D;\theta) &= P(T_i \leq t, T_{i+۱} \geq t + w) \\ &= \int_{t+w}^{\infty} \int_{۰}^{t} f_{T_i,T_{i+۱}}(x,y) dx dy \\ &= \int_{t+w}^{\infty} \int_{۰}^{t} \frac{(-\log(\bar{F}(x))^{i-۱}}{(i-۱)!} f(x) \frac{f(y)}{\bar{F}(x)} dx dy \\ &= \frac{[-\log(\bar{F}(t))]^i}{i!} \bar{F}(t+w). \end{aligned} \tag{۶}$$

به‌طور مشابه وقتی $N_۲(w) = n; n \geq ۱$ باشد، iامین تعمیر قبل از پنجره، n تعمیر بعدی درون پنجره و $(i + n + ۱)$امین تعمیر خارج از پنجره انجام گرفته است. در نتیجه، با استفاده از (۳) نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned} L_{i,n}(D;\theta) &= \int_{t+w}^{\infty} \int_{۰}^{t} f_{T_i}, \cdots, T_{i+n+۱}(t_i, \cdots, t_{i+n+۱}) dt_i dt_{i+n+۱} \\ &= \int_{t+w}^{\infty} \int_{۰}^{t} \frac{[-\log(\bar{F}(t_i))]^{i-۱}}{(i-۱)!} [\prod_{j=i}^{i+n} \frac{f(t_j)}{\bar{F}(t_j)}] f(t_{i+n+۱}) dt_i dt_{i+n+۱} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \prod_{j=1}^{n} \frac{f(t+x_j)}{\bar{F}(t+x_j)} \frac{f(r_i)}{\bar{F}(t_i)} f(t_{i+n+1}) dt_i dt_{i+n+1} \\
&= \frac{[-\log(\bar{F}(t))]^i}{i!} [\prod_{j=1}^{n} \frac{f(t+x_j)}{\bar{F}(t+x_j)}] \bar{F}(t+w), \\
& n \geq 1, 0 < x_1 < \cdots < x_n < w. \qquad (7)
\end{aligned}
$$

با جایگذاری عبارت‌های (۶) و (۷) در (۵) فرمول نهایی تابع درستنمایی به‌دست می‌آید. برای به‌دست آوردن توزیع توأم $(N_1(t),\ N_2(w))$ دو حالت $N_2(w) = 0$ و $N_2(w) = n$ $(n > 0)$ جداگانه بررسی می‌شود. برای حالت اول بنا به (۶) می‌توان نوشت

$$
\begin{aligned}
P(N_1(t) = i, N_2(w) = 0) &= P(T_i \leq t, T_{i+1} \geq t+w) \\
&= \frac{[-\log(\bar{F}(t))]^i}{i!} \bar{F}(t+w). \qquad (8)
\end{aligned}
$$

به طور مشابه برای حالت دوم با استفاده از رابطه (۷)، داریم

$$
\begin{aligned}
P(N_1(t) = i, N_2(w) = n) &= \int_0^w \int_{x_1}^w \cdots \int_{x_{n-1}}^w L_{i,n}(D;\theta) dx_n \cdots dx_1 \\
&= \int_t^{t+w} \int_{y_1}^{t+w} \cdots \int_{y_{n-1}}^{t+w} \frac{[-\log(\bar{F}(t))]^i}{i!} \\
&\quad \times (\prod_{j=1}^{n} \frac{f(y_j)}{\bar{F}(y_j)}) \bar{F}(t+w) dy_n \cdots dy_1, \\
&\quad y_k = t + x_k, \quad k = 1, \cdots, n. \qquad (9)
\end{aligned}
$$

با استفاده از (۸) و (۹) تابع جرم احتمال $N_2(w)$، تعداد تعمیرها در پنجره‌ای به طول w، در طرح الف بدست می‌آید. بدیهی است توزیع $N_2(w)$ به توزیع طول عمر سیستم بستگی دارد. با فرض این که طول عمر سیستم مورد استفاده در طرح الف از توزیع نمایی با میانگین β پیروی کند، با استفاده از (۸) و (۹)

برای $n \geq 0$ داریم

$$\begin{aligned} P(N_1(t)=i, N_2(w)=n) &= \int_t^{t+w}\int_{y_1}^{t+w}\cdots\int_{y_{n-1}}^{t+w} \frac{(t/\beta)^i}{i!} \\ &\times (\prod_{j=1}^{n}\frac{1}{\beta})\exp(-(t+w)/\beta)dy_n\cdots dy_1 \\ &= \frac{(t/\beta)^i}{i!}\exp(-t/\beta)\frac{(w/\beta)^n}{n!}\exp(-w/\beta). \end{aligned}$$

با جمع بستن روی مقادیر تکیه‌گاه $N_1(t)$ تابع جرم احتمال تعداد تعمیرات در طول پنجره برابر است با

$$P(N_2(w)=n) = \frac{(w/\beta)^n}{n!}\exp(-w/\beta).$$

ملاحظه می‌شود که $N_1(t)$ و $N_2(w)$ از هم مستقل هستند. تعداد تعمیرات درون پنجره، از هر نقطه زمانی تنها به طول بازه بستگی دارد و مستقل از زمان شروع و تعداد تعمیرات قبل از آن است، محاسبات منطبق بر خاصیت فقدان حافظه توزیع نمایی است. در اینجا هر یک از $N_1(t)$ و $N_2(w)$ تشکیل یک فرآیند پواسن می‌دهند. در ادامه برآوردگری برای پارامتر β براساس D به‌دست آورده و سپس میزان اطلاع فیشر نهفته در D محاسبه می‌شود. روابط (۶) و (۷) وقتی طول عمر سیستم نمایی باشد، به‌صورت

$$L_{i,n}(D;\beta) = (\frac{t}{\beta})^i\frac{1}{i!}\frac{1}{\beta^n}\exp\{-\frac{t+w}{\beta}\} \quad \forall\, i,\ n,$$

خلاصه می‌شود، که با جایگذاری آن در (۵)، تابع درستنمایی به‌دست می‌آید

$$L(D;\beta) = \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\delta_{i,n}(\frac{t}{\beta})^i\frac{1}{i!\beta^n}\exp\{-\frac{t+w}{\beta}\}. \qquad (۱۰)$$

با استفاده از (۱۰) برآوردگر ماکسیمم درستنمایی پارامتر β برحسب D به‌صورت

$$\hat{\beta} = \frac{t+w}{\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}(i+n)\delta_{i,n}}; \qquad \delta_{0,0} \neq 0$$

محاسبه می‌شود. بنا به رابطه (۱۰) میزان اطلاع فیشر موجود در D، در خصوص پارامتر β طبق تعریف اطلاع فیشر و برقرار بودن شرایط نظم، عبارتست از

$$\begin{aligned}
I(\beta;D) &= -E(\frac{\partial^{2}\ell(D;\beta)}{\partial\beta^{2}}) \\
&= -\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\int_{0}^{w}\int_{x_1}^{w}\cdots\int_{x_{n-1}}^{w}\frac{\partial^{2}}{\partial\theta^{2}}\log L(D;\beta)dx_n\cdots dx_1 \\
&= -\sum_{i=0}^{\infty}\{[\frac{i}{\beta^{2}}-\frac{2(t+w)}{\beta^{3}}]E(\delta_{i,0})+\sum_{n=1}^{\infty}[\frac{i+n}{\beta^{2}}-\frac{2(t+w)}{\beta^{3}}]E(\delta_{i,n})\} \\
&= -\sum_{i=0}^{\infty}\{[\frac{i}{\beta^{2}}-\frac{2(t+w)}{\beta^{3}}]\frac{(t/\beta)^{i}}{i!}e^{-\frac{(t+w)}{\beta}} \\
&+ \sum_{n=1}^{\infty}[\frac{i+n}{\beta^{2}}-\frac{2(t+w)}{\beta^{3}}](t/\beta)^{i}\frac{e^{-\frac{t}{\beta}}}{i!}(w/\beta)^{n}\frac{e^{-\frac{w}{\beta}}}{n!}\} \\
&= \frac{t+w}{\beta^{3}}.
\end{aligned}$$

همان‌طور که انتظار می‌رفت اطلاع فیشر نهفته در D تابعی صعودی از طول پنجره w است.

طرح ب: سیستمی را در نظر بگیرید که علاوه بر این که تعمیرها تا قبل از شروع پنجره به‌صورت کامل بوده، اولین تعمیر پس از شروع پنجره نیز به روش کامل و بقیه تعمیرها به روش مینیمال صورت گیرد. در این صورت طول عمر مؤلفه مورد استفاده در مدل از زمان t تا اولین تعمیر یعنی X_1 دارای توزیع $G(x)$ است که در رابطه (۱) تعریف شده است. دراین جا مدل احتمال تنها به $N_2(w)$ وابسته است، بنابراین δ_n به‌صورت

$$\delta_n=\begin{cases}1 & N_2(w)=n,\\ 0 & \text{در غیر اینصورت}\end{cases} \tag{۱۱}$$

تعریف می‌شود، که با استفاده از آن تابع درستنمایی در طرح ب برابر است با

$$L(D;\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}\delta_n L_n(D,\theta), \tag{۱۲}$$

که در آن ۱ $\sum_{n=0}^{\infty} \delta_n =$ و

$$\begin{aligned}
L_0(D;\theta) &= \bar{G}(w),\\
L_1(D;\theta) &= g(x_1)\bar{F}(w-x_1); \qquad 0 < x_1 < w,\\
L_n(D;\theta) &= g(x_1)(\prod_{i=2}^{n}\frac{f(x_i)}{\bar{F}(x_i)})\bar{F}(w-x_1); \qquad n \geq 2,\\
&\qquad 0 < x_2 < \cdots < x_n < w - x_1, 0 < x_1 < w - \sum_{i=2}^{n} x_i.
\end{aligned}$$

همان‌طور که ملاحظه می‌شود تابع درستنمایی در این حالت به توزیع $G(\cdot)$ نیز وابسته است، که از طریق (۱) با $F(\cdot)$ در ارتباط است. وقتی توزیع طول عمر سیستم نمایی با میانگین β باشد، آنگاه بنا بر (۱۲)

$$L(D;\beta) = \sum_{n=0}^{\infty}\delta_n L_n(D;\beta) = \sum_{n=0}^{\infty}\delta_n\frac{1}{\beta^n}e^{-\frac{w}{\beta}}.$$

برآوردگر ماکسیمم درستنمایی β به صورت

$$\hat{\beta} = \frac{w}{\sum_{n=0}^{\infty} n\delta_n}, \qquad \delta_0 \neq 1,$$

حاصل می‌شود. همچنین اطلاع فیشر موجود در داده‌های این طرح در خصوص پارامتر β عبارت است از

$$\begin{aligned}
I(\beta;D) &= \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^w\int_0^{w-x_1}\int_{x_2}^{w-x_1}\cdots\int_{x_{n-1}}^{w-x_1} -\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\log L(D;\beta)dx_n\cdots dx_1\\
&= \frac{2w}{\beta^3}E\delta_0 - \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^w\int_0^{w-x_1}\cdots\int_{x_{n-1}}^{w-x_1}(\frac{n}{\beta^2}-\frac{2w}{\beta^3})L(D;\beta)dx_n\cdots dx_1\\
&= \frac{2w}{\beta^3}e^{-\frac{w}{\beta}} - \sum_{n=1}^{\infty}(\frac{n}{\beta^2}-\frac{2w}{\beta^3})\frac{1}{\beta^n}e^{-\frac{w}{\beta}}\frac{w^n}{n!}\\
&= \frac{w}{\beta^3}.
\end{aligned}$$

طرح ج: فرض کنید تعمیر سیستم تا قبل از پنجره به روش کامل بوده و از زمان شروع پنجره به بعد به روش مینیمال باشد و آخرین تعمیر کامل قبل از شروع پنجره، در زمان t_0 انجام شده باشد. با استدلالی مشابه طرح ب و با در نظر گرفتن δ_n در رابطه (۱۱) تابع درستنمایی پنجره سانسور شده به صورت (۱۲) حاصل می‌شود، که در آن

$$L_0(D;\theta)=\frac{\bar F(w+z)}{\bar F(z)},\qquad z=t-t_0,$$
$$L_n(D;\theta)=\frac{1}{\bar F(z)}\Big(\prod_{i=1}^{n}\frac{f(z+x_i)}{\bar F(z+x_i)}\Big)\bar F(w+z),\ \ n\geq 1, 0<x_1<\cdots<x_n<w.$$

وقتی توزیع طول عمر سیستم مورد استفاده در این طرح، نمایی با میانگین β باشد، تابع درستنمایی عبارتست از

$$L(D;\beta) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty}\delta_n L_n(D;\beta)=\sum_{n=0}^{\infty}\delta_n\frac{1}{\beta^n}e^{-\frac{w}{\beta}}.$$

میزان اطلاع فیشر موجود در داده‌های این طرح و برآوردگر ماکسیمم درستنمایی پارامتر β پس از محاسبه، دقیقاً برابر با طرح ب می‌شوند، تنها تفاوت درکران انتگرال‌ها ظاهر می‌شود.

طرح د: دراین بخش طرح ج تعمیم می‌یابد. سیستمی را در نظر بگیرید که بررسی آن از زمان t آغاز می‌شود که قبل از زمان t، تعداد تعمیرات مینیمال آن i بار و زمان آخرین تعمیر مینیمال، t_0 گزارش شده است. بررسی به مدت w ادامه می‌یابد. در این بازه زمانی، سیستم مورد نظر M_1 بار به صورت مینیمال و سپس به صورت کامل تعمیر می‌شود، آنگاه سیستم جدید M_2 بار به صورت مینیمال تعمیر شده، سپس با قطعه نو تعویض می‌شود و این روند تا پایان پنجره ادامه می‌یابد، با تعریف $M(w)$ به عنوان تعداد تعمیرهای کامل درون پنجره، مجموعه داده‌ها با $D=(\mathbf{X}=\mathbf{x},N_1(t)=n_t,M(w)=m_w,\underline{M})$ مشخص می‌شود، که در آن $\underline{M}=(M_1,\cdots,M_{M(w)+1})$ و $\mathbf{X}=[X_{kj}]$ یک ماتریس است، که در آن X_{kj} طول عمر سیستم kام مورد بررسی در مدل تا jامین تعمیر مینیمال است. با تعریف تابع نشانگر به‌صورت

$$\delta_{i,m,\underline{m}}=\begin{cases}1 & N_1(t)=i, M(w)=m, \underline{M}=\underline{m},\\ 0 & \text{در غیر اینصورت}\end{cases}$$

مدل احتمال مجموعه داده D به‌صورت

$$L(D;\theta)=\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n_1=0}^{\infty}\cdots\sum_{n_m=0}^{\infty}\delta_{i,m,\underline{n}}L_{i,m,\underline{n}}(D;\theta), \tag{۱۳}$$

خواهد شد، که در آن

$$\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n_1=0}^{\infty}\cdots\sum_{n_m=0}^{\infty}\delta_{i,m,\underline{n}}=1$$

و به ازای $0\le x_{k1}\le\cdots\le x_{k(n_k+1)}$ $(0\le k\le m)$ و

$$0\le x_{(m+1)1}\le x_{(m+1)2}\le\cdots\le x_{(m+1)n_{(m+1)}}$$

می‌توان نشان داد

$$\begin{aligned} L_{i,m,\underline{n}}(D;\theta) &= \frac{(-\log\bar{F}(z_1))^i}{i!}\Big(\prod_{j=1}^{n_1}\frac{f(z_1+x_{1j})}{\bar{F}(z_1+x_{1j})}\Big)f(z_1+x_{1(n_1+1)}) \\ &\quad\times\Big(\prod_{j=1}^{n_2}\frac{f(x_{2j})}{\bar{F}(x_{2j})}\Big)f(x_{2(n_2+1)})\times\cdots\times\Big(\prod_{j=1}^{n_{m+1}}\frac{f(x_{(m+1)j})}{\bar{F}(x_{(m+1)j})}\Big)\bar{F}(z_2); \\ &\quad z_2=w-\sum_{k=1}^{m}x_{k(n_k+1)}, \qquad z_1=t-t_0. \end{aligned}$$

برای این طرح فرم صریحی برای برآوردگرها و میزان اطلاع فیشر به‌دست نمی‌آید، اما با معلوم بودن F می‌توان از روش‌های عددی استفاده نمود.

۴ بحث و نتیجه‌گیری

الگوهای تعمیر و تعویض قطعات از کار افتاده سیستم‌ها و نگهداری آنها از موضوعات مهم در قابلیت اعتماد است. در این خصوص روش‌های متفاوتی توسط محققین معرفی شده است که تعمیر مینیمال یکی از آنها است. در این مقاله تعمیرات سیستم در یک بازه زمانی ثابت مطالعه و برای هر حالت مدل‌های

احتمال مناسب معرفی شد، که برای استنباط آماری در باره توزیع اولیه مؤلفه و پارامترهای آن قابل استفاده است. شایان ذکر است که روش پیشنهاد شده برای حالت‌های دیگر نیز قابل تعمیم است.

تقدیر و تشکر

نویسندگان مقاله از پیشنهادات و نظرات داوران محترم که در بهبود مقاله موثر واقع شد، تقدیر و تشکر می‌نمایند.

مراجع

اسدی، م. (۱۳۹۱)، آشنایی با نظریه قابلیت اعتماد، مرکز نشر دانشگاهی، ایران.

Ascher, H. and Feingold, H. (1984), *Repairable Systems Reliability*, Marcel Dekker, New York.

Balakrishnan, N., Kamps, U. and Kateri, M. (2009), Minimal Repair under a Step-stress Test, *Statistics and Probability Letters*, **79**, 1548-1558.

Barlow, R. E. and Proschan, F. (1975), *Statistical Theory of Reliability and Life Testing*, Holt, Rinehart and Winston, New York.

Bunday, B. D. (1991), *Statistical Methods in Reliability Theory and Practice,* Ellis Horwood, New York.

Meeker, W. and Escobar, L. (1998), *Statistical Methods for Reliability Data*, Wiley Series in Probability and Statistics, John Wiley, New York.

Nakagawa, T. (2011), *Stochastic Processes with Applications to Reliability Theory*, Springer Series in Reliability Engineering, Springer-Verlag, New York.

Rausand, M. and Høyland, A. (2004), *System Reliability Theory; Models, Statistical Methods and Applications*, 2nd Edt., John Wiley, New York.

Rigdon, S. E. and Basu, A. P. (2000), *Statistical Methods for the Reliability of Repairable Systems*, John Wiley, New York.

Ross, S. M. (1992), *Applied Probability Models with Optimization Applications*, Holden-Day, California.

Tadj, L., Ouali, M-S., Yacout, S. and Ait-Kadi, D. (2011), *Replacement Models with Minimal Repair*, Springer, New York.

Zhao, Y. (2006), Parametric Inference from Window Censored Renewal Process Data, *PhD Dissertation*, The Ohio State University, USA.

Zhao, Y. and Nagaraja, H. N. (2011), Fisher Information in Window Censored Renewal Process Data and its Applications, *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, **63**, 791-825.