مجله علوم آماری، بهار و تابستان ۱۳۹۶
جلد ۱۱، شماره ۱، ص ۱۷-۳۶
DOI: 10.18869/acadpub.jss.11.1.17

تحلیل احتمال ورشکستگی زمان نامتناهی در مدل مخاطره جمعی

ابوذر بازیاری

گروه آمار، دانشگاه خلیج فارس بوشهر

تاریخ دریافت: ۱۳۹۴/۸/۷ تاریخ آخرین بازنگری: ۱۳۹۶/۱/۳۰

چکیده: مدل مخاطره جمعی شرکت بیمه با سرمایه اولیه ثابت وقتی فرآیند تعداد خسارت‌های رخ داده شده از طرف بیمه‌گذاران در یک بازه زمانی مشخص دارای توزیع پواسن با نرخ ثابت λ باشد، در نظر گرفته شده است. برای محاسبه احتمال ورشکستگی زمان نامتناهی از مفاهیم فرآیندهای تصادفی و معادلات دیفرانسیل استفاده می‌شود. همچنین یک فرمول صریح برای تعیین تقریب لاندبرگ در یافتن تقریبی احتمال ورشکستگی زمان نامتناهی بر حسب تابع توزیع متغیرهای تصادفی تعداد خسارت‌های بیمه‌گذاران بدست آمده است. با مثال‌های عددی نتایج بدست آمده مورد بررسی قرار گرفته‌اند و نشان داده شده که برای هر مقدار سرمایه اولیه، تقریب احتمال ورشکستگی محاسبه شده در این مقاله، نسبت به تقریب‌های بدست آمده برای احتمالات ورشکستگی توسط دیگر نویسندگان به مقدار واقعی آن نزدیکتر و خطای آن کمتر است.

واژه‌های کلیدی: احتمال ورشکستگی زمان نامتناهی، معادلات دیفرانسیل، مدل مخاطره جمعی، تقریب لاندبرگ.

۱ مقدمه

برای محاسبه احتمال ورشکستگی[۱] در مدل مخاطره شرکت بیمه[۲] نیاز به مفاهیم، روش‌ها و تکنیک‌های پیشرفته ریاضی و آمار است. فرض کنید یک شرکت در شاخه‌ای از بیمه شروع به سرمایه‌گذاری کند، این سرمایه‌گذاری همیشه توام با خطر است، زیرا این احتمال وجود دارد که مقدار پولی را که شرکت بابت

آدرس الکترونیکی نویسنده مسئول مقاله: ابوذر بازیاری، ab_bazyari@yahoo.com

کد موضوع‌بندی ریاضی (۲۰۱۰): 60K99 ،99B60 ،91B3.

[۱] Ruin probability
[۲] Insurance company

خسارت‌های بیمه‌گذاران پرداخت می‌کند از مجموع سرمایه اولیه[۳] و میزان حق بیمه[۴] دریافتی زیادتر شود، در این صورت شرکت ورشکست می‌شود. لذا محاسبه احتمالات ورشکستگی مورد توجه قرار گرفته است. همچنین با تعیین این احتمالات مدیران شرکت بیمه می‌توانند در مورد خط‌مشی شرکت از جمله تعیین حق بیمه دریافتی افراد تحت پوشش خود تصمیم‌گیری کنند.

لاندبرگ (۱۹۲۶)، بسیاری از مفاهیم ریاضی و آماری نظریه مخاطره[۵] را مورد بررسی قرار داد. کرامر (۱۹۳۰) و کرامر (۱۹۵۵)، این مفاهیم را کامل‌تر کردند. پانچر (۱۹۸۶)، یک فرمول بازگشتی ساده برای محاسبه احتمال ورشکستگی زمان نامتناهی[۶] وقتی خسارت‌های رخ‌داده شده از طرف بیمه‌گذاران دارای توزیع گسسته باشد، ارایه داد. دی‌ویلدر و گوارتس (۱۹۸۸)، با ارایه الگوریتمی احتمال ورشکستگی زمان متناهی برای مدل مخاطره جمعی با زمان گسسته را بصورت عددی محاسبه کردند. آسموسن (۱۹۸۹)، برخی از مفاهیم و قضایای نظریه مخاطره را با استفاده از زنجیره‌های مارکوف مورد بررسی قرار داد. دی‌ویلدر (۱۹۹۶)، از روش‌های پیشرفته ریاضیات برای بسط و گسترش نظریه مخاطره استفاده کرد. آسموسن و بینسوانگر (۱۹۹۷)، احتمال ورشکستگی را در مدل مخاطره جمعی[۷] برای وقتی که اندازه خسارت‌ها دارای توزیع دم سنگین باشند، با روش شبیه‌سازی محاسبه کردند. رلسکی و همکاران (۱۹۹۹)، روش‌ها و نتایج جالبی را در نظریه مخاطره بدست آوردند که این روش‌ها در ارتباط با مسایل مربوط به بیمه و دارایی بودند. بسیاری از نتایج و قضایای مهم در ارتباط با مدل‌های مخاطره در رلسکی (۲۰۰۰)، آمده است.

برای محاسبه احتمالات ورشکستگی یک شرکت بیمه بایستی فرآیند مجموع خسارت‌های رخ‌داده شده از طرف بیمه‌گذاران و نیز مقدار خسارت رخ‌داده شده از طرف هر بیمه‌گذار دقیقاً مدل‌بندی شود. بدلیل اینکه اندازه خسارت‌ها متغیرهای تصادفی هستند، بنابراین برای مدل‌بندی کردن مساله از روش‌های احتمالی و آماری استفاده می‌شود. مدل کلاسیک برای توصیف فرآیند مخاطره یک سبد بیمه بکار می‌رود که در آن استقلال بین اندازه‌های خسارت و نیز استقلال بین اندازه‌های خسارت و زمان رخ‌داد آنها باشد.

نتایج مختلفی در ارتباط با تعیین تقریبی احتمال ورشکستگی به‌دست آمده است. هرگاه خسارت‌ها دارای توزیع دم سبک باشند، نیرهینن (۱۹۹۸ و ۱۹۹۹) با استفاده از قضیه انحرافات بزرگ[۸]، نتایج حدی احتمالات ورشکستگی را بدست آورد. آسموسن (۲۰۰۰) بسیاری از مفاهیم مدل‌های مخاطره را مورد

[۳] Initial capital
[۴] Premium
[۵] Risk theory
[۶] Infinite time ruin pobability
[۷] Collective risk model
[۸] Large deviations theory

بررسی قرار داد و برای هر کدام از این مدل‌ها با روش‌های مختلف احتمال ورشکستگی را محاسبه کرد. یوآنجیانگ و همکاران (۲۰۰۳) یک فرمول کلی برای محاسبه احتمال ورشکستگی در مدل مخاطره جمعی وقتی خسارت‌های رخ‌داده شده دارای توزیع گاما $\Gamma(\alpha, \lambda)$، $\alpha > 0$ و $\lambda \geq 2$ باشند، بدست آوردند و برای $\lambda = 2$ احتمال ورشکستگی را با روش شبیه‌سازی مونت کارلو محاسبه کردند.

گزارشات نسبتاً کامل و دقیق از پیدایش فرآیندهای مخاطره شرکت بیمه و بررسی احتمالات ورشکستگی در مدل‌های مختلف، توسط بازیاری و پرهام (۱۳۸۷) و بازیاری (۱۳۹۱) داده شده است. دیکسون (۲۰۰۵) تحقیقات گسترده‌ای در زمینه احتمالات ورشکستگی انجام داد و با مثال‌های عملی به تجزیه و تحلیل مسایل مربوط به امور بیمه پرداخت. کاس و همکاران (۲۰۰۸) بسیاری از نتایج عددی احتمال ورشکستگی زمان نامتناهی مدل‌های مخاطره برای توزیع‌های نمایی و غیر نمایی را تعیین و آنها را با استفاده از نرم‌افزار R محاسبه کردند. لفور و لویسل (۲۰۰۸) احتمال ورشکستگی زمان متناهی را برای مدل‌های مختلف بیمه محاسبه کردند. بسیاری از مدل‌های مخاطره شرکت بیمه و تعیین احتمالات ورشکستگی آنها در کلاگمن و همکاران (۲۰۰۸) آمده است. استیتسیاشویلی (۲۰۰۹) احتمال ورشکستگی را در مدل مخاطره جمعی برای توزیع‌های با دم سنگین محاسبه و با یک مثال عددی نتایج بدست آمده را مورد تجزیه و تحلیل قرار داد. لفور و لویسل (۲۰۰۹) احتمال ورشکستگی زمان متناهی را در مدل مخاطره جمعی با فرض ثابت نبودن مقدار حق بیمه دریافتی از بیمه‌گذاران محاسبه کردند. آلبرچر و کورتشاک (۲۰۰۹) به محاسبه تقریبی احتمال ورشکستگی زمان نامتناهی برای مدل مخاطره جمعی وقتی اندازه خسارت‌ها دارای توزیع پارتو باشد، پرداختند. بازیاری (۲۰۱۴) یک فرمول کلی و دقیق برای محاسبه احتمال ورشکستگی زمان نامتناهی در مدل مخاطره جمعی وقتی خسارت‌های رخ‌داده شده دارای توزیع دم سنگین باشند، ارایه داده و با مثال‌های عددی برای توزیع‌های مختلف احتمالات ورشکستگی را بدست آورد.

در بخش ۲، مدل مخاطره جمعی شرکت بیمه معرفی و ویژگی‌های این مدل مورد بررسی قرار گرفته است. همچنین تعریف احتمال ورشکستگی زمان نامتناهی و معادله تجدید[۹] ارایه شده است. در بخش ۳، احتمال ورشکستگی زمان نامتناهی به صورت تقریب محاسبه می‌شود. مثال‌های عددی برای بررسی نتایج در بخش ۴ داده شده‌اند. در این مثال‌ها احتمال ورشکستگی زمان نامتناهی محاسبه و مقدار تقریبی آن برای مقادیر مختلف سرمایه اولیه شرکت محاسبه شده‌اند. همچنین مقادیر احتمالات ورشکستگی محاسبه شده توسط رلسکی و همکاران (۱۹۹۹) و آسموسن (۲۰۰۰) و تقریب‌های آنها تعیین و مقدار این احتمالات همراه با خطای آنها با هم مقایسه شده‌اند. در بخش ۵، بحث و نتیجه‌گیری ارایه شده است.

[۹] Renewal eqaution

۲ مدل مخاطره جمعی شرکت بیمه

فرض کنید (Ω, F, P) یک فضای احتمال بوده و شرایط زیر برقرار باشند:
الف) $N = \{N(t) : t \geq ۰\}$ یک فرآیند نقطه‌ای با فرض $N(۰) = ۰$ است.
ب) $\{X_k\}_{k=۱}^{\infty}$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی و مستقل با تابع توزیع مشترک F، $(F(۰) = ۰)$، میانگین β، واریانس $\sigma^۲$ و مستقل از فرآیند $N(t)$ است.

فرآیند مخاطره شرکت بیمه فرآیندی با چارچوب کاملاً تصادفی برای اطلاع از وضعیت سرمایه آن شرکت در یک دوره زمانی است. فرض کنید شرکت با سرمایه اولیه ثابت u شروع به فعالیت کند، آنگاه فرآیند مخاطره جمعی شرکت بیمه به‌صورت

$$R(t) = u + ct - \sum_{k=۱}^{N(t)} X_k, \qquad (۱)$$

است. در رابطه (۱) ct مجموع حق بیمه‌های دریافتی تا زمان t، X_k، $k = ۱, \ldots, N(t)$، متغیر تصادفی اندازه حسارت رخ‌داده شده از طرف k امین بیمه‌گذار در بازه $[۰, t]$ و $\sum_{k=۱}^{N(t)} X_k$ مجموع خسارت‌های رخ‌داده شده تا زمان t است. در واقع فرض می‌شود شرکت در هر دوره زمانی مبلغ ثابت c را از بیمه‌گذاران دریافت کند که آن را نرخ ناخالص حق بیمه می‌گویند. همچنین در رابطه (۱)، $\{N(t) : t \geq ۰\}$ فرآیند تعداد خسارت‌های رخ‌داده شده از طرف بیمه‌گذاران تا زمان t بوده و معمولاً فرض می‌شود که دارای فرآیند پواسن با پارامتر λ است، یعنی تساوی $E(N(t)) = \lambda t$ برقرار است.

لم ۱: اگر $U(t)$ نشان‌دهنده سود شرکت بیمه در بازه $[۰, t]$ باشد، آنگاه $U(t) = ct - \sum_{k=۱}^{N(t)} X_k$ و متوسط این سود عبارت است از $E[U(t)] = (c - \lambda\beta)t$.

برهان: با توجه به کل خسارت‌های رخ‌داده شده و حق بیمه‌های دریافتی از بیمه‌گذاران تا زمان t، سود شرکت بیمه در بازه $[۰, t]$ عبارت است از:

$$U(t) = ct - \sum_{k=۱}^{N(t)} X_k. \qquad (۲)$$

کاملاً واضح است که در رابطه (۲) متغیر تصادفی $U(t)$ فرآیندی با نموهای مستقل و مانا است، همچنین

$$E[U(t)] = E\{E[U(t)|N(t)]\} = (c - \lambda\beta)t.$$

به‌طور شهودی، شرکت به غیر از هزینه‌های مستقیم بیمه‌ای خود که همان خسارت‌های بیمه‌گذاران هستند، هزینه‌های جانبی از جمله پرداخت حقوق کارکنان و هزینه‌های بازاریابی را نیز دارد. برای تامین این هزینه مرسوم است که مبلغی تحت عنوان سرباز ایمنی[۱۰] از بیمه‌گذاران دریافت شود. این مقدار را با نماد S نشان داده و به‌صورت

$$S = \frac{(c - \lambda\beta)t}{\lambda\beta t} = \frac{c}{\lambda\beta} - ۱, \qquad (۳)$$

تعریف می‌شود. بدیهی است که در رابطه (۳) همواره $S > ۰$ است. با توجه به رابطه (۳) نرخ ناخالص حق بیمه مخاطره به‌صورت

$$c = (۱ + S)\lambda\beta = S\lambda\beta + \lambda\beta,$$

است (هیپ و پلام، ۲۰۰۱). شرکت بیمه با سرمایه اولیه u شروع به فعالیت می‌کند. بنابراین در زمان $t = ۰$، سرمایه اولیه شرکت برابر با u است. شرکت در طول زمان با نرخ ثابت c شروع به جمع‌آوری حق بیمه از بیمه‌گذاران خود می‌کند، بنابراین سرمایه‌اش با ضریب زاویه c رو به افزایش است تا اینکه اولین خسارت در زمان $T_۱$ توسط بیمه‌گذار رخ دهد. فرض کنید مبلغ این خسارت $X_۱$ باشد، بنابراین سرمایه شرکت پس از رسیدن به مقدار $u + cT_۱$، بلافاصله بعد از وقوع خسارت به میزان $u + cT_۱ - X_۱$ تنزل می‌یابد. تا زمانی که شرکت برای تعهدات خود سرمایه داشته باشد این روند ادامه دارد و به کار و فعالیت خود ادامه خواهد داد. در یک فرآیند مخاطره، ورشکستگی وقتی رخ می‌دهد که مجموع خسارت‌های پرداخت شده از طرف شرکت بیمه بیشتر از مقدار مبلغ ذخیره شده آن شرکت باشد. به عبارت دیگر ورشکستگی رخ می‌دهد هرگاه برای کوچکترین مقدار $t > ۰$ همواره $R(t) < ۰$ باشد. اگر احتمال ورشکستگی زمان

[۱۰] Safety loading

نامتناهی با نماد $\psi(u)$ نشان داده شود، آنگاه

$$\psi(u) = P(R(t) < \circ | R(.) = u).$$

احتمال مکمل آن یعنی احتمال بقا[11] را با $\phi(u)$ نشان داده و عبارت است از:

$$\phi(u) = ۱ - \psi(u).$$

تعریف ۱ (آسموسن، ۲۰۰۰): فرض کنید $Z : R \rightarrow R^+$ تابعی کراندار باشد. تابع توزیع F را روی فضای R^+ در نظر بگیرید. آنگاه معادله

$$g(u) = Z(u) + \int_\circ^u g(u-x)dF(x), \qquad (۴)$$

که در آن $g(u)$ تابعی نامعلوم از u و $Z(u)$ تابعی معلوم است را معادله تجدید می‌گویند.

قضیه ۱ (آسموسن، ۲۰۰۰): در معادله (۴) اگر $Z(u)$ انتگرال‌پذیر باشد، آنگاه $g(u)$ بطور مجانبی دارای جواب یکتای $\frac{\int_\circ^\infty Z(u)du}{\mu_F}$ است.

۳ احتمال ورشکستگی زمان نامتناهی

فرآیند $U(t)$ را در بازه زمانی کوچک $[\circ, dt)$ در نظر بگیرید. چهار حالت امکان دارد رخ دهد:

۱) هیچ ادعایی از طرف بیمه‌گذاران در بازه $[\circ, dt)$ اتفاق نیفتد.

۲) یک ادعا در بازه $[\circ, dt)$ اتفاق بیفتد و مقدار هزینه‌ای که باید از طرف شرکت بیمه پرداخت شود موجب ورشکستگی نشود.

۳) یک ادعا در بازه $[\circ, dt)$ اتفاق بیفتد و مقدار هزینه‌ای که باید از طرف شرکت بیمه پرداخت شود موجب ورشکستگی شود.

۴) بیشتر از یک ادعا از طرف بیمه‌گذاران در بازه $[\circ, dt)$ اتفاق بیفتد.

با توجه به اینکه متغیر تصادفی $N(t)$ فرآیندی پواسن و $U(t)$ دارای نموهای مستقل و مانا است،

[11] Survival probability

به محاسبه $\phi(u)$ در هر یک از چهار حالت ذکر شده پرداخته می‌شود.

حالت اول- احتمال اینکه در بازه زمانی $[\circ, dt]$ هیچ ادعایی رخ ندهد برابر با $۱ - \lambda dt + o(dt)$ است. زیرا با توجه به اینکه متغیر تصادفی $N(t)$ فرآیندی پواسن با پارامتر λ است، تساوی

$$P(N(t) = k) = \frac{e^{-\lambda dt}(\lambda dt)^k}{k!}, \qquad k = \circ, ۱, ۲, \dots \tag{۵}$$

برقرار است. در نتیجه با توجه به (۵) خواهیم داشت:

$$P(N(t) = \circ) = e^{-\lambda dt} = ۱ - \lambda dt + o(dt),$$

که در آن $o(dt)$ نمادی برای نشان دادن تابعی از dt است که سریع‌تر از dt به صفر میل می‌کند. به عبارتی دیگر

$$\lim_{h \to \circ} \frac{o(h)}{h} = \circ.$$

لم ۲: اگر در بازه زمانی $[\circ, dt]$ هیچ ادعایی از طرف بیمه‌گذاران رخ ندهد، آنگاه احتمال بقا عبارت است از $\phi(u + cdt)$.

برهان: چون در بازه $[\circ, dt]$ هیچ ادعایی از طرف بیمه‌گذاران رخ نمی‌دهد و با توجه به دریافت حق بیمه از بیمه‌گذاران، آنگاه در زمان dt سرمایه شرکت از مقدار u به مقدار $u + cdt$ افزایش پیدا کرده است. بنابراین احتمال بقا برابر با $\phi(u + cdt)$ می‌باشد.

حالت دوم- احتمال اینکه در بازه زمانی $[\circ, dt]$ یک ادعا رخ دهد برابر با $\lambda dt + o(dt)$ بوده و برای اینکه این خسارت منجر به ورشکستگی نشود، مبلغ آن بایستی از مقدار $u + cdt$ کمتر باشد. اگر مبلغ این خسارت برابر با y باشد، آنگاه سرمایه شرکت برابر $u + cdt - y$ خواهد شد و بنابراین احتمال بقا در این حالت عبارت است از:

$$\int_{\circ}^{u+cdt} \phi(u + cdt - y)dF(y).$$

حالت سوم– مانند حالت قبل احتمال وقوع یک خسارت در بازه زمانی $[\circ, dt)$ برابر با $\lambda dt+o(dt)$ خواهد بود. اما به دلیل اینکه مقدار این خسارت منجر به ورشکستگی شده، پس احتمال بقا برابر با صفر است.

حالت چهارم – احتمال وقوع دو ادعا و بیشتر از آن در بازه کوچک $[\circ, dt)$ بی‌نهایت کوچک است، یعنی $o(dt)$.

بنابراین بر اساس خواص فرآیند پواسن متغیر تصادفی $N(t)$

$$\begin{aligned}\phi(u) &= (1-\lambda dt+o(dt))\phi(u+cdt)\\ &\quad+(\lambda dt+o(dt))\int_{\circ}^{u+cdt}\phi(u+cdt-y)dF(y)\\ &\quad+(\lambda dt+o(dt))\times\circ+o(dt)\\ &= (1-\lambda dt)\phi(u+cdt)+(\lambda dt)\int_{\circ}^{u+cdt}\phi(u+cdt-y)dF(y)\\ &\quad+o(dt).\end{aligned} \tag{۶}$$

چون

$$\lim_{cdt\to\circ}\frac{\phi(u+cdt)-\phi(u)}{cdt}=\phi'(u),$$

پس $\phi(u+cdt)=\phi(u)+cdt\phi'(u)+o(dt)$. بنابراین با توجه به (۶)

$$\begin{aligned}\phi(u) &= (1-\lambda dt)[\phi(u)+cdt\phi'(u)+o(dt)]\\ &\quad+\lambda dt\int_{\circ}^{u+cdt}\phi(u+cdt-y)dF(y)+o(dt)\\ &= \phi(u)+cdt\phi'(u)-\lambda dt\phi(u)+\lambda dt\int_{\circ}^{u+cdt}\phi(u+cdt-y)dF(y)\\ &\quad+o(dt).\end{aligned} \tag{۷}$$

در نتیجه

$$\phi'(u)=\frac{\lambda}{c}\phi(u)-\frac{\lambda}{c}\int_{\circ}^{u}\phi(u-y)dF(y), \tag{۸}$$

با انتگرال‌گیری نسبت به x از طرفین رابطه (۸) داریم

$$\begin{aligned}
\frac{\lambda}{c}(\phi(u)-\phi(0)) &= \int_0^u \phi(x)dx - \int_0^u \int_0^x \phi(x-y)dF(y)dx \\
&= \int_0^u \phi(x)dx - \int_0^u \int_y^u \phi(x-y)dxdF(y) \\
&= \int_0^u \phi(x)dx - \int_0^u \int_0^{u-y} \phi(x)dxdF(y) \\
&= \int_0^u \phi(x)dx - \int_0^u \int_0^{u-x} d(F(y))\phi(x)dx \\
&= \int_0^u \phi(x)(1-F(u-x))dx \\
&= \int_0^u \phi(u-x)(1-F(x))dx. \qquad (۹)
\end{aligned}$$

بنابراین

$$\begin{aligned}
\phi(\infty) &= \phi(0) + \frac{\lambda}{c}\int_0^\infty \phi(\infty)(1-F(x))dx \\
&= \phi(0) + \frac{\lambda}{c}\phi(\infty)\int_0^\infty (1-F(x))dx.
\end{aligned}$$

چون $F(0)=0$، بنابراین $\phi(\infty)=\phi(0)+\frac{\lambda\beta}{c}\phi(\infty)$. اما اگر سرمایه اولیه شرکت بی‌نهایت باشد، آنگاه احتمال ورشکستگی آن صفر خواهد بود، به عبارت دیگر $\psi(\infty)=0$. بنابراین احتمال ورشکستگی با مقدار سرمایه اولیه صفر عبارت است از:

$$\psi(0) = \frac{\lambda\beta}{c} = \frac{1}{1+S}. \qquad (۱۰)$$

با استفاده از روابط (۹) و (۱۰) و بدلیل اینکه $\phi(u)=1-\psi(u)$، داریم

$$\begin{aligned}
1-\psi(u) &= 1-\frac{\lambda\beta}{c}+\frac{\lambda}{c}\int_0^u (1-\psi(u-x))(1-F(x))dx \\
&= 1-\frac{\lambda}{c}[\beta - \int_0^u (1-F(x))dx
\end{aligned}$$

$$+\int_{۰}^{u}\psi(u-x)(۱-F(x))dx]. \tag{۱۱}$$

از طرفی چون $\int_{۰}^{\infty}(۱-F(x))dx=\beta$ داریم

$$\psi(u)=\frac{\lambda}{c}\int_{u}^{\infty}(۱-F(x))dx+\frac{\lambda}{c}\int_{۰}^{u}\psi(u-x)(۱-F(x))dx. \tag{۱۲}$$

۳٫۱ تقریب احتمال ورشکستگی زمان نامتناهی

در این بخش، نشان داده می‌شود که رابطه (۱۲) در شرط معادله تجدید صدق نمی‌کند، سپس یک معادله تجدید مناسب برای محاسبه تقریب احتمال ورشکستگی زمان نامتناهی ارایه خواهد شد. با توجه به اینکه $S>۰$، آنگاه

$$\int_{۰}^{\infty}\frac{\lambda}{c}(۱-F(x))dx=\frac{\lambda\beta}{c}<۱, \tag{۱۳}$$

بنابراین معادله (۱۲) معادله تجدید نمی‌باشد. برای آنکاه معادله (۱۲) به معادله تجدید مناسب تبدیل شود، فرض می‌شود ثابت R وجود دارد به‌طوری‌که

$$\frac{\lambda}{c}\int_{۰}^{\infty}e^{Rx}(۱-F(x))dx=۱. \tag{۱۴}$$

ثابت R را نمای لاندبرگ گویند (آسموسن، ۲۰۰۰). همچنین از رابطه (۱۲) نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned} e^{Rx}\psi(u) &= \frac{\lambda}{c}e^{Ru}\int_{u}^{\infty}(۱-F(x))dx \\ &+ \frac{\lambda}{c}\int_{۰}^{u}e^{R(u-x)}\psi(u-x)e^{Rx}(۱-F(x))dx. \end{aligned} \tag{۱۵}$$

بنا به تعریف ۱ و انتخاب توابع $g(u)=e^{Ru}\psi(u)$ و $Z(u)=\frac{\lambda}{c}e^{Ru}\int_{u}^{\infty}(۱-F(x))dx$، آنگاه رابطه (۱۵) یک معادله تجدید مناسب خواهد بود. همچنین اگر

$$I_{۱}=\frac{\lambda}{c}\int_{۰}^{\infty}e^{Ru}\int_{u}^{\infty}(۱-F(x))dxdu=\frac{c-\lambda\beta}{cR},$$

و

$$\begin{aligned} I_۲ &= \frac{\lambda}{c}\int_۰^\infty xe^{Rx}(۱-F(x))dx = \frac{\lambda}{c}\int_۰^\infty \int_x^\infty xe^{Rx}dF(y)dx \\ &= \frac{\lambda}{cR^۲}\int_۰^\infty (Rye^{Ry}-e^{Ry}+۱)dF(y) = \frac{\lambda}{cR^۲}(RM'_Y(R)-M_Y(R)+۱) \\ &= \frac{\lambda M'_Y(R)-c}{cR}. \end{aligned}$$

آنگاه به شرط موجود بودن R و $R \neq ۰$، مقادیر $I_۱$ و $I_۲$ در فاصله $(۰,\infty)$ وجود دارند و طبق قضیه ۱، عبارت $e^{Ru}\psi(u)$ بطور مجانبی دارای جواب یکتا به‌صورت

$$\lim_{u\to\infty} e^{Ru}\psi(u) = \frac{I_۱}{I_۲}, \tag{۱۶}$$

است. بنابراین از رابطه (۱۶) نتیجه می‌شود

$$\lim_{u\to\infty} e^{Ru}\psi(u) = \frac{c-\lambda\beta}{\lambda M'_Y(R)-c}. \tag{۱۷}$$

برای u به اندازه کافی بزرگ، با استفاده از رابطه (۱۷) احتمال ورشکستگی به‌طور تقریبی عبارت است از:

$$\psi(u) \sim \frac{c-\lambda\beta}{\lambda M'_Y(R)-c}e^{-Ru}. \tag{۱۸}$$

تذکر ۱: در رابطه (۱۸)، اگر برای $R \neq ۰$، مقدار $M'_Y(R)$ وجود نداشته باشد، آنگاه احتمال ورشکستگی تقریباً برابر با صفر خواهد بود.

تذکر ۲: ثابت R یک پارامتر مورد توجه در احتمال ورشکستگی است، چرا که همواره برای هر مقدار $u \geq ۰$، رابطه مهمی بین نمای لاندبرگ و احتمال ورشکستگی وجود دارد. همچنین ثابت شده که در مدل مخاطره جمعی برای هر $u \geq ۰$، مقدار احتمال ورشکستگی کمتر یا مساوی از مقدار e^{-Ru} می‌باشد. (آسموسن، ۲۰۰۰ و دوفرسن، ۲۰۰۱)

۴ مثال‌های عددی

برای محاسبه احتمال ورشکستگی و مقدار تقریبی آن مثال‌های عددی زیر مورد بررسی قرار می‌گیرند. در مثال ۱، مقدار تقریبی احتمال ورشکستگی زمان نامتناهی با مقدار واقعی آن دقیقاً برابر خواهد بود. همچنین ارتباط بین احتمال ورشکستگی با سرمایه اولیه شرکت و مقدار سربار ایمنی بخوبی توضیح داده می‌شود. در مثال ۲، تقریب احتمالات ورشکستگی محاسبه شده در زیر بخش ۳,۱، نسبت به تقریب‌های بدست آمده برای احتمالات ورشکستگی توسط رلسکی و همکاران (۱۹۹۹) و آسموسن (۲۰۰۰) به مقدار واقعی آن نزدیکتر است. در مثال ۳، با داده‌های واقعی احتمال ورشکستگی مورد بررسی قرار می‌گیرد.

مثال ۱: فرض کنید خسارت‌های رخ‌داده شده از طرف بیمه‌گذاران دارای توزیع نمایی با میانگین β باشند. آنگاه بنا به رابطه (۸)

$$\begin{aligned}\phi'(u) &= \frac{\lambda}{c}\phi(u) - \frac{\lambda}{c\beta}\int_{۰}^{u}\phi(u-x)e^{-\frac{x}{\beta}}dx\\ &= \frac{\lambda}{c}\phi(u) - \frac{\lambda}{c\beta}\int_{۰}^{u}\phi(x)e^{-\frac{u-x}{\beta}}dx.\end{aligned} \qquad (۱۹)$$

با مشتق‌گیری از طرفین تساوی (۱۹)

$$\begin{aligned}\phi''(u) &= \frac{\lambda}{c}\phi'(u) - \frac{\lambda}{c\beta}\{\phi(u) - \frac{۱}{\beta}\int_{۰}^{u}\phi(x)e^{-\frac{u-x}{\beta}}dx\}\\ &= \frac{\lambda}{c}\phi'(u) - \frac{\lambda}{c\beta}\phi(u) - \frac{۱}{\beta}\phi'(u) + \frac{\lambda}{c\beta}\phi(u).\end{aligned}$$

بنابراین

$$\phi''(u) = (\frac{\lambda}{c} - \frac{۱}{\beta})\phi'(u) = -\frac{S}{\beta(۱+S)}\phi'(u). \qquad (۲۰)$$

معادله (۲۰) یک معادله دیفرانسیل درجه دوم همگن با جواب زیر است:

$$\phi(u) = c_{۱} + c_{۲}e^{-\frac{Su}{\beta(۱+S)}}.$$

چون برای $S > ۰$، همواره $\phi(\infty) = ۱$ و $\phi(۰) = ۱ - \frac{۱}{۱+S}$، بنابراین

$$c_۱ = ۱ \quad , \quad c_۲ = -\frac{۱}{۱+S}.$$

در نتیجه برای هر $u \geq ۰$

$$\psi(u) = \frac{\lambda\beta}{c} e^{-(\frac{۱}{\beta} - \frac{\lambda}{c})u}. \tag{۲۱}$$

با توجه به فرمول (۱۴)

$$\frac{\lambda}{c}\int_۰^\infty e^{Rx}(۱ - F(x))dx = \frac{\lambda}{c}\int_۰^\infty e^{Rx} e^{-\frac{۱}{\beta}x}dx = ۱.$$

با حل این انتگرال

$$R = \frac{c - \lambda\beta}{c\beta} \quad , \quad M_Y^{'}(R) = \frac{c^۲}{\beta\lambda^۲}.$$

بنابراین طبق رابطه (۱۷)

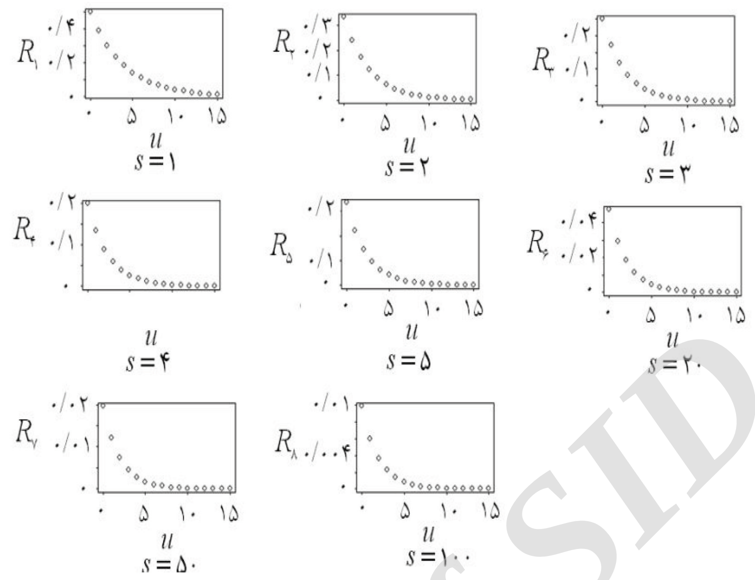
$$\lim_{u\to\infty} e^{Ru}\psi(u) = \frac{c - \lambda\beta}{\frac{\lambda c^۲}{\beta\lambda^۲} - c} = \frac{\lambda\beta}{c}. \tag{۲۲}$$

همچنین از رابطه (۲۲)

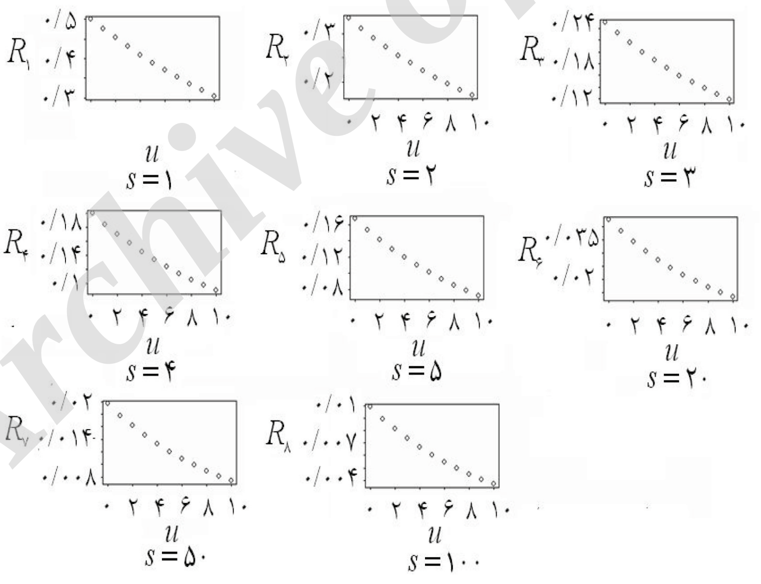
$$\psi(u) = \frac{\lambda\beta}{c} e^{-Ru} = \frac{\lambda\beta}{c} e^{-(\frac{۱}{\beta} - \frac{\lambda}{c})u}.$$

ملاحظه می‌شود که مقدار تقریبی احتمال ورشکستگی زمان نامتناهی با مقدار واقعی آن دقیقاً برابر است.

تذکر ۳: با توجه به فرمول (۲۱) مقدار احتمال ورشکستگی با سرمایه اولیه صفر، $\frac{۱}{۱+S}$ بوده و در حقیقت فرمول (۱۰) را نتیجه می‌دهد. از فرمول (۲۱) کاملاً واضح است که هر چه سرمایه اولیه شرکت زیادتر باشد، احتمال ورشکستگی آن شرکت کمتر (احتمال بقا زیادتر) خواهد بود. همچنین مقدار سربار ایمنی شرکت ارتباط عکس با احتمال ورشکستگی دارد. نمودارهای ۱ و۲ نشان‌دهنده مقادیر احتمال ورشکستگی



شکل ۱. احتمال ورشکستگی بر حسب سرمایه اولیه برای توزیع نمایی با میانگین ۲



شکل ۲. احتمال ورشکستگی بر حسب سرمایه اولیه برای توزیع نمایی با میانگین ۱۰

شرکت بر حسب سرمایه اولیه با مقادیر ایمنی $S = ۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۲۰, ۵۰, ۱۰۰$ برای توزیع‌های نمایی با میانگین $\beta = ۲$ و $\beta = ۱۰$ است که با استفاده از نرم‌افزار $SPLUS$ رسم شده‌اند. در این نمودارها ارتباط بین سرمایه اولیه و سربار ایمنی با احتمال ورشکستگی بخوبی نشان داده شده است. مشاهده می‌شود که با افزایش سرمایه اولیه شرکت، احتمال ورشکستگی آن کمتر می‌شود، بطوریکه با افزایش سرمایه اولیه به سمت بی‌نهایت، مقدار احتمال ورشکستگی به صفر نزدیکتر می‌شود. ملاحظه می‌شود که برای توزیع نمایی با میانگین ثابت، با افزایش سربار ایمنی احتمال ورشکستگی کمتر خواهد شد. همچنین با افزایش میانگین توزیع نمایی برای هر مقدار سربار ایمنی، احتمال ورشکستگی آن زیادتر می‌شود.

مثال ۲: فرض کنید در یک سبد بیمه مخاطره جمعی حق بیمه دریافتی $c = ۱$، $\{N(t) : t \geq ۰\}$ دارای فرآیند پواسن با $\lambda = ۱$ و نیز متغیرهای تصادفی اندازه خسارت‌ها دارای تابع توزیع

$$F_X(x) = ۱ - \frac{۱}{۳}(e^{-x} + e^{-۲x} + e^{-۳x}),$$

باشد. در این صورت $\beta = E(X) = ./۶۱۱۱۱$ و

$$\begin{aligned}\psi(u) &= ۰/۵۵۰۷۹e^{-۰/۴۸۵۱۳۱} + ۰/۰۴۳۶۹۷۹e^{-۱/۷۲۲۳۵u} \\ &+ ۰/۰۱۶۶۲۳۱e^{-۲/۷۹۲۵۲u}.\end{aligned} \quad (۲۳)$$

با استفاده از فرمول (۱۸)، تقریب احتمال ورشکستگی برابر است با

$$App_{\psi(u)}(u) = ۰/۵۵۰۷۹e^{-۰/۴۸۵۱۳۱u}. \quad (۲۴)$$

با استفاده از (۲۳) و (۲۴)، مقادیر احتمال ورشکستگی، $\psi(u)$، تقریب احتمال ورشکستگی، $App_{\psi(u)}(u)$ و مقدار خطا $Er = \frac{App_{\psi(u)}(u) - \psi(u)}{\psi(u)} \times ۱۰۰$، برای مقادیر مختلف سرمایه اولیه محاسبه و در جدول ۱ آورده شده‌اند، که در آن $\psi_{AS}(u)$، $App_{\psi(u)}(u)$ و Er_{AS} به ترتیب احتمال ورشکستگی محاسبه شده توسط آسموسن (۲۰۰۰)، مقدار تقریبی آن و مقدار خطا است. همچنین $\psi_R(u)$، $App_{\psi_R(u)}(u)$ و Er_R به ترتیب احتمال ورشکستگی محاسبه شده توسط رلسکی و همکاران (۱۹۹۹)، مقدار تقریبی آن و مقدار خطا است.

جدول ۱. مقادیر احتمالات ورشکستگی، تقریب احتمالات ورشکستگی و مقدار خطای آنها

u	$\psi(u)$	$App_{\psi(u)}(u)$	Er	$\psi_{AS}(u)$	$App_{\psi_{AS}(u)}(u)$	Er_{AS}	$\psi_R(u)$	$App_{\psi_R(u)}(u)$	Er_R
۰	۰/۶۱۱	۰/۵۵۰	−۸/۹	۰/۶۳۵	۰/۵۶۵	−۹/۱۰	۰/۷۲۳	۰/۶۱۰	−۶/۱۵
۰/۲۵	۰/۵۲۴	۰/۴۸۷	−۹/۶	۰/۶۳۲	۰/۵۷۱	−۵/۹	۰/۶۸۵	۰/۵۷۹	−۴/۱۵
۰/۵	۰/۴۵۴	۰/۴۳۲	−۵/۴	۰/۵۷۲	۰/۵۴۰	−۶/۵	۰/۵۹۰	۰/۵۲۲	−۵/۱۱
۰/۷۵	۰/۳۹۹	۰/۳۸۲	−۵/۳	۰/۵۲۸	۰/۴۹۹	−۵/۵	۰/۵۴۳	۰/۵۰۹	−۲/۶
۱	۰/۳۴۷	۰/۳۳۹	−۵/۲	۰/۴۹۳	۰/۴۷۹	−۶/۲	۰/۴۷۳	۰/۴۵۲	−۳/۴
۱/۲۵	۰/۳۰۵	۰/۳۰۰	−۸/۱	۰/۴۶۶	۰/۴۳۷	−۹/۱	۰/۴۲۲	۰/۴۰۵	−۱/۴
۱/۵	۰/۲۶۹	۰/۲۶۶	−۳/۱	۰/۳۹۵	۰/۳۸۸	−۹/۱	۰/۳۸۵	۰/۳۷۷	−۱/۲
۱/۷۵	۰/۲۳۷	۰/۲۳۵	−۹۵/۰	−۰/۳۴۲	۰/۳۳۷	−۲/۱	۰/۳۳۲	۰/۳۲۸	−۱/۱
۲	۰/۲۱۰	۰/۲۰۸	−۶۹/۰	۰/۲۷۵	۰/۲۷۲	−۱/۱	۰/۲۹۲	۰/۲۸۹	−۱
۲/۲۵	۰/۱۸۵	۰/۱۸۴	−۵/۰	۰/۲۲۴	۰/۲۲۲	−۷۶/۰	۰/۲۳۸	۰/۲۳۶	−۷۹/۰

نتایج جدول ۱ نشان می‌دهد که با افزایش مقدار سرمایه اولیه شرکت بیمه، احتمالات ورشکستگی کاهش یافته و نیز مقدار $App_{\psi(u)}(u)$ به مقدار واقعی آن یعنی $\psi(u)$ نزدیک و نزدیکتر می‌شود. البته این نتیجه برای احتمالات ورشکستگی $\psi_{AS}(u)$ و $\psi_R(u)$ نیز برقرار است. همچنین ملاحظه می‌شود که برای هر مقدار سرمایه اولیه، تقریب احتمال ورشکستگی، $App_{\psi(u)}(u)$، محاسبه شده در این مقاله، نسبت به تقریب‌های بدست آمده برای احتمالات ورشکستگی توسط آسموسن (۲۰۰۰) و رلسکی و همکاران (۱۹۹۹) به مقدار واقعی آن نزدیکتر بوده و خطای آن کمتر است.

مثال ۳: (آسموسن، ۲۰۰۰) یک شرکت بیمه کامیون‌های بارکش یک تنی ۶ شرکت باربری را بیمه کرده است. تعداد کامیون‌های بارکش هر ۶ شرکت در ۱۰ سال گذشته در جدول ۲ آورده شده‌اند. جدول ۳ نشان‌دهنده مجموع اندازه خسارت‌های رخ‌داده شده برای کامیون‌های بارکش هر ۶ شرکت باربری بر حسب ۱۰۰ دلار است. در این مثال حق بیمه دریافتی از هر بیمه‌گذار ۹۲۰ دلار، فرآیند تعداد خسارت‌ها در یک سال پواسن با میانگین ۲ و متغیرهای اندازه‌های خسارت دارای تابع توزیع نمایی با میانگین ۴۰۰ دلار می‌باشند. در نتیجه احتمال ورشکستگی بر حسب سرمایه اولیه برابر است با:

$$\psi(u) = \frac{\lambda\beta}{c} e^{-(\frac{1}{\beta}-\frac{\lambda}{c})u} = ۰/۸۶۹۵ e^{-۰/۰۰۰۳۲۶u}. \qquad (۲۵)$$

با توجه به مثال ۱، تقریب احتمال ورشکستگی زمان نامتناهی دقیقاً با مقدار بدست آمده در رابطه (۲۵) برابر می‌باشد. بدلیل اینکه از سرمایه اولیه این شرکت اطلاعی در دسترس نیست، بنابراین با در نظر گرفتن

جدول ۲. تعداد کامیون‌های بارکش ۶ شرکت باربری در ۱۰ سال گذشته

	تعداد شرکت‌ها					
سال	۱	۲	۳	۴	۵	۶
۱	۱۰	۵	۲	۱۵	۵	۱۰
۲	۱۰	۵	۲	۲۰	۵	۱۰
۳	۱۲	۵	۳	۲۰	۵	۱۰
۴	۱۲	۵	۳	۲۰	۳	۱۰
۵	۱۵	۵	۳	۲۱	۳	۱۰
۶	۱۵	۵	۳	۲۲	۳	۱۰
۷	۱۵	۵	۳	۲۲	۳	۱۲
۸	۱۳	۵	۳	۲۲	۳	۱۲
۹	۹	۵	۳	۲۵	۳	۱۲
۱۰	۹	۵	۳	۲۵	۵	۱۲

جدول ۳. مجموع اندازه خسارت‌های رخ‌داده شده کامیون‌های بارکش یک تنی هر ۶ شرکت

	تعداد شرکت‌ها					
سال	۱	۲	۳	۴	۵	۶
۱	۷۴	۵۲	۴۰	۱۷۱	۴۹	۱۲۶
۲	۵۰	۱۱۱	۲۸	۸۵	۱۳۲	۱۴۸
۳	۱۸۰	۸۳	۶۰	۱۰۰	۷۴	۱۲۸
۴	۴۳	۷۴	۵۹	۱۱۶	۳۷	۱۵۱
۵	۱۷۹	۸۷	۴۳	۱۵۳	۲۱	۱۶۵
۶	۱۴۰	۸۵	۷۴	۴۴	۵۴	۱۲۸
۷	۹۵	۴۰	۶۱	۱۳	۲۷	۱۰۰
۸	۱۴۹	۷۱	۴۶	۳۱	۴۳	۶۵
۹	۲۰	۹۳	۷۲	۱۱۰	۵۳	۲۳۳
۱۰	۸۱	۸۳	۸۱	۲۵۲	۱۰۲	۲۴۶

مقادیر اولیه $u =$ ۵۰, ۶۰, ۷۰, ۸۰, ۹۰, ۱۰۰, ۱۴۰, ۱۵۰، بر حسب ۱۰۰ دلار، احتمالات ورشکستگی محاسبه و در جدول ۴ آورده شده‌اند.

جدول ۴. احتمال ورشکستگی زمان نامتناهی برای مقادیر مختلف سرمایه اولیه

u	۳۰	۴۰	۵۰	۶۰	۷۰
$\psi(u)$	۰٫۳۲۷	۰٫۲۳۶	۰٫۱۷۰	۰٫۱۲۳	۰٫۰۸۸
u	۸۰	۹۰	۱۰۰	۱۴۰	۱۵۰
$\psi(u)$	۰٫۰۶۴	۰٫۰۴۶	۰٫۰۳۳	۰٫۰۰۹	۰٫۰۶۵

نتایج جدول ۴ دقیقاً مشابه نتایج بدست آمده از جدول ۱ است، یعنی رابطه عکس بین سرمایه اولیه شرکت و احتمال ورشکستگی وجود دارد.

بحث و نتیجه‌گیری

مدل مخاطره جمعی شرکت بیمه با سرمایه اولیه ثابت وقتی فرآیند تعداد خسارت‌های رخ‌داده شده از طرف بیمه‌گذاران در یک بازه زمانی مشخص دارای توزیع پواسن با نرخ ثابت λ باشد، در نظر گرفته شد. تعیین احتمال ورشکستگی زمان نامتناهی در چنین مدلی برای آگاهی مدیران شرکت جهت ارزیابی و تعیین خط مشی آن شرکت از اهمیت بسزایی برخوردار است. با استفاده از معادلات دیفرانسیل احتمال ورشکستگی و تقریب آن محاسبه و نشان داده شد که اگر خسارت‌های رخ‌داده شده از طرف بیمه‌گذاران دارای توزیع نمایی با میانگین ثابت باشند، آنگاه تقریب احتمال ورشکستگی زمان نامتناهی دقیقاً با مقدار واقعی آن برابر خواهد بود. در مثال‌ها با رسم نمودارهای احتمالات ورشکستگی برای مقادیر مختلف سربار ایمنی و سرمایه اولیه، ملاحظه شد که احتمال ورشکستگی شرکت با میانگین خسارت بیمه‌گذاران در یک دوره زمانی ارتباط مستقیم دارد. همچنین با توجه به داده‌های محاسبه شده در جدول ۱، با افزایش مقدار سرمایه اولیه شرکت، اولاً تمام مقادیر احتمالات ورشکستگی کاهش یافته و ثانیاً مقدار تقریبی آنها به مقدار واقعی نزدیک و نزدیکتر می‌شود. همچنین ملاحظه شد که برای هر مقدار سرمایه اولیه، تقریب احتمال ورشکستگی $App_{\psi(u)}(u)$، نسبت به تقریب‌های بدست آمده برای احتمالات ورشکستگی توسط رلسکی و همکاران (۱۹۹۹) و آسموسن (۲۰۰۰) به مقدار واقعی آن نزدیکتر بوده و خطای آن کمتر است که البته این نقطه قوت و مزیت فرمول ارایه شده برای محاسبه احتمال ورشکستگی و مقدار تقریبی آن می‌باشد.

تقدیر و تشکر

نویسنده از سردبیر محترم مجله علوم آماری و داوران محترم همچنین ویراستار گرامی که با پیشنهادهای ارزنده خود باعث بهبود مقاله شدند، کمال تشکر را دارد.

مراجع

بازیاری، ا. و پرهام، غ. ع. (۱۳۸۷)، پیدایش فرآیندهای مخاطره و بررسی مدلهای مربوط به آن برای محاسبه احتمالات ورشکستگی، نهمین کنفرانس آمار ایران، مجموعه مقالات منتخب، ۴۶-۶۱، دانشگاه اصفهان.

بازیاری، ا. (۱۳۹۱)، احتمال ورشکستگی فرآیند مخاطره انفرادی شرکت بیمه با خسارتهای وابسته، مجله علوم آماری، ۶، ۲۱-۳۷.

Albercher, H. and Kortschak, D. (2009), On Ruin Probability and Aggregate Claim Representations for Pareto Claim Size Distribution, *Insurance: Mathematics and Economics*, **45**, 362-373.

Asmussen, S. (1989), Risk Theory in a Markovian Environent, *Scandinavian Actuarial Journal*, **89**, 69-100.

Asmussen, S. (2000), Ruin Probability, *World Scientific*, Singapore.

Asmussen, S. and Binswanger, K. (1997), Simmulation of Ruin Probability for Subexponential Claim, *Astin Bulletin*, **27**, 297-318.

Bazyari, A. (2014), A General Formula for Computing the Ruin Probability in models with Heavy Tail Distributions, *Insurance: Mathematics and Economics*, Accepted, Under Printing.

Cramer, H. (1930), *On the Mathematical Theory of Risk*, Skavdia Jubilee Volume, Stockholm.

Cramer, H. (1955), *Collective Risk Theory*, Skavdia Jubilee Volume, Stockholm.

De Vylder, F. E. (1996), *Advance Risk Theory*, Edition de I'University de ruxelles.

De Vylder, F. E. and Goovarets, M. J. (1988), Recursive calculation of Finite-Time Ruin Probabilities, *Insurance: Mathematics and Economics*, **7**, 1-7.

Dickson, D. C. M. (2005), *Insurance Risk and Ruin*, Cambridge University Press, Cambridge.

Dufresne, D. (2001), A General Class of Risk Models, *Australian Actuarial Journal*, **7**, 755-791.

Hipp, C. and Plum, M. (2001), Optimal Investment for Onsurers, *Insurance: Mathematics and Economics*, **27**, 215-228.

Kaas, R., Goovaerts, M. J., Dhaene, J. and Denuit, M. (2008), *Modern Actuarial Risk theory Using R*, Second Editio, Springer-Verlag Berlin Heidelberg.

Klugman, S. A., Panjer, H. H. and Willmot, G. E. (2008), *Loss Models: From Data to Decisions*, Third Edition, Wiley.

Lefevre, C. and Loisel, S. (2008), On Finite-Time Ruin Probabilities for Classical Risk Models, *Scandinavian Actuarial Journal*, **1**, 41-60.

Lefevre, C. and Loisel, S. (2009), Finite Horizon Ruin Probabilities for Indeoendent or Dependent Claim Amounts, *Methodology and Computing in Applied Probability*, **11**, 425-441.

Lundberg, F. (1926), *Forsakringsteknisk Riskutjamning* F. Englands boktryckeri A. B., Stockholm.

Nyrhinen, H. (1998), Rough Descriptions of Ruin for a General Class of Surpluse Processes, *Advances in Applied Probability*, **30**, 1008-1026.

Nyrhinen, H. (1999), Large Deviations for the Time of Ruin, *Journal of Applied Probability*, **36**, 733-764.

Panjer, H. H. (1986), Direct Calculation of Ruin Probabilities, *The Journal of Risk and Insurance*, **53**, 521-529.

Rolski, T., Schimidli, H., Schimidli, V. and Teugles, J. (1999), *Stochastic Processes for Insurance and Finance*, John Wiley and Sons, New York.

Rolski, T. (2000), *Some Problems in the Theory of Risk*, Tokyo Institute of Technology and University of Wroclaw.

Tsitsiashvili, G. Sh. (2009), Computing Ruin Probability in the Classical Risk Model, *Journal Automation and Remote Control*, **70**, 2109-2115.

Yuanjiang, H. Xucheng, L. and Zhang, J. (2003), Some Results of Ruin Probability for the Classical Risk Process, *Journal of Applied Mathematics and Decision Sciences*, **7**, 133-146.