مجله علوم آماری، بهار و تابستان ۱۳۹۶
جلد ۱۱، شماره ۱، ص ۵۷-۷۵
DOI: 10.18869/acadpub.jss.11.1.57

انتخاب متغیر با رویکرد جدید در آمیزه‌ای متناهی از مدل‌های رگرسیونی نیم‌پارامتری با توزیع پواسون

ملیحه حیدری و فرزاد اسکندری

گروه آمار، دانشگاه علامه طباطبایی

تاریخ دریافت: ۱۳۹۵/۲/۲۲ تاریخ آخرین بازنگری: ۱۳۹۶/۶/۲

چکیده: در این مقاله به بحث انتخاب متغیر با رویکردی جدید در آمیزه‌ای متناهی از مدل‌های رگرسیونی نیم‌پارامتری پرداخته می‌شود، به‌گونه‌ای‌که داده‌ها از توزیع پواسون تبعیت می‌کنند. اما دو عامل بیش‌پراکندگی و صفرهای بیش از حد به دلیل استفاده از توزیع پواسون می‌تواند تاثیر زیادی بر انتخاب متغیر و براورد پارامترها داشته باشند. در واقع براورد پارامترها در بخش پارامتری مدل رگرسیونی نیم‌پارامتری با استفاده از رویکرد درستنمایی تاوانیده انجام می‌پذیرد و در بخش ناپارامتری پس از تقریب موضعی تابع ناپارامتری با استفاده از بسط تیلور، محاسبات در حضور براورد ضرایب پارامتری انجام می‌گیرد. استفاده از رویکرد جدید در این مقاله باعث شده است تا موانع در انتخاب درست متغیرها برطرف گردد. در این مقاله علاوه بر ارائه تئوری‌های مربوطه، در بخش شبیه‌سازی داده‌ها نیز دو موضوع بیش پراکندگی و صفرهای بیش از حد مورد توجه قرار می‌گیرد و استفاده از روش EM در براورد پارامترها منجر به افزایش دقت در نتیجه شده است.

واژه‌های کلیدی: الگوریتم EM، بیش‌پراکندگی، صفرهای بیش از حد، رگرسیون نیم‌پارامتری، مدل آمیزه‌ای متناهی.

آدرس الکترونیکی نویسنده مسئول مقاله: فرزاد اسکندری، ffeskandari@yahoo.com
کد موضوع‌بندی ریاضی (۲۰۱۰): 60J05، 62G17، 62H02

۱ مقدمه

مدت زمانی طولانی است که مسئله تعیین بهترین زیرمجموعه از متغیرها در یک مدل آماری، موضوع مورد علاقه و کاربردی آمارشناسان شده است. برهمین مبنا و بر اساس یک مدل رگرسیونی ساده، رگرسیون کم‌ترین توان‌های دوم عادی[۱](OLS) مجموع توان دوم مانده‌ها [۲] $RSS = (y - x\beta)^T(y - x\beta)$ را مینیمم می‌کند و براوردی نااریب به فرم $\hat{\beta}_{OLS} = (x^T x)^{-1} x^T y$ حاصل می‌کند. در حالتی که ماتریس طرح X پررتبه نباشد، هم‌خطی بین اجزای ماتریس رخ می‌دهد که نشان از همبستگی میان متغیرهای مستقل است و هرچه میزان آن افزایش یابد، واریانس براورد ضرایب نیز افزایش خواهد یافت، در نتیجه براوردگر (OLS) یکتا نخواهد بود. از طرف دیگر با استفاده از براورد $\hat{\beta}_{OLS}$، میانگین توان دوم خطاها در زمان پیش‌بینی افزایش می‌یابد. بنابراین از نظر محاسباتی این شیوه‌های سنتی مقرون به‌صرفه نیستند و نتیجه‌ای رضایت‌بخش در پی نخواهند داشت.

بنابراین محققان برای حل مشکل، شیوه انتخاب متغیر تاوانیده را مطرح کردند که با ایجاد محدودیت روی مجموع توان دوم مانده‌ها، پارامترها را براورد می‌کند. از جمله این محققان تیبشیرانی (۱۹۹۶) است که تابع تاوانی با نام کمترین انقباض مطلق و عملگر گزینش[۳] (LASSO) را معرفی کرد. سپس فن و لی (۲۰۰۱) تابع تاوان انحراف مطلق به طور هموار بریده‌شده[۴] (SCAD) را معرفی کردند، به طوری که در حضور این تابع‌های تاوان عمل انتخاب متغیر و براورد پارامترها به طور همزمان انجام می‌پذیرد. امروزه نیاز به مدل‌های آماری انعطاف‌پذیر مانند مدل‌های رگرسیونی نیم‌پارامتری به دلیل حجم وسیعی از داده‌های پزشکی، مهندسی و محیطی افزایش یافته است. چون با استفاده از این مدل‌ها می‌توان به تحلیل داده‌های پیچیده در حال توسعه پرداخت، به خصوص زمانی که داده‌ها برخاسته از یک جامعه ناهمگن باشند. مک‌لاکلان و پیل (۲۰۰۰) مرور جامعی بر روی این‌گونه مدل‌ها و چگونگی ساختار آنها داشته‌اند. خلیلی و چن (۲۰۰۷) بحث انتخاب متغیر با رویکرد تاوانیده را بر روی آمیزه‌ای متناهی از یک مدل رگرسیونی ساده مورد مطالعه قرار دادند.

هاردل و همکاران (۲۰۰۰)، راپرت و همکاران (۲۰۰۳) و یاچو (۲۰۰۳) مدل‌های رگرسیونی نیم‌پارامتری را به همراه شیوه‌های استنباط آن‌ها مورد بررسی قرار داده‌اند. لی و لیانگ (۲۰۰۸) مسئله

---

[۱] Ordinary Least Squares
[۲] Residual Sum of Squares
[۳] Least Absolute Shrinkage and Selection Operator
[۴] Smoothly Clipped Absolute Deviation

انتخاب متغیر با رویکرد تاوانیده در زمینه مدل‌های خطی جزئی ضریب-متغیر تعمیم‌یافته[۵](GVCPLM) را مورد بررسی قرار دادند. انتخاب متغیر با رویکرد تاوانیده در ارتباط با این نوع مدل‌ها چالش‌برانگیز است، چون شامل انتخاب متغیرهای معنادار برای هر دو بخش پارامتری و ناپارامتری است. هانتر و یانگ (۲۰۱۲) آمیزه‌ای متناهی از مدل‌های رگرسیونی نیم‌پارامتری را در نظر گرفتند و در مورد خطاهای هر یک از زیرمدل‌ها فرض کردند که خطاها مستقل و هم‌توزیع باشند، هم‌چنین بخش پارامتری را به سه حالت مختلف بسط دادند و با استفاده از الگوریتم شبه EM به براورد پارامترها پرداختند. اسکندری و اورمز (۲۰۱۵) بحث انتخاب متغیر در خانواده توزیع‌های نمایی را با استفاده از شیوه‌های تاوانیده در ترکیبی از مدل تعمیم‌یافته نیم‌پارامتری لی و لیانگ (۲۰۰۸) و آمیزه‌ای متناهی از مدل‌های رگرسیونی خلیلی و چن (۲۰۰۷) مطرح کردند که تا آن زمان، شیوه‌های تاوانیده ارائه‌شده در مورد ترکیب دو مدل مطرح‌شده به طور هم‌زمان بررسی نشده بودند. اورمز و اسکندری (۲۰۱۶) انتخاب متغیر در آمیزه‌ای متناهی از مدل‌های رگرسیونی نیم‌پارامتری تعمیم‌یافته با استفاده از براورد تاوانیده را مطرح کردند، آنها مدل ربط را در حالت نیم‌پارامتری بسط دادند و تابع ناپارامتری را چندبعدی در نظر گرفتند.

هدف این مقاله انتخاب متغیر در آمیزه‌ای متناهی از مدل‌های رگرسیونی نیم‌پارامتری بر مبنای یک رویکرد جدید و در شرایطی است که داده‌ها از توزیع پواسون تبعیت می‌کنند. در واقع از بین خانواده توزیع‌های نمایی، حالت خاص توزیع پواسون در نظر گرفته می‌شود، به این دلیل که ممکن است مشکل بیش‌پراکندگی[۶] و صفرهای بیش از حد[۷] رخ دهد و محاسبات را از روند طبیعی خود خارج کند. در چنین شرایطی استفاده از توزیع دوجمله‌ای منفی به جای استفاده از توزیع پواسون پیشنهاد می‌شود. ما در این مقاله وارد بحث تئوری آن نمی‌شویم بلکه این راهکار را به عنوان یک رویکرد جدید در براورد پارامترهای مدل مطرح شده به کار می‌گیریم و نشان می‌دهیم که با جایگذاری توزیع دوجمله‌ای منفی مشکل بیش‌پراکندگی و صفرهای بیش از حد برطرف می‌گردد، به طوری که در براورد صحیح پارامترها مشکلی ایجاد نمی‌شود.

صفرهای بیش از حد و بیش‌پراکندگی پدیده‌های رایجی هستند که در استفاده از مدل‌های رگرسیونی پواسون ساده به منظور مدل‌بندی داده‌های شمارشی محدودیت ایجاد می‌کنند. این مشکل زمانی رخ می‌دهد که نمونه‌های متغیر پاسخ، حاصل از جامعه‌ای با چندین زیرجامعه باشند، در نتیجه ناهمگنی غیر قابل مشاهده در داده‌ها ایجاد می‌شود. به منظور کنترل بیش‌پراکندگی استفاده از یک مدل رگرسیونی دوجمله‌ای منفی پیشنهاد می‌شود، چون در این حالت واریانس از میانگین بزرگتر است.

---

[۵] Generalized Varying-Coefficient Partially Linear Model
[۶] Overdispersion
[۷] Excess zeros

یک شیوه رایج به منظور مدل‌بندی صفرهای بیش از حد، استفاده از مدل پواسونی با انباشتگی صفر بیش از حد[۸] (ZIP) است که توسط لامبرت (۱۹۹۲) مورد مطالعه قرار گرفته است. لیم و همکاران (۲۰۱۴) اظهار داشتند که توزیع پواسون متورم صفر، آمیزه‌ای از یک توزیع پواسون و یک توزیع تباهیده در نقطه صفر است. علاوه بر این اگر مجددا بیش‌پراکنشی بعد از مدل‌بندی صفرهای اضافی وجود داشته باشد، راه حل مناسب ارائه‌شده توسط لیم و همکاران (۲۰۱۴) استفاده از یک مدل دوجمله‌ای منفی با انباشتگی صفر بیش از حد [۹] (ZINB) است.

در بخش ۲ مدل‌های آمیزه‌ای متناهی با تعریف صورت پارامتری آنها معرفی می‌شوند. در بخش ۳ حالت رگرسیونی مدل‌های آمیزه‌ای متناهی به شکل نیم‌پارامتری و به نام آمیزه‌ای متناهی از مدل‌های رگرسیونی نیم‌پارامتری تشریح می‌شود. بخش ۴ شامل مطالعه شبیه‌سازی به منظور بررسی عملکرد الگوریتم EM در براورد ضرایب مورد نظر است.

۲ مدل‌های آمیزه‌ای متناهی

توزیع‌های آمیزه‌ای متناهی رهیافتی آماری ایجاد می‌کنند تا برمبنای آن بتوان به مدل‌بندی گستره وسیعی از پدیده‌های تصادفی پرداخت. به دلیل انعطاف‌پذیری این‌گونه توزیع‌ها برای مدل‌بندی، مدل‌های آمیزه‌ای متناهی از نظر کاربردی و نظری توجه بسیاری را در طی سال‌های اخیر به خود جلب کرده‌اند.

تعریف ۱: فرض کنید $Y_1, \ldots, Y_n$ نمونه‌ای تصادفی به اندازه n باشد، به‌طوری‌که Y_j بردار تصادفی pبعدی با تابع چگالی احتمال $f(y_j)$ بر روی فضای $\Re^p$ است. اگر $f_i(y_j)$ تابع چگالیjامین مشخصه مربوط به iامین مولفه باشد، آنگاه فرم پارامتری مدل‌های آمیزه‌ای به‌صورت

$$f(y_j;\Psi)=\sum_{i=1}^{g}\pi_i f_i(y_j;\theta_i) \quad j=1,\ldots,P$$

است که در آن $\Psi=(\pi_1,\ldots,\pi_{g-1},\xi^T)^T$ پارامترهای مدل، شامل $\xi=(\theta_1,\ldots,\theta_g)$ و نسبت‌های آمیختگی[۱۰] با وزن‌های π_i است، به‌طوری‌که مجموعشان به ازای تمام مولفه‌ها برابر با ۱ ست.

[۸] Zero-Inflated Poisson
[۹] Zero-Inflated Negative Binomial
[۱۰] Mixing proportion

۳ آمیزه‌ای متناهی از مدل‌های رگرسیونی نیم‌پارامتری

برمبنای مدل معرفی‌شده توسط اورمز و اسکندری (۲۰۱۶) فرض کنید متغیر پاسخ در ارتباط با متغیر کمکی از مدل رگرسیونی نیم پارامتری GVCPLM تبعیت کند. به همین منظور متغیر پاسخ Y با مقادیر ممکن $Y \subset \Re$ و برداری از متغیرهای کمکی تاثیرگذار بر روی متغیر پاسخ را به‌صورت (u, x, z) در نظر بگیرید، که در آن $x = (x_1, \ldots, x_q)^T$، $z = (z_1, \ldots, z_p)^T$ و u یک تک‌متغیر است.

تعریف ۲: فرض کنید $G = \{f(y; \theta, \phi); (\theta, \phi) \in \Theta \times (0, \infty)\}$ خانواده‌ای از تابع‌های چگالی پارامتری Y نسبت به اندازه σ متناهی ν باشد، که در آن $\theta \in \Re$ و ϕ یک پارامتر پراکندگی[11] است. گفته می‌شود (u, x, z, Y) از آمیزه‌ای متناهی شامل مدل‌های رگرسیونی نیم‌پارامتری با مرتبه K پیروی می‌کند، هرگاه تابع چگالی شرطی Y به شرط (u, x, z) به‌صورت

$$f(y; u, x, z, \Psi) = \sum_{k=1}^{K} \pi_k f(y; \theta_k(u, x, z), \phi_k) \quad k = 1, 2, ..., K \qquad (1)$$

باشد، به‌گونه‌ای که $\theta_k(u, x, z) = h(x^t \alpha_k(u) + z^t \beta_k)$ با تابع پیوند معلوم $h(.)$ به مدل رگرسیونی نیم‌پارامتری معرفی‌شده توسط لی و لیانگ (۲۰۰۸) ارتباط پیدا می‌کند و $\alpha(.)$ برداری شامل تابع‌های نامعلوم از ضرایب رگرسیونی هموار است. بردار پارامتری $\Psi = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \beta_1, \ldots, \beta_k, \phi, \pi)$ شامل $\alpha_k = (\alpha_{k1}, \ldots, \alpha_{kq})^T$، $\beta_k = (\beta_{k1}, \ldots, \beta_{kp})^T$، $\phi = (\phi_1, \ldots, \phi_k)^T$ و $\pi = (\pi_1, \ldots, \pi_{k-1})^T$ است.

مدل‌های رگرسیونی نیم‌پارامتری آمیزه‌ای متناهی [12] (FMSPR) ارائه‌شده توسط اورمز و اسکندری (۲۰۱۶) که عضو خانواده نمایی هستند، در تعریف ۲ روشی معمول به منظور مدل‌بندی این‌گونه رابطه‌های ناهمگن نامشهود فراهم می‌کند.

۳,۱ آمیزه‌ای متناهی از مدل‌های رگرسیونی نیم‌پارامتری با توزیع پواسون

برمبنای تعریف ۲، مدل FMSPR که در آن متغیر پاسخ دارای توزیع پواسون با پارامتر λ باشد، همانند (۱) تعریف می‌شود با این تفاوت که به‌جای $\theta_k(u, x, z)$، $\lambda_k(u, x, z)$ در نظر گرفته می‌شود. وقتی

[11] Dispersion parameter
[12] Finite Mixture of Semi-Parametric Regression

متغیر تصادفی Y دارای توزیع پواسون با پارامتر λ باشد، پارامتر پراکندگی ϕ_k مقداری برابر ۱ اختیار می‌کند. به‌دلیل این‌که با تعریف توزیع پواسون به فرم خانواده نمایی (۲)، مقدار پارامتر پراکندگی برمبنای توزیع پواسون به‌صورت

$$f_y(y;\theta,\phi)=\exp\{\frac{y\theta-B(\theta)}{\phi}+C(y,\phi)\} \qquad (۲)$$

مشخص می‌شود که در آن $B(.)$ و $C(.,.)$ تابع‌های معلوم هستند و بازه مقادیر y به θ یا ϕ بستگی ندارد. در این فرمول‌بندی، θ پارامتر کانونی و ϕ پارامتر پراکندگی است. بر مبنای تعریف به فرم خانواده نمایی تابع چگالی $f(y_i;\lambda_k(u_i,x_i,z_i),۱)$ به‌ازای $i=۱,...,n$ براساس تابع چگالی توزیع پواسون به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$f(y_i;\lambda_k(u_i,x_i,z_i),۱)=\exp\{y_i\log\lambda_k-\lambda_k-\log y_i!\}$$

۳,۲ انتخاب متغیر در آمیزه‌ای متناهی از مدل‌های رگرسیونی نیم‌پارامتری با توزیع پواسون

مسئله انتخاب متغیر با رویکرد درستنمایی تاوانیده و با در نظر گرفتن توزیع پواسون برای متغیر پاسخ در سه مرحله اصلی بیان می‌شود.

مرحله اول : لگاریتم تابع درستنمایی به شرط پارامتر Ψ برمبنای مدل FMSPR به‌صورت

$$\ell_n(\Psi)=\sum_{i=۱}^{n}\log\{\sum_{k=۱}^{K}\pi_k f(y_i;\lambda_k(u_i,x_i,z_i),۱)\}$$

تعریف می‌شود در نتیجه برای براورد ضرایب مجهول برمبنای داده‌های کامل در حضور متغیرهای نشانگر فرضی ν_{ik}، لگاریتم تابع درستنمایی کامل به‌صورت

$$\ell_n^c(\Psi)=\sum_{i=۱}^{n}\sum_{k=۱}^{K}\nu_{ik}\{\log\pi_k+y_i\log\lambda_k-\lambda_k-\log y_i!\}$$

تعریف می‌شود. به دلیل کارکردن با یک مدل رگرسیونی نیم‌پارامتری و عدم اطلاع در مورد تابع ناپارامتری $\alpha(.)$ بر مبنای روش لی و لیانگ (۲۰۰۸)، با استفاده از تقریب موضعی بسط تیلور مرتبه دوم، $\alpha_k j(\nu)$

به‌ازای ν و در همسایگی متغیری مانند u به‌صورت

$$\begin{aligned}\alpha_{kj}(\nu) &\approx \alpha_{kj}(u)+\alpha'_{kj}(u)(\nu-u),\ \ k=۱,...,k,j=۱,...,P\\ &\equiv a_{kj}+b_{kj}(\nu-u)\end{aligned} \qquad (۳)$$

که در آن تابع $\alpha(.)$ به‌ازای متغیر u و مولفه k و بعد j، با متغیر a_{kj} و مشتق مرتبه اول آن با متغیر b_{kj} نمایش داده می‌شود. بسط تیلور در رابطه (۳) تنها تا مرتبه دوم در نظر گرفته می‌شود و این در حالی است که هر چه تعداد مرتبه افزایش یابد، دقت نیز افزایش خواهد یافت. بنابراین تابع درستنمایی برمبنای مولفه ناپارامتری و تابع هسته $k_h(u_i-u)=\frac{۱}{h}k(\frac{u_i-u}{h})$، برای براورد موضعی و تقریبی a، b و β به‌صورت

$$\ell_n=\sum_{i=۱}^{n}\log\sum_{k=۱}^{K}\{\pi_k[\exp\{y_i\log\tilde{\lambda}_k-\tilde{\lambda}_k-\log y_i!\}]k_h(u_i-u)\} \qquad (۴)$$

تعریف می‌شود، که در آن $\tilde{\lambda}_k(u_i,x_i,z_i)$ بر مبنای a و b به‌شکل

$$\tilde{\lambda}_k(x_i,u_i,z_i)=\exp(x_i^Ta_k+x_i^Tb_k(u_i-u)+z_i^T\beta_k),\ i=۱,...,n,k=۱,...,K \quad (۵)$$

تعریف می‌شود. پس از مشخص کردن $\tilde{\lambda}_k$، مقادیر بهینه (۴) با استفاده از الگوریتم امید ریاضی-ماکسیمم‌سازی[۱۳] (EM) محاسبه می‌شود. برای ماکسیمم‌سازی و محاسبه مقدار بهینه، لگاریتم تابع درستنمایی کامل به‌صورت

$$\ell_n^c(\Psi)=\sum_{i=۱}^{n}\sum_{k=۱}^{K}\nu_{ik}\{\log\pi_k+(y_i\log\tilde{\lambda}_k-\tilde{\lambda}_k-\log y_i!)+\log k_h(u_i-u)\} \quad (۶)$$

تعریف می‌شود. در تابع هسته $k_h(u_i-u)$ مندرج در (۶)، h پهنای باند است که با اختیار مقادیر مختلف ما را ملزم به حرکت در فاصله‌ای معین و در همسایگی u می‌کند.

گام E: در این گام امیدریاضی شرطی $\ell_n^c(\Psi)$ به شرط ν_{ik} و برمبنای مشاهدات (u_i,x_i,z_i,y_i)

[۱۳] Expectation-Maximization

به‌صورت

$$\begin{aligned} Q(\Psi;\Psi_{(m)}) &= \sum_{i=۱}^{n}\sum_{k=۱}^{K}\omega_{ik}^{(m)}[y_i\log\tilde{\lambda}_k-\tilde{\lambda}_k-\log y_i!]+\sum_{i=۱}^{n}\sum_{k=۱}^{K}\omega_{ik}^{(m)}\log\pi_k \\ &+ \sum_{i=۱}^{n}\sum_{k=۱}^{K}\omega_{ik}^{(m)}\log k_h(u_i-u) \end{aligned}$$

تعریف می‌شود، به‌طوری که $\omega_{ik}^{(m)}$ امید ν_{ik} به شرط مشاهدات است و به‌عنوان وزن در نظر گرفته می‌شود و به‌صورت

$$\omega_{ik}^{(m)}=\frac{\pi_k^{(m)}\exp(y_i\log\tilde{\lambda}_k^{(m)}-\tilde{\lambda^{(m)}}_k-\log y_i!)}{\sum_{k=۱}^{K}\pi_k^{(m)}\exp(y_i\log\tilde{\lambda^{(m)}}_k-\tilde{\lambda^{(m)}}_k-\log y_i!)}$$

قابل محاسبه است.

گام M: چون در $(m+۱)$ امین مرحله از تکرار، $Q(\Psi;\Psi_{(m)})$ نسبت به عناصر بردار Ψ ماکسیمم می‌شود و ماکسیمم کردن $Q(\Psi;\Psi_{(m)})$ برمبنای نسبت‌های آمیختگی به همراه دیگر پارامترها دارای پیچیدگی محاسباتی است، خلیلی و چن (۲۰۰۷) پیشنهاد کردند که در هر مرحله برمبنای وزن $\omega_{ik}^{(m)}$، نسبت‌های آمیختگی به‌صورت

$$\pi_k^{(m+۱)}=\frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n}\omega_{ik}^{(m)}\quad k=۱,...,K$$

و متناسب با هر مرحله از تکرار به روز شوند. سپس با ثابت در نظر گرفتن π_k عبارت $Q(\Psi;\Psi_{(m)})$ نسبت به a، b و β ماکسیمم شود. با توجه به (۵) a و b ضرایب بخش ناپارامتری هستند که با به کارگیری الگوریتم EM به دنبال براورد تقریبی آنها هستیم. بنابراین به‌منظور براورد ضرایب بخش پارامتری

و ناپارامتری، در هر مرحله از تکرار الگوریتم، باید به حل معادله‌های زیر بپردازیم:

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_{ik}^{(m)} \frac{\partial}{\partial \beta_{kj}} \{y_i \log \tilde{\lambda}_k - \tilde{\lambda}_k - \log y_i! + \log k_h(u_i - u)\} = 0 \qquad (۷)$$

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_{ik}^{(m)} \frac{\partial}{\partial a_{kj}} \{y_i \log \tilde{\lambda}_k - \tilde{\lambda}_k - \log y_i! + \log k_h(u_i - u)\} = 0 \qquad (۸)$$

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_{ik}^{(m)} \frac{\partial}{\partial b_{kj}} \{y_i \log \tilde{\lambda}_k - \tilde{\lambda}_k - \log y_i! + \log k_h(u_i - u)\} = 0 \qquad (۹)$$

همان‌طور که ملاحظه می‌شود، یک دستگاه معادلات پیچیده از مجهول‌ها ایجاد شده است که حل آن به طور تحلیلی امکان‌پذیر نیست، در نتیجه با کمک گرفتن از محیط نرم‌افزار MATLAB و با ۲۰۰۰ مرتبه تکرار، بهترین جواب همگرا به نتیجه واقعی ایجاد می‌گردد. در این مرحله به جای ضریب مجهول بخش ناپارامتری از براورد بهینه $\tilde{a}$ استفاده می‌شود و داریم $\tilde{\alpha}(u) = \tilde{a}$.

مرحله دوم: محاسبه براورد ضرایب βتاوانیده

برای براورد ضرایب β تاوانیده، تابع درستنمایی تاوانیده به‌صورت

$$\ell(\beta) = \sum_{i=1}^{n} \log \sum_{k=1}^{K} \{\pi_k \exp(y_i \log \lambda_k^* - \lambda_k^* - \log y_i!)\} - p_n(\Psi) \qquad (۱۰)$$

تعریف می‌شود. تفاوت λ_k^* با $\tilde{\lambda}_k$ در این است که به جای تابع مجهول ضرایب ناپارامتری مرحله قبل، از براورد بهینه حاصل از مرحله اول استفاده می‌شود تا براوردهای دقیق‌تری برای ضرایب پارامتری تاوانیده محاسبه شود. با ماکسیمم کردن تابع درستنمایی تاوانیده $\ell(\beta)$ نسبت به β، براورد تاوانیده ضرایب بخش پارامتری به دست می‌آیند. در (۱۰) به جای $p_{nk}(\beta)$ در

$$p_n(\Psi) = \sum_{k=1}^{K} \pi_k \{\sum_{j=1}^{P} p_{nk}(\beta_{kj})\} \qquad (۱۱)$$

از تقریب درجه دوم موضعی آن در نزدیکی نقطه β_0 استفاده می‌شود. دلیل استفاده از این تقریب، رفع مشکل عدم مشتق‌پذیری تابع تاوان $p_{nk}(\beta)$ در $\beta = 0$ است (فن و لی ۲۰۰۱).

گام E: این گام نیز مشابه گام محاسبه امیدریاضی مرحله اول است، با این تفاوت که امید شرطی لگاریتم تابع درستنمایی کامل تاوانیده $\tilde{\ell}_c(\Psi) = \ell^c(\Psi) - \tilde{p}_n(\Psi)$ به‌صورت $\tilde{\ell}^c(\Psi)$ به‌شرط متغیرهای نشانگر ν_{ik}ها و مشاهدات (u_i, x_i, z_i, y_i) محاسبه می‌شود و به‌صورت

$$\begin{aligned} Q(\Psi; \Psi^{(m)}) &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{K} \omega_{ik}^{(m)} \{y_i \log \lambda_k^* - \lambda_k^* - \log y_i!\} \\ &+ \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{K} \omega_{ik}^{(m)} \log \pi_k - \tilde{p}_n(\Psi) \end{aligned} \qquad (۱۲)$$

است. اکنون به‌جای $\tilde{p}_n(\Psi)$ برمبنای تابع‌های تاوان LASSO ، HARD و SCAD ، از تقریب درجه دوم موضعی استفاده می‌شود. براساس (۱۱) پس از جایگذاری تابع‌های تاوان به جای $p_{nk}(\beta_{jk})$، تابع‌های حاصل به دلیل وجود ساختار آمیزه‌ای به ترتیب آمیزه‌ای از انحراف مطلق به طور هموار بریده‌شده (SCAD)، آمیزه‌ای از کمترین انقباض مطلق و عملگر گزینش (LASSO) و آمیزه‌ای سخت [۱۴] (HARD) خوانده می‌شوند و با نمادهای MIXSCAD، MIXLASSO و MIXHARD (خلیلی و چن ۲۰۰۷) نشان داده می‌شوند و پیشوند MIX مخفف کلمهMIXTURE است.

۱. $\tilde{p}_n(\Psi)$ به ازای تابع تاوان LASSO :

$$\begin{aligned} \tilde{p}_n^L(\Psi; \Psi^{(m)}) &= \sum_{k=1}^{K} \pi_k \sum_{j=1}^{P} \{\gamma_{nk}\sqrt{n}|\beta_{jk}^{(m)}| \\ &+ \frac{1}{2\beta_{jk}^{(m)}}[\sqrt{n}\gamma_{nk} sgn(\beta_{jk}^{(m)})](\beta_{jk}^{2} - \beta_{jk}^{(m)2})\} \end{aligned} \qquad (۱۳)$$

۲. $\tilde{p}_n(\Psi)$ به ازای تابع تاوان HARD :

$$\begin{aligned} \tilde{p}_n^H(\Psi; \Psi^{(m)}) &= \sum_{k=1}^{K} \pi_k \sum_{j=1}^{P} \{\gamma_{nk}^2 - (\sqrt{n}|\beta_{jk}^{(m)}| - \gamma_{nk})^2 I(\sqrt{n}|\beta_{jk}^{(m)}| < \gamma_{nk}) \\ &+ \frac{1}{\beta_{jk}^{(m)}}\sqrt{n}(sgn(\beta_{jk}^{(m)}))(\sqrt{n}\|\beta_{jk}^{(m)}\| - \gamma_{nk}) \\ &\times I(\sqrt{n}\|\beta_{jk}^{(m)}\| < \gamma_{nk})(\beta_{jk}^{2} - \beta_{jk}^{(m)2})\} \end{aligned} \qquad (۱۴)$$

[۱۴] Mixture of Hard

۳. $\tilde{p}_n(\Psi)$ به ازای تابع تاوان SCAD :

$$\begin{aligned}\tilde{p}_n^S(\Psi;\Psi^{(m)}) &= \sum_{k=1}^{K}\pi_k\sum_{j=1}^{P}\{\gamma_{nk}\sqrt{n}I(\sqrt{n}\|\beta_{jk}^{(m)}\|\le\gamma_{nk})\\ &+\frac{\sqrt{n}(a\gamma_{nk}-\sqrt{n}\|\beta_{jk}^{(m)}\|)_+}{a-1}I(\sqrt{n}\|\beta_{jk}^{(m)}\|>\gamma_{nk}) \qquad (15)\\ &+\frac{1}{2\beta_{jk}^{(m)}}\Big[\frac{-n(sgn(\beta_{jk}^{(m)}))}{a-1}I(\sqrt{n}\|\beta_{jk}^{(m)}\|>\gamma_{nk})\Big](\beta_{jk}^{2}-\beta_{jk}^{(m)2})\}\end{aligned}$$

که در آن $a>0$ و $\gamma_{nk}>0$پارامترهای مجهول تابع‌های مورد نظر هستند. محققانی چون فن و لی (۲۰۰۱) در مطالعات خود $a=3.7$ در نظر گرفتند و به این نتیجه رسیدند که در شبیه‌سازی‌ها نتیجه‌های قابل قبول حاصل می‌شود. γ_{nk}ها پارامترهای تنظیم‌سازی[15] نامیده می‌شوند که بر اثر تجربه محقق و یا روش‌های اعتبارسنجی متقابل[16] (CV) و اعتبارسنجی متقابل تعمیم‌یافته[17] (GCV)(کراون و واهبا ۱۹۷۹) محاسبه می‌شوند. خلیلی و چن (۲۰۰۷) یک معیار GCV بر مبنای انحراف به ازای هر مولفه برای آمیزه‌ای متناهی از مدل‌های رگرسیونی ارائه کردند. با جای‌گذاری توابع تاوان (۱۳)، (۱۴) و (۱۵) در امید شرطی و ماکسیمم کردن آن در گام M نسبت به پارامترهای مجهول، براورد ضرایب پارامتری تاوانیده مختص هریک از این نوع توابع به دست می‌آیند.

مرحله سوم: محاسبه براورد دقیق ضرایب ناپارامتری

در این مرحله از براوردهای تاوانیده ضرایب پارامتری $\hat{\beta}$ حاصل از مرحله قبل استفاده می‌شود و به جای براوردهای موضعی غیرتاوانیده مرحله اول قرار داده می‌شود. در واقع در این مرحله

$$\tilde{\lambda}_k^* = \exp(x_i^T a_k + x_i^T b_k(u_i-u) + z_i^T\hat{\beta}_k)$$

به‌جای $\tilde{\lambda}_k$ در مرحله اول جایگزین می‌شود که در آن ضرایب بخش ناپارامتری a و b مجهول در نظر گرفته می‌شوند و براورد پارامتری ضرایب رگرسیونی مرحله دوم جایگذاری می‌گردد. تابع درستنمایی در این مرحله

[15] Tuning parameter
[16] Cross-Validation
[17] Generalized Cross-Validation

بر اساس $\tilde{\lambda}_k^*$ به‌صورت

$$\sum_{i=1}^{n} \log \sum_{k=1}^{K} \{\pi_k \exp(y_i \log \tilde{\lambda}_k^* - \tilde{\lambda}_k^* - \log y_i!) k_h(u_i - u)\}$$

است. درنتیجه تابع درستنمایی کامل مانند (۵) برمبنای λ_k^* تعریف می‌شود.

گام E: امید $\ell_n^c(\Psi)$ به‌شرط متغیرهای نشانگر نامشهود ν_{ik} و مشاهدات (u_i, x_i, z_i, y_i) به‌صورت

$$\begin{aligned} Q(\Psi; \Psi^{(m)}) &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{K} \omega_{ik}^{(m)} \{y_i \log \tilde{\lambda}_k^* - \tilde{\lambda}_k^* - \log y_i!\} + \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{K} \omega_{ik}^{(m)} \log \pi_k \\ &\quad + \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{K} \omega_{ik}^{(m)} \log k_h(u_i - u) \end{aligned}$$

گام M: در این گام برمبنای $(m+1)$ امین مرحله تکرار، $Q(\Psi; \Psi^{(m)})$ نسبت به ضرایب مجهول بخش ناپارامتری، a و b ماکسیمم می‌شود که بعد از به‌روزآوری نسبت‌های آمیزه‌ای انجام می‌پذیرد. بنابراین با ثابت در نظر گرفتن π_k و با حل معادلات مانند (۷) و (۸) براوردهای مورد نظر به دست می‌آیند. در واقع بعد از انجام محاسبات گام M در مرحله‌ی دوم، به منظور براورد دقیق‌تر ضرایب مجهول بخش ناپارامتری در مقابل براوردهای موضعی ضرایب ناپارامتری در مرحله اول، به حل معادلات با در نظر گرفتن $\tilde{\lambda}_k^*$ به‌جای $\tilde{\lambda}_k$ پرداخته می‌شود. در اینجا نیز همانند مرحله اول با کمک گرفتن از محیط نرم‌افزار معرفی‌شده، جواب بهینه دستگاه معادلات با تعداد تکرار معلوم به دست آورده می‌شود. بنابراین در مرحله سوم براوردهای دقیق ضرایب ناپارامتری و از مرحله دوم براوردهای تاوانیده ضرایب پارامتری به‌صورت $\{\hat{a}, \hat{b}, \hat{\beta}\}$ حاصل می‌شوند. روند انجام محاسبات به طور کلی در پنج گام زیر انجام می‌پذیرد:

۱. در نظر گرفتن یک مقدار اولیه برای β تحت عنوان β_0.

۲. محاسبه براورد موضعی تابع ناپارامتری به‌صورت $\tilde{\alpha}(u) = \tilde{a}$.

۳. محاسبه براورد ضرایب پارامتری تاوانیده β تحت عنوان $\hat{\beta}$، در حضور تابع ناپارامتری$\tilde{\alpha}(u)$.

۴. محاسبه براورد دقیق تابع ناپارامتری بر مبنای ضرایب a و b بسط تیلور در حضور ضرایب تاوانیده $\hat{\beta}$، تحت عنوان $\hat{a}$ و $\hat{b}$.

۵. در هر یک از گام‌های محاسبات، نتایج نهایی پس از تکرار مراحل E وM و همگرایی الگوریتم EM در نظر گرفته می‌شوند.

۴ مطالعه شبیه‌سازی

به‌منظور انجام شبیه‌سازی برای مراحل مطرح شده، مقادیر اولیه به‌صورت زیر در نظر گرفته می‌شوند: $k = ۳$ در نظر گرفته می‌شود، به این ترتیب سه جامعه با نسبت‌های آمیختگی $\pi_۱ = ۰/۵$، $\pi_۲ = ۰/۳$ و $\pi_۳ = ۰/۲$ فرض می‌شود. فرض کنید X متغیری با توزیع نرمال دومتغیره به‌صورت $X \sim N_۲(\mu, \Sigma)$ باشد و به همین ترتیب Z نیز متغیری با توزیع نرمال ده‌متغیره به‌صورت $Z \sim N_{۱۰}(\mu, \Sigma)$ فرض می‌شود، با میانگین صفر و ماتریس کوواریانسی که اجزای آن از طریق رابطه $\sigma^{|i-j|}$ همانند Σ متغیر X محاسبه می‌شود. همچنین مقادیر اولیه ضرایب β بخش پارامتری در جدول ۲ نشان داده شده است.

همانند لی و لیانگ (۲۰۰۸) و اسکندری و اورمز (۲۰۱۵) در ارتباط با بخش ناپارامتری و تابع ناپارامتری $\alpha(.)$ با استفاده از یک تابع غیر خطی دلخواه مانند توابع نمایی یا مثلثاتی، تقریبی برای تابع ناپارامتری به‌صورت $\alpha_{k۱} = \frac{۱}{۲}\exp(۳u + ۱)$ و $\alpha_{k۲} = ۴u(۱ + u^۲)$ در نظر گرفته می‌شود که در آن U متغیری با توزیع $U(۰, ۱)$ است.

برمبنای اطلاعات اولیه مطرح شده، ۱۰۰ داده از سه جامعه با توزیع‌های $Poisson(\lambda_۱)$، $Poisson(\lambda_۲)$ و $Poisson(\lambda_۳)$ تولید می‌کنیم که به‌عنوان نمونه $\lambda_۱$ به‌شکل زیر محاسبه می‌شود:

$$\lambda_۱ = \exp(x^T \begin{pmatrix} \frac{۱}{۲}\exp(۳u + ۱) \\ ۴u(۱ + u^۲) \end{pmatrix} + z^T\beta)$$

مقدار میانگین و واریانس بر مبنای داده‌های شبیه‌سازی‌شده از توزیع پواسون به ترتیب عبارتند از ۱۰/۵۳۲ و ۸۹۶/۷۰۵. به علت وجود صفرهای زیاد در داده‌های تولیدشده بر مبنای توزیع پواسون، مشاهده می‌کنید که مقدار واریانس بسیار بزرگ است. بنابراین پراکندگی بیش از حد رخ داده است و همانطور که قبلا نیز توضیح داده شد، به‌منظور محاسبه براوردهایی با دقت بیشتر به جای توزیع پواسون از توزیع دوجمله‌ای منفی برای تولید داده‌ها استفاده می‌کنیم. در نتیجه بر مبنای تعریف تابع توزیع دوجمله‌ای منفی در مدل‌های آمیزه‌ای (زوو و همکاران، ۲۰۱۳)

$$Y \sim NB(r, p), \quad p_k = \frac{\mu_k}{\mu_k + \phi_k}, \quad \mu_k = \exp(x^T\alpha_k(u) + z^T\beta_k) \quad k = ۱, ۲, ۳$$

را تولید می‌کنیم. بر مبنای توابع ناپارامتری، ضرایب پارامتری و بقیه موارد همانند ابتدای بخش ۴ در نظر گرفته شده‌اند.

۴,۱ بررسی عملکرد روش ارائه‌شده در ارتباط با بخش پارامتری

به منظور ارزیابی شیوه انتخاب متغیر مربوط به بخش پارامتری از شاخص میانگین توان دوم خطای تعمیم‌یافته[۱۸] (GMSE) استفاده می‌شود. در واقع GMSE بر اساس براورد ضرایب تاوانیده نهایی که از ماکسیمم‌سازی (۱۲) و پس از طی گام‌های E و M به دست می‌آید، به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\mathbf{GMSE}(\hat{\beta}) = E[Z^T(\hat{\beta} - \beta)]^2 = (\hat{\beta} - \beta)E(ZZ^T)(\hat{\beta} - \beta)$$

در جدول ۱ با مقایسه مقادیر GMSE برمبنای دو توزیع متفاوت، مشاهده می‌شود که با در نظر گرفتن

جدول ۱. مقدار شاخص GMSEبرمبنای تابع‌های تاوان متفاوت

	تابع تاوان		
	MIXLASSO	MIXHARD	MIXSCAD
پواسون	۰/۷۰۳	۰/۵۶۱	۰/۳۴۰
دوجمله‌ای منفی	۰/۵۷۴	۰/۲۱۲	۰/۱۸۱

توزیع دوجمله‌ای منفی، این مقدار کاهش یافته است. از سوی دیگر شیوه MIXSCAD با کمترین میزان GMSE در هر دو توزیع از عملکرد بهتری برخوردار است، چون میزان خطا در براورد ضرایب رگرسیونی تاوانیده با استفاده از تابع تاوان MIXSCAD نسبت به هر یک از دو تابع تاوان MIXHARD و MIXLASSO کمتر است. در جدول ۲ میانگین مقدار براورد ضرایب به همراه انحراف استانداردشان به ازای ۲۰۰۰ مرتبه اجرای برنامه نشان داده می‌شود. در واقع هدف براورد ضرایب صفر به درستی بوده است و همانطور که مشاهده می‌شود این امر تا حد قابل قبولی به درستی تحقق یافته است چون میانگین براورد ضرایب صفر بسیار کوچک و نزدیک صفر شده‌اند. اما تعدادی از ضرایب صفر به اشتباه مخالف صفر براورد شده‌اند، چون میانگین براوردها عددی مخالف صفر ولی نزدیک به آن حاصل شده است. با این وجود اثر این براوردهای نادرست در طول اجرای تمام مرحله‌ها قابل چشم‌پوشی است، به دلیل اینکه میانگین کل مقادیر به طور تقریبی برابر با صفر است.

همان‌طور که در جدول ۲ ملاحظه می‌شود براورد تاوانیده حاصل از تابع تاوان MIXSCAD از دقت بیشتری برخوردار است. براوردهای حاصل از تاوان MIXHARD همانند براوردهای MIXSCAD

[۱۸] Generalized Mean Square Error

جدول ۲. براورد ضرایب پارامتری و انحراف معیار آنها بر مبنای ۲۰۰۰ مرتبه تکرار

MIXLASSO		MIXHARD		MIXSCAD			
SD	$\hat{\beta}$	SD	$\hat{\beta}$	SD	$\hat{\beta}$	β	K
۰/۱۶۷۱	۲/۸۸۱۲	۰/۱۶۸۲	۲/۷۵۲۱	۰/۱۵۲۳	۲/۶۶۲۱	۳	
۰/۱۳۲۲	۰/۹۸۰۱	۰/۱۳۳۱	۰/۸۸۲۳	۰/۱۴۳۱	۰/۷۰۲۲	۱	
۰/۱۴۱۳	−۰/۰۳۰۱	۰/۱۴۳۴	−۰/۰۴۵۱	۰/۱۶۳۴	−۰/۰۶۶۱	۰	
۰/۱۴۸۱	۱/۷۸۳۲	۰/۱۴۸۲	۱/۶۱۴۲	۰/۱۶۶۲	۱/۴۶۲۲	۲	
۰/۱۶۱۲	۰/۰۲۱۰	۰/۱۶۳۳	۰/۰۳۳۵	۰/۱۷۰۲	۰/۰۵۸۱	۰	۱
۰/۱۳۴۲	۰/۰۴۳۲	۰/۱۳۵۱	۰/۰۴۶۳	۰/۱۵۳۱	۰/۰۶۱۲	۰	
۰/۱۱۹۱	۰/۰۸۶۲	۰/۱۱۸۲	۰/۰۷۰۹	۰/۱۲۴۰	۰/۰۷۱۹	۱	
۰/۱۸۵۳	۱/۴۳۶۰	۰/۱۸۸۵	۱/۳۰۴۱	۰/۱۹۰۳	۱/۲۹۸۰	۱/۵	
۰/۱۷۳۳	−۰/۰۴۵۱	۰/۱۶۷۷	−۰/۰۵۴۴	۰/۱۸۲۶	−۰/۰۵۶۲	۰	
۰/۱۶۳۱	۱/۷۵۲۰	۰/۱۶۵۱	۱/۷۳۲۲	۱/۸۶۳۳	۱/۵۳۲۱	۲	
۰/۳۲۱۲	۲/۸۸۷۴	۰/۳۲۳۱	۲/۷۴۴۱	۰/۳۸۸۲	۲/۶۰۱۲	۲	
۰/۳۰۳۱	۱/۰۹۶۲	۰/۳۰۵۱	۱/۱۱۲۳	۰/۳۸۸۷	۱/۳۰۳۲	۱	
۰/۳۱۱۲	۰/۰۱۲۱	۰/۳۰۴۲	۰/۰۱۵۱	۰/۳۵۵۶	۰/۰۲۸۳	۰	
۰/۳۲۲۸	۰/۰۱۰۸	۰/۳۱۱۴	۰/۰۲۱۳	۰/۳۴۳۳	۰/۰۲۲۴	۰	
۰/۳۰۴۴	۱/۳۸۹۸	۰/۳۰۲۱	۱/۳۸۱۲	۰/۳۳۶۲	۱/۲۲۶۱	۱/۵	۲
۰/۳۲۵۱	−۰/۰۰۲۷	۰/۳۲۶۷	−۰/۰۰۳۱	۰/۳۷۲۶	−۰/۰۳۱۱	۰	
۰/۳۲۸۱	۰/۰۸۶۶	۰/۳۲۵۲	۰/۰۸۷۱	۰/۳۹۵۷	۰/۰۵۲۲	۱	
۰/۳۱۶۲	۲/۷۶۶۲	۰/۳۱۱۲	۲/۶۵۳۳	۰/۳۳۴۸	۲/۶۰۴۳	۳	
۰/۳۰۹۱	۰/۰۲۱۱	۰/۳۰۷۲	۰/۰۲۲۷	۰/۳۲۹۴	۰/۰۴۱۲	۰	
۰/۳۳۲۵	۰/۰۱۹۸	۰/۳۲۲۵	۰/۰۲۲۵	۰/۳۶۵۲	۰/۰۴۸۴	۰	
۰/۱۸۳۵	۱/۴۸۲۲	۰/۱۸۸۶	۱/۴۸۹۵	۰/۱۸۹۰	۱/۴۶۰۲	۱/۵	
۰/۱۱۹۵	۳/۱۰۹۳	۰/۱۱۹۱	۳/۱۱۰۴	۰/۱۳۰۴	۳/۲۳۳۹	۳	
۰/۱۳۳۱	۱/۱۱۵۲	۰/۱۰۵۲	۱/۱۱۰۷	۰/۱۶۷۲	۱/۲۱۱۲	۱	۳
۰/۱۲۲۵	−۰/۰۱۳۴	۰/۱۲۰۲	−۰/۰۱۲۸	۰/۱۴۵۴	−۰/۰۲۲۳	۰	
۰/۱۴۵۶	−۰/۰۲۱۲	۰/۱۴۴۳	−۰/۰۲۱۳	۰/۱۵۷۲	−۰/۰۴۰۱	۰	
۰/۱۲۸۵	۱/۸۷۷۰	۰/۱۲۹۱	۱/۸۹۲۱	۰/۱۴۶۳	۱/۷۸۱۱	۲	
۰/۱۴۰۵	−۰/۰۳۱۱	۰/۱۴۱۵	−۰/۰۲۹۹	۰/۱۶۲۶	−۰/۰۳۹۸	۰	
۰/۱۳۲۸	−۰/۰۱۸۱	۰/۱۳۳۲	−۰/۰۱۸۶	۰/۱۵۱۷	−۰/۰۲۵۲	۰	
۰/۱۱۵۸	۰/۸۹۲۲	۰/۱۱۶۵	۰/۸۶۰۱	۰/۱۱۸۱	۰/۷۵۴۴	۱	
۰/۱۵۰۳	۲/۷۹۰۴	۰/۱۵۴۲	۲/۷۹۹۲	۰/۱۶۸۶	۲/۶۵۱۲	۳	

هستند اما با توجه به مقدار انحراف استانداردشان از دقت کمتری برخوردارند. بنابراین براوردهای حاصل از شیوه MIXLASSO قابل اطمینان نیستند چون نسبت به دو تابع تاوان دیگر از دقت کمتری برخوردار می‌باشند.

۴,۲ بررسی عملکرد روش ارائه‌شده در ارتباط با بخش ناپارامتری

به‌منظور ارزیابی نحوه عملکرد شیوه ارائه‌شده برای براورد بخش ناپارامتری $\hat{\alpha}(u_l)$ ، جذر متوسط توان دوم خطاها[۱۹] (RASE) به‌صورت

$$RASE = \{n_{grid}^{-1} \sum_{\ell=1}^{n_{grid}} \| \hat{\alpha}(u_\ell) - \alpha(u_\ell) \|^2\}^{\frac{1}{2}} \qquad (۱۶)$$

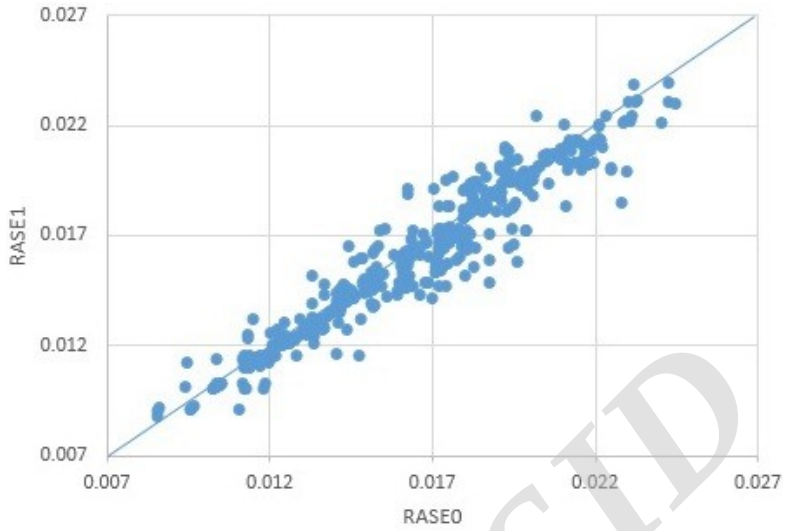
تعریف می‌شود، که در آن $\{u_\ell, \ell = 1, ..., n_{grid}\}$ نقاط شبکه‌ای هستند و تابع‌های $\{\hat{\alpha}(.)\}$ در این نقاط براورد می‌شوند. در شبیه‌سازی از تابع هسته اپانشینکف[۲۰] به‌صورت $K_{0.125}(u) = 6(1-(\frac{u_i - u}{0.125})^2_+)$ و بر مبنای $n_{grid} = 200$ استفاده می‌شود، به‌طوری‌که پهنای باند $h = 0.125$ در نظر گرفته شده است. با استفاده از شاخص RASE، می‌توان میزان دقت براورد ضرایب بسط تیلور a و b را در ارتباط با بخش ناپارامتری بررسی نمود، به‌همین منظور $RASE_0$ و $RASE_1$ محاسبه می‌شوند.

$RASE_0$: براورد $\hat{\alpha}(u_l)$ با توجه به مقدار واقعی β های اولیه انجام می‌پذیرد. در واقع بر مبنای رابطه $\mu_k = \exp(x^T\alpha_k(u) + z^T\beta_k)$ و مقدارهای اولیه تعریف‌شده β، بردار x، بردار z و بر مبنای مقدار مشخصی از نرخ میانگین مولفه kام (μ_k) مقدار تابع $\hat{\alpha}(u_\ell)$ محاسبه می‌شود. از سوی دیگر $\alpha(u_\ell)$ با توجه به $(\frac{1}{2}\exp(3u+1), 4u(1+u^2))$ برمبنای مقادیر تصادفی u از بازه $(0, 1)$ انتخاب می‌شود و به این ترتیب با توجه به (۱۶) $RASE_0$ محاسبه می‌شود.

$RASE_1$: روند محاسبات همانند $RASE_0$ است با این تفاوت که به جای $\hat{\alpha}(u_l)$ براورد آن بر مبنای ضرایب بسط تیلور a و b، حاصل از الگوریتم EM جایگذاری می‌شود. پس مقادیر $RASE_0$ و $RASE_1$ را در مقابل یکدیگر رسم می‌کنیم. این کار به منظور ارزیابی میزان دقت براورد ضرایب بسط تیلور در تابع ناپارامتری نسبت به حالتی است که تابع ناپارامتری از ابتدا معلوم فرض شده باشد.

همان‌طور که در شکل ۱ ملاحظه می‌شود، مقادیر براورد بر اساس ۲۰۰۰ مرتبه تکرار، به‌طور تقریبی بر

[۱۹] Root of Average Square Errors
[۲۰] Epanechinkov



شکل ۱. مقدار $(RASE_0)$ در مقابل $(RASE_1)$

روی خط قرار گرفته‌اند، به این معنی که در براورد ضرایب بخش ناپارامتری، عملکرد الگوریتم EM تقریبا به‌درستی زمانی بوده است که محاسبات به‌طور مستقیم با استفاده از مقادیر حقیقی معلوم β انجام می‌پذیرد، یا به‌عبارت دیگر حاکی از برابری تقریبی $(RASE_0)$ و $(RASE_1)$ است.

بحث و نتیجه‌گیری

تاکنون موضوع انتخاب متغیر در آمیزه‌ای متناهی از مدل‌های رگرسیونی (خلیلی و چن ۲۰۰۷) و در مدل‌های رگرسیونی نیم‌پارامتری (لی و لیانگ، ۲۰۰۸) و همچنین مطالعه ترکیبی این دو حالت با تکیه بر روی بخش ناپارامتری مورد بررسی قرار گرفته است. به‌طوری‌که در مدل اسکندری و اورمز (۲۰۱۵) حالت تعمیم‌یافته مدل پیوند بررسی شده است. اما مدلی مد نظر قرار گرفت که در آن داده‌ها از توزیع پواسون تبعیت می‌کنند و گاهی شرایطی پیش می‌آید که به علت وجود صفرهای بیش از حد و بیش‌پراکندگی، نتیجه براورد پارامترها خارج از انتظار است و قابل قبول نخواهند بود. در چنین شرایطی استفاده از توزیع دوجمله‌ای منفی به جای توزیع پواسون توصیه می‌شود. هدف ما بررسی درستی براوردهای حاصل از مدلی است که داده‌های آن برای تصحیح مشکل درستی براوردها از توزیع دوجمله‌ای منفی تبعیت می‌کنند.

در بررسی درستی براوردها در بخش پارامتری بر اساس ملاک GMSE ملاحظه شد که مقدار خطا در

براورد ضرایب پارامتری به دلیل استفاده از توزیع دوجمله‌ای منفی کاهش می‌یابد. علاوه براین براوردهای حاصل از تابع تاوان MIXSCAD از دقت بیشتری نسبت به دو تابع تاوان دیگر برخوردار بودند.

از سوی دیگر مقدار میانگین براورد نقاط صفر پس از چندین مرتبه اجرای الگوریتم، مقداری کوچک و نزدیک به صفر به دست آمد، بنابراین نقاط صفر به درستی براورد شده‌اند. همچنین براوردهای حاصل از تابع تاوان MIXSCAD نسبت به دو تابع تاوان دیگر از دقت بیشتر و انحراف استاندارد کمتری برخوردار است. لازم به ذکر است که تابع تاوان MIXHARD تقریبا رفتاری مشابه با MIXSCAD دارد. در بررسی عملکرد براورد ضرایب ناپارامتری به هنگام استفاده از توزیع دوجمله‌ای منفی براساس ملاک RASE ملاحظه شد که میزان دقت براورد ضرایب ناپارامتری در حضور ضرایب تاوانیده به خوبی زمانی بوده است که توابع ناپارامتری از ابتدا معلوم فرض شده بودند. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت در مواقعی که حالت بیش‌پراکندگی یا وجود صفرهای بیش از حد به هنگام استفاده از توزیع پواسون رخ می‌دهد، توزیع دوجمله‌ای منفی می‌تواند به منظور براورد صحیح پارامترها و کسب نتیجه‌ای مطلوب کارامد واقع شود.

تقدیر و تشکر

نویسندگان از مسئولان مجله علوم آماری در فراهم کردن زمینه همکاری علمی برای موضوعات جدید آماری تشکر می‌نمایند و از داوران محترم برای ارائه پیشنهادات کارامد در بهبود کیفی این مقاله کمال سپاس و قدردانی را دارند.

مراجع

Craven, P. and Wahba, G. (1979), Smoothing Noisy Data with Spline Functions: Estimating the Correct Degree of Smoothing by the Method of Generalized Cross-Validation, *Numerische Mathematika*, **31**, 377 – 403.

Eskandari, F. and Ormoz, E. (2015), Finite Mixture of Generalized Semiparametric Models: Variable Selection via Penalized Estimation, *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, **45**, 3744-3759.

Fan, J. and Li, R. (2001), Variable Selection via Penalized Likelihood and It's Oracle Properties, *Journal of American Statistical Association*, **6**, 1348-1360.

Hardle, W., Liang, H. and Gao, J. (2000), *Partially Linear Models: Contributions to Statistics*, Physica-Verlag, Heidelberg.

Hunter, D. R. and Young, D. S. (2012), Semi-Parametric Mixtures of Regressions, *Journal of Non-parametric Statistics*, **24**, 19-38.

Khalili, A. and Chen, J. (2007), Variable Selection in Finite Mixture of Regression Models, *Journal of American Statistical Association*, **102**, 1025-1038.

Lambert, D. (1992), Zero-Inflated Poisson Regression with an Application to Defects in Manufacturing, *Technometrics*, **34**, 1-14.

Li, R. and Liang, H. (2008), Variable Selection in Semi-Parametric Regression Modeling, *Annual Statistics*, **36**, 261-286.

Lim, H. K., Li, W. K. and Yu, P. L. H. (2014), Zero-Inflated Poisson Regression Mixture Model, *Computational Statistics and Data Analysis*, **71**, 151-158.

McLachlan, G. J. and Peel, D. (2000), *Finite Mixture Models*, John Wiley, New York.

Ormoz, E. and Eskandari, F. (2016), Variable Selection in Finite Mixture of Semi-Parametric Regression Models, *Communications in Statistics-Theory and Methods*, **45**, 695-711.

Ruppert, R., Wand, M. and Carroll, R. (2003), *Semi-Parametric Regression*, Cambridge University Press, Cambridge.

Tibshirani, R. (1996), Regression Shrinkage and Selection via the LASSO, *Journal of Royal Statistical Society*, **58**, 267-288.

Yatchew, A. (2003), *Semi-Parametric Regression for the Applied Econometrician*, Cambridge University Press, Cambridge.

Zou, Y., Zhang, Y. and Lord, D. (2013), Application of Finite Mixture of Negative Binomial Regression Models with Varying Weight Parameters for Vehicle Crash Data Analysis, *Accident Analysis and Prevention*, **50**, 1042-1051.