مجله علوم آماری، بهار و تابستان ۱۳۹۶
جلد ۱۱، شماره ۱، ص ۷۷-۱۰۰
DOI: 10.18869/acadpub.jss.11.1.77

کلاسی از توزیع‌های دومتغیره گومپرتز تعمیم‌یافته-سری توانی

رسول روزگار و علی اکبر جعفری

گروه آمار، دانشگاه یزد

تاریخ دریافت: ۱۳۹۵/۱۱/۱۱ تاریخ آخرین بازنگری: ۱۳۹۶/۸/۱

چکیده: در این مقاله، به معرفی خانواده توزیع‌های دومتغیره گومپرتز تعمیم‌یافته-سری توانی پرداخته می‌شود. این کلاس جدید از توزیع‌های دومتغیره شامل چندین مدل مانند توزیع دومتغیره گومپرتز تعمیم‌یافته-هندسی، پواسون، دوجمله‌ای، لگاریتمی و دوجمله‌ای منفی و توزیع دومتغیره نمایی تعمیم‌یافته است. نحوه ساختن و ویژگی‌های این کلاس از توزیع‌های دومتغیره ارائه شده و روند برآوردیابی برای پارامترهای مدل با روش‌های ماکسیمم درستنمایی و الگوریتم EM بحث می‌شود. در نهایت دو کاربرد از داده‌های واقعی برای برازش این مدل و مفید نشان دادن آن ارائه می‌شوند.

واژه‌های کلیدی: توزیع دومتغیره گومپرتز تعمیم‌یافته، الگوریتم EM، برآورد ماکسیمم درستنمایی، کلاس توزیع‌های سری توانی.

۱ مقدمه

مدل‌بندی داده‌های طول عمر یکی از جنبه‌های مهم از کارهای آماری در زمینه‌های مختلفی از علوم و تحقیقات محسوب می‌شود. در این زمینه توزیع‌های آماری یک متغیره، بسیار مورد مطالعه قرار گرفته است ولی توزیع‌های آماری دو و چند متغیره به دلیل محاسبات نسبتا پیچیده کمتر مورد توجه قرار گرفته‌اند. روش ترکیب کردن توزیع‌های پیوسته با یک توزیع گسسته در چند سال اخیر مورد توجه نویسندگان متعددی قرار گرفته است. این روش منجر به تعریف توزیع‌های جدیدی می‌شود که از انعطاف‌پذیری بالایی برخوردار بوده و از لحاظ کاربرد برازش مناسب‌تر و واقعی‌تری را روی داده‌ها ارائه می‌دهند.

آدرس الکترونیکی نویسنده مسئول مقاله: رسول روزگار، rroozegar@yazd.ac.ir

کد موضوع‌بندی ریاضی (۲۰۱۰): 65E15، 62H10، 62F10

مارشال و الکین (۱۹۹۷) کلاسی از توزیع‌ها را معرفی کردند که بوسیله کمینه یا بیشینه متغیرهای تصادفی مستقل و هم‌توزیع با اندازه نمونه تصادفی دارای توزیع هندسی ساخته می‌شود. بارتو سوزا و همکاران (۲۰۱۱) نیز با ترکیب توزیع وایبول و هندسی توزیع جدیدی را به همین نام (وایبول-هندسی) ساختند. سیلوا و همکاران (۲۰۱۳) کلاسی از توزیع‌های یک متغیره را معرفی کردند که از ترکیب کردن توزیع وایبول تعمیم‌یافته و توزیع سری توانی به‌دست می‌آید و ویژگی‌های مختلف این کلاس را مورد بررسی قرار دادند. این تلاش‌ها در ترکیب کردن توزیع‌های پیوسته با یک توزیع گسسته مهم از قبیل هندسی، پواسون، لگاریتمی و دوجمله‌ای که حالت‌های خاصی از توزیع سری توانی هستند استوار است. به عنوان مثال آدامیدیس و لوکاس (۱۹۹۸) توزیع نمایی-هندسی، کاس (۲۰۰۷) توزیع نمایی-پواسون، طهماسبی و رضایی (۲۰۰۸) توزیع نمایی-لگاریتمی، چهکندی و گنجعلی (۲۰۰۹) توزیع نمایی-سری توانی، مورایس و بارتو سوزا (۲۰۱۱) توزیع وایبول-سری توانی، محمودی و جعفری (۲۰۱۲) توزیع نمایی تعمیم‌یافته-سری توانی، محمودی و جعفری (۲۰۱۷) توزیع نرخ خطر خطی-سری توانی، طهماسبی و جعفری (۲۰۱۶) توزیع گومپرتز تعمیم‌یافته-سری توانی و روزگار و ناداراجا (۲۰۱۷) توزیع نرخ خطر درجه دو-سری توانی را تعریف کردند.

توزیع گومپرتز که تعمیمی از توزیع نمایی است اغلب برای برازش روی داده‌های علوم مختلف از جمله کامپیوتر، بازاریابی، زیست‌شناسی و بیمه مورد استفاده قرار می‌گیرد. اخیرا

الگوهری و همکاران (۲۰۱۳) به معرفی توزیع سه پارامتری گومپرتز تعمیم‌یافته (GG) و ارائه برخی ویژگی‌های مرتبط با آن پرداخته‌اند. تابع توزیع و تابع چگالی این توزیع به ترتیب به‌صورت

$$F_{\text{GG}}(x;\alpha,\lambda,\gamma) = (1-e^{-\frac{\lambda}{\gamma}(e^{\gamma x}-1)})^{\alpha}, \quad \alpha,\gamma,\lambda>0; \quad x\geq 0, \qquad (1)$$

$$f_{\text{GG}}(x;\alpha,\lambda,\gamma) = \alpha\lambda e^{\gamma x}e^{-\frac{\lambda}{\gamma}(e^{\gamma x}-1)}(1-e^{-\frac{\lambda}{\gamma}(e^{\gamma x}-1)})^{\alpha-1}. \qquad (2)$$

هستند. توزیع GG یک توزیع انعطاف‌پذیر است که می‌تواند بر روی داده‌های چوله نیز برازش داده شود. حالت‌های خاص این توزیع عبارتند از: توزیع نمایی تعمیم‌یافته گوپتا و کوندو (۱۹۹۹) وقتی $\gamma \to 0^+$، توزیع گومپرتز وقتی $\alpha = 1$ و توزیع نمایی وقتی $\alpha = 1$ و $\gamma \to 0^+$.

ال شرپیانی و همکاران (۲۰۱۳) توزیع دومتغیره گومپرتز تعمیم‌یافته (BGG) را معرفی کردند که توزیع‌های حاشیه‌ای آن، گومپرتز تعمیم‌یافته است. این توزیع دومتغیره هم دارای بخش پیوسته مطلق [1] و

[1] Absoluotely continuous

هم دارای بخش منفرد [۲] است و تابع توزیع توام این مدل به‌صورت

$$F_{\mathrm{BGG}}(x_۱, x_۲) = (۱ - e^{-\frac{\lambda}{\gamma}(e^{\gamma x_۱}-۱)})^{\alpha_۱}(۱ - e^{-\frac{\lambda}{\gamma}(e^{\gamma x_۲}-۱)})^{\alpha_۲}(۱ - e^{-\frac{\lambda}{\gamma}(e^{\gamma z}-۱)})^{\alpha_۳}$$

است، که در آن $z = \min(x_۱, x_۲)$.

در این مقاله، توزیع BGG با کلاس توزیع سری توانی (PS) ترکیب شده و یک کلاس جدید از توزیع‌های دومتغیره تحت عنوان خانواده توزیع دومتغیره گومپرتز تعمیم‌یافته-سری توانی (BGGPS) معرفی می‌شود.

روند ترکیب کردن مشابه با روش ساختن توزیع دومتغیره مارشال و الکین (۱۹۹۷) و کوندو و گوپتا (۲۰۱۴) است. این مدل دارای شش پارامتر است که از انعطاف‌پذیری بالایی برخوردار است و توزیع‌های حاشیه‌ای آن، توزیع گومپرتز تعمیم‌یافته-سری توانی معرفی شده توسط

طهماسبی و جعفری (۲۰۱۶) هستند. تابع چگالی توام این مدل دارای شکل‌های مختلفی است، بنابراین این مدل می‌تواند به‌طور موثری در تحلیل داده‌های چوله دومتغیره و داده‌های دم سنگین دومتغیره بکار رود. حالت‌های خاص این مدل، توزیع دومتغیره گومپرتز تعمیم‌یافته-هندسی (BGGG)، توزیع BGG و برخی توزیع‌های دومتغیره دیگر است. در ادامه ویژگی‌های مختلفی از این توزیع دومتغیره استخراج می‌شود و در ادامه الگوریتم EM برای به‌دست آوردن برآوردگرهای ماکسیمم درستنمایی (MLE) پارامترهای مدل ارائه می‌شود.

در بخش ۲ توزیع BGGPS را معرفی کرده و ویژگی‌های مختلف آن بررسی می‌شود. در بخش ۳ برخی حالت‌های خاص مورد بررسی قرار می‌گیرد. برآورد پارامترهای مدل در بخش ۴ انجام می‌شود. در نهایت، در بخش ۵ دو مجموعه داده واقعی تحلیل می‌شوند.

۲ مدل BGGPS

فرض کنید متغیر تصادفی گسسته N دارای توزیع سری توانی، بریده شده در صفر، با تابع جرم احتمال

$$P(N = n) = \frac{a_n\theta^n}{A(\theta)}, \qquad n = ۱, ۲, \ldots$$

[۲] Singular

جدول ۱. کمیت‌های مهم برای برخی توزیع‌های سری توانی.

کمیت	هندسی	پواسون	لگاریتمی	دوجمله‌ای	دوجمله‌ای منفی
a_n	1	$n!^{-1}$	n^{-1}	$\binom{k}{n}$	$\binom{k-1}{n-1}$
$A(\theta)$	$\theta(1-\theta)^{-1}$	$e^{\theta}-1$	$-\log(1-\theta)$	$(1+\theta)^{k}-1$	$\frac{\theta^{k}}{(1-\theta)^{k}}$
$A'(\theta)$	$(1-\theta)^{-2}$	e^{θ}	$(1-\theta)^{-1}$	$\frac{k}{(\theta+1)^{1-k}}$	$\frac{k\theta^{k-1}}{(1-\theta)^{k+1}}$
$A''(\theta)$	$2(1-\theta)^{-3}$	e^{θ}	$(1-\theta)^{-2}$	$\frac{k(k-1)}{(\theta+1)^{2-k}}$	$\frac{k(k+2\theta-1)}{\theta^{2-k}(1-\theta)^{k+2}}$
s	1	∞	1	∞	1

است، که در آن $a_n \geq 0$، $A(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\theta^n < \infty$، $\theta \in (0, s)$ و $s \in (0, \infty)$. برخی ویژگی‌های توزیع سری توانی را می‌توان در نواک (۱۹۵۰) مشاهده کرد. جدول ۱ برخی حالت‌های خاص توزیع سری توانی (بریده شده در صفر) شامل توزیع‌های هندسی، پواسون، لگاریتمی، دوجمله‌ای و دوجمله‌ای منفی را نشان می‌دهد. در اینجا منظور از $A'(\theta)$ و $A''(\theta)$ به ترتیب مشتق اول و مشتق دوم $A(\theta)$ نسبت به پارامتر θ است. تابع توزیع و تابع چگالی کلاس توزیع‌های یک متغیره گومپرتز تعمیم‌یافته-سری توانی (GGPS) طهماسبی و جعفری (۲۰۱۶) به ترتیب عبارتند از

$$F_{\mathrm{GGPS}}(x;\alpha,\lambda,\gamma,\theta) = \frac{A(\theta(1-e^{-\frac{\lambda}{\gamma}(e^{\gamma x}-1)})^{\alpha})}{A(\theta)}, \quad x \geq 0, \tag{3}$$

$$\begin{aligned} f_{\mathrm{GGPS}}(x;\alpha,\lambda,\gamma,\theta) &= \frac{\alpha\theta\lambda}{A(\theta)} e^{\gamma x} e^{-\frac{\lambda}{\gamma}(e^{\gamma x}-1)}(1-e^{-\frac{\lambda}{\gamma}(e^{\gamma x}-1)})^{\alpha-1} \\ &\times A'(\theta(1-e^{-\frac{\lambda}{\gamma}(e^{\gamma x}-1)})^{\alpha}). \end{aligned} \tag{4}$$

فرض کنید $\{(X_{1n}, X_{2n}); n = 1, 2, \ldots\}$ یک دنباله از بردارهای تصادفی مستقل و هم توزیع با تابع توزیع مشترک F_{BGG} است. در اینجا N را متغیر تصادفی سری توانی و مستقل از (X_{1i}, X_{2i}) در نظر می‌گیریم، همچنین فرض کنید $Y_i = \max\{X_{i1}, \ldots, X_{iN}\}$ برای $i = 1, 2$. در این مقاله توزیع توام $\boldsymbol{Y} = (Y_1, Y_2)$ را توزیع BGGPS نامیده و با نماد $\mathrm{BGGPS}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \lambda, \gamma, \theta)$ نشان داده می‌شود.

قضیه ۱: اگر $\boldsymbol{Y}$ دارای توزیع BGGPS باشد آنگاه تابع چگالی آن به‌صورت

$$f_{\boldsymbol{Y}}\left(y_1, y_2\right)=\begin{cases} f_1\left(y_1, y_2\right) & 0<y_1<y_2 \\ f_2\left(y_1, y_2\right) & 0<y_2<y_1 \\ f_0\left(y\right) & 0<y_1=y_2=y, \end{cases} \tag{۵}$$

است که در آن

$$\begin{aligned} f_1\left(y_1, y_2\right) &= \frac{\theta}{A\left(\theta\right)} f_{\mathrm{GG}}\left(y_1; \alpha_1+\alpha_3, \lambda, \gamma\right) f_{\mathrm{GG}}\left(y_2; \alpha_2, \lambda, \gamma\right)\left[\theta F_{\mathrm{GG}}(y_1; \alpha_1+\alpha_3, \lambda, \gamma)\right. \\ &\times F_{\mathrm{GG}}(y_2; \alpha_2, \lambda, \gamma) A''\left(\theta F_{\mathrm{GG}}(y_1; \alpha_1+\alpha_3, \lambda, \gamma) F_{\mathrm{GG}}(y_2; \alpha_2, \lambda, \gamma)\right) \\ &+ \left. A'\left(\theta F_{\mathrm{GG}}(y_1; \alpha_1+\alpha_3, \lambda, \gamma) F_{\mathrm{GG}}(y_2; \alpha_2, \lambda, \gamma)\right)\right], \qquad (۶) \\ f_2\left(y_1, y_2\right) &= \frac{\theta}{A\left(\theta\right)} f_{\mathrm{GG}}\left(y_1; \alpha_1, \lambda, \gamma\right) f_{\mathrm{GG}}\left(y_2; \alpha_2+\alpha_3, \lambda, \gamma\right)\left[\theta F_{\mathrm{GG}}(y_1; \alpha_1, \lambda, \gamma)\right. \\ &\times F_{\mathrm{GG}}(y_2; \alpha_2+\alpha_3, \lambda, \gamma) A''\left(\theta F_{\mathrm{GG}}(y_1; \alpha_1, \lambda, \gamma) F_{\mathrm{GG}}(y_2; \alpha_2+\alpha_3, \lambda, \gamma)\right) \\ &+ \left. A'\left(\theta F_{\mathrm{GG}}(y_1; \alpha_1, \lambda, \gamma) F_{\mathrm{GG}}(y_2; \alpha_2+\alpha_3, \lambda, \gamma)\right)\right], \qquad (۷) \\ f_0\left(y\right) &= \frac{\theta \alpha_3}{A\left(\theta\right)\left(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3\right)} f_{\mathrm{GG}}\left(y; \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3, \lambda, \gamma\right) \\ &\times A'\left(\theta F_{\mathrm{GG}}\left(y; \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3, \lambda, \gamma\right)\right). \qquad (۸) \end{aligned}$$

برهان: با استفاده از تابع توزیع $\boldsymbol{Y}$ داریم:

$$\begin{aligned} F_{\boldsymbol{Y}}\left(y_1, y_2\right) &= P\left(Y_1 \leq y_1, Y_2 \leq y_2\right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} P\left(Y_1 \leq y_1, Y_2 \leq y_2 | N=n\right) P\left(N=n\right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} F_{\mathrm{BGG}}^{n}\left(y_1, y_2\right) \frac{a_n \theta^n}{A(\theta)} \\ &= \frac{A(\theta F_{\mathrm{BGG}}\left(y_1, y_2; \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \lambda, \gamma\right))}{A(\theta)} \\ &= \begin{cases} \dfrac{A\left(\theta F_{\mathrm{GG}}(y_1; \alpha_1+\alpha_3, \lambda, \gamma) F_{\mathrm{GG}}(y_2; \alpha_2, \lambda, \gamma)\right)}{A\left(\theta\right)} & y_1 \leq y_2 \\ \dfrac{A\left(\theta F_{\mathrm{GG}}(y_1; \alpha_1, \lambda, \gamma) F_{\mathrm{GG}}(y_2; \alpha_2+\alpha_3, \lambda, \gamma)\right)}{A\left(\theta\right)} & y_1 > y_2. \end{cases} \end{aligned}$$

تساوی دوم در رابطه فوق با استفاده از قانون احتمال کل با شرطی کردن روی N حاصل می‌شود. تساوی سوم و چهارم به ترتیب طبق تعریف تابع توزیع و تعریف توزیع سری توانی به‌دست می‌آید. در نهایت تساوی آخر نیز با استفاده از تعریف توزیع BGG حاصل می‌شود. بنابراین، تابع چگالی $\boldsymbol{Y}$ با استفاده از دو بار مشتق‌گیری و رابطه $f_{\boldsymbol{Y}}(y_1, y_2) = \frac{\partial^2 F_{\boldsymbol{Y}}(y_1, y_2)}{\partial y_1 \partial y_2}$ حاصل می‌گردد.

گزاره ۱: اگر (Y_1, Y_2)دارای توزیع $\mathrm{BGGPS}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \lambda, \gamma, \theta)$ باشد، آنگاه

الف: متغیر تصادفی Y_i، دارای توزیع $\mathrm{GGPS}(\alpha_i + \alpha_3, \lambda, \gamma, \theta)$ است.

ب: متغیر تصادفی $V = \max(Y_1, Y_2)$ دارای توزیع $\mathrm{GGPS}(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \lambda, \gamma, \theta)$ است.

ج: اگر $A(\theta) = \theta$ آنگاه (Y_1, Y_2) دارای توزیع $\mathrm{BGG}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \lambda, \gamma)$ است.

د: $P(Y_1 < Y_2) = \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3}$.

ه: $\lim_{\theta \to 0^+} F_{Y_1, Y_2}(y_1, y_2) = (F_{\mathrm{BGG}}(y_1, y_2))^k$ که $k = \min\{n \in \mathrm{N} : a_n > 0\}$.

برهان: برای اثبات قسمت (الف) کافی است از ارتباط بین تابع توزیع حاشیه‌ای و تابع توزیع توام استفاده کنیم. برای اثبات قسمت (ب) داریم:

$$\begin{aligned}
F_V(v) &= P(V \leq v) = P(\max(Y_1, Y_2) \leq v) = P(Y_1 \leq u, Y_2 \leq u) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} P(Y_1 \leq u, Y_2 \leq v | N = n) P(N = n) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} (F_{X_1, X_2}(v, v))^n P(N = n) \\
&= \frac{A(\theta(1 - e^{-\frac{\lambda}{\gamma}(e^{\gamma x} - 1)})^{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3})}{A(\theta)},
\end{aligned}$$

که این توزیع $\mathrm{GGPS}(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \lambda, \gamma, \theta)$ است. قسمت (ج) نیز با جایگذاری $A(\theta) = \theta$ در توزیع دومتغیره BGGPS حاصل می‌شود. برای اثبات قسمت (د) نیز داریم:

$$\begin{aligned}
P(Y_1 < Y_2) &= \sum_{n=1}^{\infty} P(Y_1 < Y_2, N = n) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \theta^n}{A(\theta)} \int_0^{\infty} \int_{y_1}^{\infty} f_{1n}(y_1, y_2) dy_2 dy_1
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \theta^n}{A(\theta)} \times \frac{\alpha_1}{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3} \\
&= \frac{\alpha_1}{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}.
\end{aligned}
$$

برای قسمت (ه) با برقرار دادن $k = \min\{n \in \mathbb{N} : a_n > 0\}$ داریم

$$
\begin{aligned}
&\lim_{\theta \to 0^+} F_{Y_1,\,Y_2}(y_1,\ y_2) = \lim_{\theta \to 0^+} \frac{\sum_{n=1}^{\infty} a_n \theta^n (F_{X_1,\,X_2}(y_1,\ y_2))^n}{\sum_{n=1}^{\infty} a_n \theta^n} \\
&= \lim_{\theta \to 0^+} \frac{a_k (F_{X_1,\,X_2}(y_1,\ y_2))^k + \sum_{n=k+1}^{\infty} a_n \theta^{n-k} (F_{X_1,\,X_2}(y_1,\ y_2))^n}{a_k + \sum_{n=k+1}^{\infty} a_n \theta^{n-k}} \\
&= (F_{BGG}(y_1,\ y_2))^k.
\end{aligned}
$$

گزاره ۲: فرض کنید (Y_1, Y_2) دارای توزیع $\mathrm{BGGPS}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \lambda, \gamma, \theta)$ است و $p_n = \frac{a_n \theta^n}{A(\theta)}$. در این صورت

الف:

$$
F_{Y_1,Y_2}(y_1, y_2) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n F_{\mathrm{BGG}}(y_1, y_2; n\alpha_1, n\alpha_2, n\alpha_3, \lambda, \gamma).
$$

ب: برای تابع چگالی (Y_1, Y_2) در (۵) داریم:

$$
\begin{aligned}
f_1(y_1, y_2) &= \sum_{n=1}^{\infty} p_n f_{\mathrm{GG}}(y_1; n(\alpha_1+\alpha_3), \lambda, \gamma)\, f_{\mathrm{GG}}(y_2; n\alpha_2, \lambda, \gamma), \\
f_2(y_1, y_2) &= \sum_{n=1}^{\infty} p_n f_{\mathrm{GG}}(y_1; n\alpha_1, \lambda, \gamma)\, f_{\mathrm{GG}}(y_2; n(\alpha_2+\alpha_3), \lambda, \gamma), \\
f_0(y) &= \frac{\alpha_3}{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3} \sum_{n=1}^{\infty} p_n f_{\mathrm{GG}}(y; n(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3), \lambda, \gamma),
\end{aligned}
$$

که در آن $f_{\mathrm{GG}}(.; \alpha, \lambda, \gamma)$ تابع چگالی احتمال توزیع GG با پارامترهای $(\alpha, \lambda, \gamma)$ است.

برهان: برای اثبات قسمت (الف) کافی است از قانون احتمال کل استفاده کرده و تابع توزیع توام (Y_1, Y_2) روی متغیر تصادفی N شرطی شود. برای اثبات قسمت (ب) نیز کافی است دو مرتبه از تابع توزیع توام ارائه شده در قسمت (الف) مشتق‌گیری و از روابط (۶)، (۷) و (۸) استفاده شود.

گزاره ۳: تابع چگالی احتمال توام توزیع BGGPS را می‌توان به‌صورت

$$f_{\boldsymbol{Y}}\left(y_۱,y_۲\right)=\frac{\alpha_۱+\alpha_۲}{\alpha_۱+\alpha_۲+\alpha_۳}f_a\left(y_۱,y_۲\right)+\frac{\alpha_۳}{\alpha_۱+\alpha_۲+\alpha_۳}f_s\left(y\right),$$

نوشت که در آن

$$\begin{aligned} f_a\left(y_۱,y_۲\right) &= \frac{\alpha_۱+\alpha_۲+\alpha_۳}{\alpha_۱+\alpha_۲}\begin{cases} f_۱\left(y_۱,y_۲\right) & y_۱<y_۲ \\ f_۲\left(y_۱,y_۲\right) & y_۲<y_۱, \end{cases} \\ f_s\left(y\right) &= \frac{\theta}{A\left(\theta\right)}f_{\mathrm{GG}}\left(y;\alpha_۱+\alpha_۲+\alpha_۳,\lambda,\gamma\right) \\ &\quad \times A'\left(\theta F_{\mathrm{GG}}\left(y;\alpha_۱+\alpha_۲+\alpha_۳,\lambda,\gamma\right)\right) \qquad y_۱=y_۲=y, \end{aligned}$$

و جاهای دیگر نیز صفر است. واضح است که $f_a(\cdot,\cdot)$ بخش پیوسته مطلق و $f_s(\cdot,\cdot)$ بخش منفرد تابع چگالی توام می‌باشد. بنابراین، اگر $\alpha_۳=۰$ باشد، تابع چگالی احتمال توام مدل BGGPS قسمت منفرد ندارد و تبدیل به یک توزیع پیوسته مطلق می‌شود.

برهان: برای اثبات کافی است مشابه با نتایج کوندو و گوپتا (۲۰۱۴) با جایگذاری $f_a\left(y_۱,y_۲\right)$ و $f_s\left(y\right)$ در سمت راست تساوی فوق استفاده شود.

همان‌گونه که در ابتدای بخش ۲ بیان گردید حجم نمونه یک متغیر تصادفی گسسته N در نظر گرفته شد که دارای توزیع سری توانی است. در ادامه محاسبه $E\left(N|Y_۱=y_۱,Y_۲=y_۲\right)$ برای استفاده در بخش شبیه‌سازی به‌ویژه الگوریتم EM ارائه می‌شود.

قضیه ۲: فرض کنید $\{(X_{۱n},X_{۲n});n=۱,۲,\ldots\}$ یک دنباله از بردارهای تصادفی مستقل و هم توزیع با تابع توزیع مشترک F_{BGG} است. همچنین، فرض کنید $Y_i=\max\left\{X_{i۱},\ldots,X_{iN}\right\}$ برای $i=۱,۲$ که N متغیر تصادفی سری توانی و مستقل از $(X_{۱i},X_{۲i})$ است. در این‌صورت، امید ریاضی N به شرط $Y_۱=y_۱$ و $Y_۲=y_۲$ به‌صورت

(۹)

$$E\left(N|Y_۱=y_۱,Y_۲=y_۲\right)=\begin{cases} \frac{B_۱(y_۱,y_۲)}{k_۱(y_۱,y_۲)} & y_۱<y_۲ \\ \frac{B_۲(y_۱,y_۲)}{k_۲(y_۱,y_۲)} & y_۲>y_۱ \\ \frac{\theta A_۰(y)A''(\theta A_۰(y))+A'(\theta A_۰(y))}{k_۰(y)} & y_۱=y_۲=y, \end{cases}$$

است، که در آن

$$\begin{aligned} B_i(y_1,y_2) &= (\theta\, A_i(y_1,y_2))^2 A'''(\theta A_i(y_1,y_2)) \\ &+3\theta A_i(y_1,y_2)\, A''(\theta A_i(y_1,y_2)) + A'(\theta A_i(y_1,y_2)), \end{aligned}$$

و $A'''(\theta)$ مشتق سوم $A(\theta)$ نسبت به پارامتر θ است و

$$\begin{aligned} A_1(y_1,y_2) &= F_{\mathrm{GG}}(y_1;\alpha_1+\alpha_3,\lambda,\gamma)\, F_{\mathrm{GG}}(y_2;\alpha_2,\lambda,\gamma), \\ A_2(y_1,y_2) &= F_{\mathrm{GG}}(y_1;\alpha_1,\lambda,\gamma)\, F_{\mathrm{GG}}(y_2;\alpha_2+\alpha_3,\lambda,\gamma), \\ A_0(y) &= F_{\mathrm{GG}}(y;\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\lambda,\gamma). \end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned} k_1(y_1,y_2) &= \theta F_{\mathrm{GG}}(y_1;\alpha_1+\alpha_3,\lambda,\gamma)\, F_{\mathrm{GG}}(y_2;\alpha_2,\lambda,\gamma) \\ &\times A''(\theta F_{\mathrm{GG}}(y_1;\alpha_1+\alpha_3,\lambda,\gamma)\, F_{\mathrm{GG}}(y_2;\alpha_2,\lambda,\gamma)) \\ &+A'(\theta F_{\mathrm{GG}}(y_1;\alpha_1+\alpha_3,\lambda,\gamma)\, F_{\mathrm{GG}}(y_2;\alpha_2,\lambda,\gamma)), \\ k_2(y_1,y_2) &= \theta F_{\mathrm{GG}}(y_1;\alpha_1,\lambda,\gamma)\, F_{\mathrm{GG}}(y_2;\alpha_2+\alpha_3,\lambda,\gamma) \\ &\times A''(\theta F_{\mathrm{GG}}(y_1;\alpha_1,\lambda,\gamma)\, F_{\mathrm{GG}}(y_2;\alpha_2+\alpha_3,\lambda,\gamma)) \\ &+A'(\theta F_{\mathrm{GG}}(y_1;\alpha_1,\lambda,\gamma)\, F_{\mathrm{GG}}(y_2;\alpha_2+\alpha_3,\lambda,\gamma)), \\ k_0(y) &= A'(\theta F_{\mathrm{GG}}(y;\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\lambda,\gamma)). \end{aligned}$$

برهان: بردار تصادفی (Y_1,Y_2) به شرط $N=n$ دارای توزیع $\mathrm{BGG}(n\alpha_1,n\alpha_2,\ n\alpha_3,\lambda,\gamma)$ است. بنابراین، تابع چگالی توام (Y_1,Y_2,N) عبارتست از

$$f_{Y_1,Y_2,N}(y_1,y_2,n) = \begin{cases} \frac{a_n\theta^n}{A(\theta)} f_{1n}(y_1,y_2) & y_1<y_2 \\ \frac{a_n\theta^n}{A(\theta)} f_{2n}(y_1,y_2) & y_2<y_1 \\ \frac{a_n\theta^n}{A(\theta)} f_{0n}(y) & y_1=y_2=y, \end{cases}$$

که در آن

$$\begin{aligned} f_{1n}(y_1,y_2) &= n^2\lambda^2 e^{\gamma y_1+\gamma y_2}(\alpha_1+\alpha_3)\alpha_2 e^{-\frac{\lambda}{\gamma}(e^{\gamma y_1}+e^{\gamma y_2}-2)} \\ &\times(1-e^{-\frac{\lambda}{\gamma}(e^{\gamma y_1}-1)})^{n(\alpha_1+\alpha_3)-1}(1-e^{-\frac{\lambda}{\gamma}(e^{\gamma y_2}-1)})^{n\alpha_2-1}, \quad (10) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_{2n}(y_1,y_2) &= n^2\lambda^2 e^{\gamma y_1+\gamma y_2}(\alpha_2+\alpha_3)\alpha_1 e^{-\frac{\lambda}{\gamma}(e^{\gamma y_1}+e^{\gamma y_2}-2)} \\ &\times(1-e^{-\frac{\lambda}{\gamma}(e^{\gamma y_1}-1)})^{n\alpha_1-1}(1-e^{-\frac{\lambda}{\gamma}(e^{\gamma y_2}-1)})^{n(\alpha_2+\alpha_3)-1}, \quad (11) \\ f_{0n}(y) &= n\lambda e^{\gamma y}\alpha_3 e^{-\frac{\lambda}{\gamma}(e^{\gamma y}-1)}(1-e^{-\frac{\lambda}{\gamma}(e^{\gamma y}-1)})^{n(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)-1}. \quad (12) \end{aligned}$$

تابع جرم احتمال شرطی N به شرط $Y_1=y_1$ و $Y_2=y_2$ نیز برابر است با

$$f_{N|Y_1,Y_2}(n|y_1,y_2)=\begin{cases} \frac{n^2a_n(\theta A_1(y_1,y_2))^{n-1}}{k_1(y_1,y_2)} & y_1<y_2 \\ \frac{n^2a_n(\theta A_2(y_1,y_2))^{n-1}}{k_2(y_1,y_2)} & y_2<y_1 \\ \frac{na_n(\theta A_0(y))^{n-1}}{k_0(y)} & y_1=y_2=y, \end{cases}$$

با استفاده از تعریف امید ریاضی N به شرط $Y_1=y_1$ و $Y_2=y_2$ و سپس استفاده از عبارت‌های

$$\theta^2A'''(\theta)+3\theta A''(\theta)+A'(\theta)=\sum_{n=1}^{\infty}n^3a_n\theta^{n-1},$$
$$\theta A''(\theta)+A'(\theta)=\sum_{n=1}^{\infty}n^2a_n\theta^{n-1}, \qquad A'(\theta)=\sum_{n=1}^{\infty}na_n\theta^{n-1},$$

و در نهایت با استفاده از تعریف $B_1(y_1,y_2)$ و $B_2(y_1,y_2)$ داریم:

$$\begin{aligned} E(N|Y_1=y_1,Y_2=y_2) &= \sum_{n=1}^{\infty}nf_{N|Y_1,Y_2}(n|y_1,y_2) \\ &= \begin{cases} \frac{\sum_{n=1}^{\infty}n^3a_n(\theta A_1(y_1,y_2))^{n-1}}{k_1(y_1,y_2)} & y_1<y_2 \\ \frac{\sum_{n=1}^{\infty}n^3a_n(\theta A_2(y_1,y_2))^{n-1}}{k_2(y_1,y_2)} & y_2>y_1 \\ \frac{\sum_{n=1}^{\infty}n^2a_n(\theta A_0(y))^{n-1}}{k_0(y)} & y_1=y_2=y, \end{cases} \end{aligned}$$

بنابراین داریم:

$$E\left(N|Y_1=y_1,Y_2=y_2\right)=\begin{cases}\frac{B_1(y_1,y_2)}{k_1(y_1,y_2)} & y_1<y_2\\ \frac{B_2(y_1,y_2)}{k_2(y_1,y_2)} & y_2>y_1\\ \frac{\theta A_0(y)A''(\theta A_0(y))+A'(\theta A_0(y))}{k_0(y)} & y_1=y_2=y.\end{cases}$$

و اثبات کامل می‌شود.

۳ حالت‌های خاص توزیع BGGPS

در این بخش با توجه به جدول ۱، چند حالت خاص توزیع BGGPS در نظر گرفته می‌شود و به ازای $i=1,2$ فرض می‌شود $t_i=1-e^{-\frac{\lambda}{\gamma}(e^{\gamma y_i}-1)}$.

۳٫۱ توزیع دومتغیره گومپرتز تعمیم یافته دوجمله‌ای

توزیع دوجمله‌ای (بریده شده در صفر) حالت خاصی از توزیع سری توانی با قرار دادن $a_n=\binom{k}{n}$ و $A(\theta)=(\theta+1)^k-1$ برای $\theta>0$ است به‌طوری‌که k تعداد تکرارهای آزمایش است. بنابراین تابع توزیع دومتغیره مدل گومپرتز تعمیم‌یافته دوجمله‌ای (BGGB) عبارتست از

$$F_Y\left(y_1,y_2\right)=\begin{cases}\frac{\left\{\theta t_1^{\alpha_1+\alpha_3}t_2^{\alpha_2}+1\right\}^{k}-1}{(\theta+1)^k-1} & y_1\le y_2\\ \frac{\left\{\theta t_1^{\alpha_1}t_2^{\alpha_2+\alpha_3}+1\right\}^{k}-1}{(\theta+1)^k-1} & y_1>y_2,\end{cases}$$

و تابع چگالی توام آن به‌صورت (۵) است، که در آن

$$\begin{aligned}f_1\left(y_1,y_2\right) &= \frac{k\theta}{(\theta+1)^k-1}f_{\mathrm{GG}}\left(y_1;\alpha_1+\alpha_3,\lambda,\gamma\right)f_{\mathrm{GG}}\left(y_2;\alpha_2,\lambda,\gamma\right)\\ &\times \left[\theta F_{\mathrm{GG}}\left(y_1;\alpha_1+\alpha_3,\lambda,\gamma\right)F_{\mathrm{GG}}\left(y_2;\alpha_2,\lambda,\gamma\right)+1\right]^{k-2}\\ &\times \left[k\theta F_{\mathrm{GG}}\left(y_1;\alpha_1+\alpha_3,\lambda,\gamma\right)F_{\mathrm{GG}}\left(y_2;\alpha_2,\lambda,\gamma\right)+1\right],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_{۲}(y_{۱},y_{۲}) &= \frac{k\theta}{(\theta+۱)^{k}-۱} f_{\mathrm{GG}}\left(y_{۱};\alpha_{۱},\lambda,\gamma\right) f_{\mathrm{GG}}\left(y_{۲};\alpha_{۲}+\alpha_{۳},\lambda,\gamma\right) \\
&\times \left[\theta F_{\mathrm{GG}}\left(y_{۱};\alpha_{۱},\lambda,\gamma\right) F_{\mathrm{GG}}\left(y_{۲};\alpha_{۲}+\alpha_{۳},\lambda,\gamma\right)+۱\right]^{k-۲} \\
&\times \left[k\theta F_{\mathrm{GG}}\left(y_{۱};\alpha_{۱},\lambda,\gamma\right) F_{\mathrm{GG}}\left(y_{۲};\alpha_{۲}+\alpha_{۳},\lambda,\gamma\right)+۱\right], \\
f_{۰}(y) &= \frac{k\theta\alpha_{۳}\, f_{\mathrm{GG}}\left(y;\alpha_{۱}+\alpha_{۲}+\alpha_{۳},\lambda,\gamma\right)}{\left[(\theta+۱)^{k}-۱\right]\left(\alpha_{۱}+\alpha_{۲}+\alpha_{۳}\right)} \\
&\times\left[\theta F_{\mathrm{GG}}\left(y;\alpha_{۱}+\alpha_{۲}+\alpha_{۳},\lambda,\gamma\right)+۱\right]^{k-۱}.
\end{aligned}$$

۳,۲ توزیع دومتغیره گومپرتز تعمیم‌یافته-هندسی

توزیع هندسی (بریده شده در صفر) حالت خاصی از توزیع سری توانی است با قرار دادن $a_n = ۱$ و $A(\theta)=\frac{\theta}{۱-\theta}$ برای $۰ < \theta < ۱$. بنابراین، تابع توزیع توام توزیع دومتغیره گومپرتز تعمیم‌یافته هندسی (BGGG) عبارتست از

$$F_{\boldsymbol{Y}}\left(y_{۱},y_{۲}\right)=\begin{cases}\frac{(۱-\theta)t_{۱}^{\alpha_{۱}+\alpha_{۳}}t_{۲}^{\alpha_{۲}}}{۱-\theta t_{۱}^{\alpha_{۱}+\alpha_{۳}}t_{۲}^{\alpha_{۲}}} & y_{۱}\le y_{۲}\\ \frac{(۱-\theta)t_{۱}^{\alpha_{۱}}t_{۲}^{\alpha_{۲}+\alpha_{۳}}}{۱-\theta t_{۱}^{\alpha_{۱}}t_{۲}^{\alpha_{۲}+\alpha_{۳}}} & y_{۱}>y_{۲},\end{cases}$$

و تابع چگالی توام آن به‌صورت (۵) است، که در آن

$$\begin{aligned}
f_{۱}\left(y_{۱},y_{۲}\right) &= (۱-\theta) f_{\mathrm{GG}}\left(y_{۱};\alpha_{۱}+\alpha_{۳},\lambda,\gamma\right) f_{\mathrm{GG}}\left(y_{۲};\alpha_{۲},\lambda,\gamma\right) \\
&\times \frac{۱+\theta F_{\mathrm{GG}}\left(y_{۱};\alpha_{۱}+\alpha_{۳},\lambda,\gamma\right) F_{\mathrm{GG}}\left(y_{۲};\alpha_{۲},\lambda,\gamma\right)}{\left(۱-\theta F_{\mathrm{GG}}\left(y_{۱};\alpha_{۱}+\alpha_{۳},\lambda,\gamma\right) F_{\mathrm{GG}}\left(y_{۲};\alpha_{۲},\lambda,\gamma\right)\right)^{۳}}, \\
f_{۲}\left(y_{۱},y_{۲}\right) &= (۱-\theta) f_{\mathrm{GG}}\left(y_{۱};\alpha_{۱},\lambda,\gamma\right) f_{\mathrm{GG}}\left(y_{۲};\alpha_{۲}+\alpha_{۳},\lambda,\gamma\right) \\
&\times \frac{۱+\theta F_{\mathrm{GG}}\left(y_{۱};\alpha_{۱},\lambda,\gamma\right) F_{\mathrm{GG}}\left(y_{۲};\alpha_{۲}+\alpha_{۳},\lambda,\gamma\right)}{\left(۱-\theta F_{\mathrm{GG}}\left(y_{۱};\alpha_{۱},\lambda,\gamma\right) F_{\mathrm{GG}}\left(y_{۲};\alpha_{۲}+\alpha_{۳},\lambda,\gamma\right)\right)^{۳}}, \\
f_{۰}(y) &= \frac{(۱-\theta)\alpha_{۳} f_{\mathrm{GG}}\left(y;\alpha_{۱}+\alpha_{۲}+\alpha_{۳},\lambda,\gamma\right)}{\left(\alpha_{۱}+\alpha_{۲}+\alpha_{۳}\right)\left(۱-\theta F_{\mathrm{GG}}\left(y;\alpha_{۱}+\alpha_{۲}+\alpha_{۳},\lambda,\gamma\right)\right)^{۲}}.
\end{aligned}$$

تذکر ۱: هنگامی‌که $\theta^{*} = ۱ - \theta$ توزیع BGGG به توزیع دومتغیره مارشال و الکین (۱۹۹۷) تبدیل می‌شود.

۳٫۳ توزیع دومتغیره گومپرتز تعمیم‌یافته-پواسون

توزیع پواسون بریده شده در صفر حالت خاصی از توزیع سری توانی با قرار دادن $a_n = \frac{1}{n!}$ و $A(\theta) = e^{\theta} - 1$ برای $\theta > 0$ است. بنابراین، تابع توزیع دو متغیره مدل گومپرتز تعمیم‌یافته پواسون (BGGP) عبارتست از

$$F_{\boldsymbol{Y}}(y_1, y_2) = \begin{cases} \frac{\exp\left(\theta t_1^{\alpha_1+\alpha_3} t_2^{\alpha_2}\right)-1}{\exp(\theta)-1} & y_1 \le y_2 \\ \frac{\exp\left(\theta t_1^{\alpha_1} t_2^{\alpha_2+\alpha_3}\right)-1}{\exp(\theta)\ -1} & y_1 > y_2, \end{cases}$$

و تابع چگالی توام آن به‌صورت (۵) است، که در آن

$$\begin{aligned} f_1(y_1, y_2) &= \theta f_{\mathrm{GG}}(y_1; \alpha_1+\alpha_3, \lambda, \gamma) f_{\mathrm{GG}}(y_2; \alpha_2, \lambda, \gamma) \\ &\times\ e^{\theta F_{\mathrm{GG}}(y_1;\alpha_1+\alpha_3,\lambda,\gamma) F_{\mathrm{GG}}(y_2;\alpha_2,\lambda,\gamma)} \\ &\times\ \left[\theta F_{\mathrm{GG}}(y_1; \alpha_1+\alpha_3, \lambda, \gamma) F_{\mathrm{GG}}(y_2; \alpha_2, \lambda, \gamma) + 1\right], \\ f_2(y_1, y_2) &= \theta f_{\mathrm{GG}}(y_1; \alpha_1, \lambda, \gamma) f_{\mathrm{GG}}(y_2; \alpha_2+\alpha_3, \lambda, \gamma) \\ &\times\ e^{\theta F_{\mathrm{GG}}(y_1;\alpha_1,\lambda,\gamma) F_{\mathrm{GG}}(y_2;\alpha_2+\alpha_3,\lambda,\gamma)} \\ &\times\ \left[\theta F_{\mathrm{GG}}(y_1; \alpha_1, \lambda, \gamma) F_{\mathrm{GG}}(y_2; \alpha_2+\alpha_3, \lambda, \gamma) + 1\right], \\ f_0(y) &= \frac{\theta \alpha_3}{(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)} f_{\mathrm{GG}}(y; \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3, \lambda, \gamma) \\ &\times\ e^{\theta F_{\mathrm{GG}}(y;\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\lambda,\gamma)}. \end{aligned}$$

۳٫۴ توزیع دومتغیره گومپرتز تعمیم‌یافته-لگاریتمی

توزیع لگاریتمی (بریده شده در صفر) حالت خاصی از توزیع سری توانی با قرار دادن $a_n = \frac{1}{n}$ و $A(\theta) = -\log(1-\theta)$ برای $0 < \theta < 1$ است. بنابراین تابع توزیع دو متغیره مدل گومپرتز تعمیم یافته لگاریتمی (BGGL) عبارتست از

$$F_{\boldsymbol{Y}}(y_1, y_2) = \begin{cases} \frac{\log\left(1-\theta t_1^{\alpha_1+\alpha_3} t_2^{\alpha_2}\right)}{\log(1-\theta)} & y_1 \le y_2 \\ \frac{\log\left(1-\theta t_1^{\alpha_1} t_2^{\alpha_2+\alpha_3}\right)}{\log(1-\theta)} & y_1 > y_2, \end{cases}$$

و تابع چگالی توام آن به‌صورت (۵) است، که در آن

$$
\begin{aligned}
f_{۱}(y_{۱},y_{۲}) &= \frac{-\theta f_{\mathrm{GG}}(y_{۱};\alpha_{۱}+\alpha_{۳},\lambda,\gamma)\,f_{\mathrm{GG}}(y_{۲};\alpha_{۲},\lambda,\gamma)}{\log(۱-\theta)\,(۱-\theta F_{\mathrm{GG}}(y_{۱};\alpha_{۱}+\alpha_{۳},\lambda,\gamma)\,F_{\mathrm{GG}}(y_{۲};\alpha_{۲},\lambda,\gamma))^{۲}},\\
f_{۲}(y_{۱},y_{۲}) &= \frac{-\theta f_{\mathrm{GG}}(y_{۱};\alpha_{۱},\lambda,\gamma)\,f_{\mathrm{GG}}(y_{۲};\alpha_{۲}+\alpha_{۳},\lambda,\gamma)}{\log(۱-\theta)\,(۱-\theta F_{\mathrm{GG}}(y_{۱};\alpha_{۱},\lambda,\gamma)\,F_{\mathrm{GG}}(y_{۲};\alpha_{۲}+\alpha_{۳},\lambda,\gamma))^{۲}},\\
f_{\circ}(y) &= \frac{-\theta\alpha_{۳} f_{\mathrm{GG}}(y;\alpha_{۱}+\alpha_{۲}+\alpha_{۳},\lambda,\gamma)}{\log(۱-\theta)\,(\alpha_{۱}+\alpha_{۲}+\alpha_{۳})\,(۱-\theta F_{\mathrm{GG}}(y;\alpha_{۱}+\alpha_{۲}+\alpha_{۳},\lambda,\gamma))}.
\end{aligned}
$$

۳,۵ توزیع دومتغیره گومپرتز تعمیم‌یافته-دوجمله‌ای منفی

توزیع دوجمله‌ای منفی (بریده شده در صفر) حالت خاصی از توزیع سری توانی با قرار دادن $a_n = \binom{n-۱}{k-۱}$ و $A(\theta) = (\frac{\theta}{۱-\theta})^k$ برای $\circ < \theta < ۱$ است. بنابراین تابع توزیع دو متغیره مدل گومپرتز تعمیم یافته دوجمله‌ای منفی (BGGNB) عبارتست از

$$
F_{\boldsymbol{Y}}(y_{۱},y_{۲}) = \begin{cases} \frac{(۱-\theta)^k t_{۱}^{k(\alpha_{۱}+\alpha_{۳})} t_{۲}^{k\alpha_{۲}}}{\left(۱-\theta t_{۱}^{\alpha_{۱}+\alpha_{۳}} t_{۲}^{\alpha_{۲}}\right)^k} & y_{۱} \le y_{۲} \\ \frac{(۱-\theta)^k t_{۱}^{k\alpha_{۱}} t_{۲}^{k(\alpha_{۲}+\alpha_{۳})}}{\left(۱-\theta t_{۱}^{\alpha_{۱}} t_{۲}^{\alpha_{۲}+\alpha_{۳}}\right)^k} & y_{۱} > y_{۲}, \end{cases}
$$

و تابع چگالی توام آن به‌صورت (۵) است، که در آن

$$
\begin{aligned}
f_{۱}(y_{۱},y_{۲}) &= \frac{k(۱-\theta)^k f_{\mathrm{GG}}(y_{۱};\alpha_{۱}+\alpha_{۳},\lambda,\gamma)\,f_{\mathrm{GG}}(y_{۲};\alpha_{۲},\lambda,\gamma)}{(۱-\theta F_{\mathrm{GG}}(y_{۱};\alpha_{۱}+\alpha_{۳},\lambda,\gamma)\,F_{\mathrm{GG}}(y_{۲};\alpha_{۲},\lambda,\gamma))^{k+۲}}\\
&\times (F_{\mathrm{GG}}(y_{۱};\alpha_{۱}+\alpha_{۳},\lambda,\gamma)\,F_{\mathrm{GG}}(y_{۲};\alpha_{۲},\lambda,\gamma))^{k-۱}\\
&\times [k+\theta F_{\mathrm{GG}}(y_{۱};\alpha_{۱}+\alpha_{۳},\lambda,\gamma)\,F_{\mathrm{GG}}(y_{۲};\alpha_{۲},\lambda,\gamma)],\\
f_{۲}(y_{۱},y_{۲}) &= \frac{k(۱-\theta)^k f_{\mathrm{GG}}(y_{۱};\alpha_{۱},\lambda,\gamma)\,f_{\mathrm{GG}}(y_{۲};\alpha_{۲}+\alpha_{۳},\lambda,\gamma)}{(۱-\theta F_{\mathrm{GG}}(y_{۱};\alpha_{۱},\lambda,\gamma)\,F_{\mathrm{GG}}(y_{۲};\alpha_{۲}+\alpha_{۳},\lambda,\gamma))^{k+۲}}\\
&\times (F_{\mathrm{GG}}(y_{۱};\alpha_{۱},\lambda,\gamma)\,F_{\mathrm{GG}}(y_{۲};\alpha_{۲}+\alpha_{۳},\lambda,\gamma))^{k-۱}\\
&\times [k+\theta F_{\mathrm{GG}}(y_{۱};\alpha_{۱},\lambda,\gamma)\,F_{\mathrm{GG}}(y_{۲};\alpha_{۲}+\alpha_{۳},\lambda,\gamma)],\\
f_{\circ}(y) &= \frac{k\alpha_{۳}(۱-\theta)^k f_{\mathrm{GG}}(y;\alpha_{۱}+\alpha_{۲}+\alpha_{۳},\lambda,\gamma)}{(\alpha_{۱}+\alpha_{۲}+\alpha_{۳})(۱-\theta F_{\mathrm{GG}}(y;\alpha_{۱}+\alpha_{۲}+\alpha_{۳},\lambda,\gamma))^{k+۱}}\\
&\times (F_{\mathrm{GG}}(y;\alpha_{۱}+\alpha_{۲}+\alpha_{۳},\lambda,\gamma))^{k-۱}.
\end{aligned}
$$

۴ برآورد پارامترهای توزیع BGGPS

ابتدا به برآورد پارامترها با روش ماکسیمم درستنمایی پرداخته می‌شود کوندو و گوپتا (۲۰۱۴). فرض کنید $(y_{11}, y_{12}), \ldots, (y_{m1}, y_{m2})$ یک نمونه مشاهده شده به اندازه m از توزیع BGGPS با پارامترهای $\boldsymbol{\Theta} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \lambda, \gamma, \theta)^T$ است. همچنین، فرض کنید

$$\begin{aligned} I_0 &= \{i : y_{1i} = y_{2i} = y_i\}, \qquad m_0 = |I_0| \\ I_1 &= \{i : y_{1i} < y_{2i}\}, \qquad m_1 = |I_1|, \\ I_2 &= \{i : y_{1i} > y_{2i}\}, \qquad m_2 = |I_2| \\ & \qquad\qquad m = m_0 + m_1 + m_2. \end{aligned}$$

بنابراین، تابع درستنمایی را می‌توان به‌صورت

$$L(\boldsymbol{\Theta}) = \prod_{i \in I_0} f_0(y_i) \prod_{i \in I_1} f_1(y_{1i}, y_{2i}) \prod_{i \in I_2} f_2(y_{1i}, y_{2i}),$$

نوشت و تابع لگاریتم درستنمایی نیز به‌صورت

$$\ell(\boldsymbol{\Theta}) = \sum_{i \in I_0} \log(f_0(y_i)) + \sum_{i \in I_1} \log(f_1(y_{1i}, y_{2i})) + \sum_{i \in I_2} \log(f_2(y_{1i}, y_{2i})),$$

حاصل می‌شود، که در آن f_1، f_2 و f_0 به ترتیب در (۶)، (۷) و (۸) ارائه شده‌اند. نمی‌توان عبارت صریحی برای برآوردگرهای ماکسیمم درستنمایی به‌دست آورد و نیازمند حل شش معادله غیرخطی به‌طورهمزمان است. با استفاده از برخی از دستورها مانند دستور nlminb در نرم‌افزار R می‌توان برآوردگرهای ماکسیمم درستنمایی را به روش عددی به‌دست آورد که نیازمند مقادیر اولیه است که نتایج به این مقادیر حساس هستند. بنابراین، در ادامه یک الگوریتم امید-ماکسیمم‌سازی[۳] (EM) برای یافتن برآوردگرهای ماکسیمم درستنمایی پارامترها ارائه می‌شود. این روش توسط بسیاری از نویسندگان از جمله کوندو و گوپتا (۲۰۱۴) نیز استفاده شده است.

برای n داده‌شده، فرض کنید که متغیرهای تصادفی مستقل $\{Z_i | N = n\}$، $i = 1, 2, 3$ دارای

[۳] Expectation–Maximization

توزیع GG با پارامترهای $(n\alpha_i, \lambda, \gamma)$ هستند. بدیهی است که

$$\{Y_1 \mid N=n\} = \max(Z_1, Z_3) \ |N=n, \quad \{Y_2 \mid N=n\} = \max(Z_2, Z_3) \mid N=n.$$

برای بردار تصادفی دومتغیره، می‌توان یک بردار تصادفی وابسته به‌صورت

$$\Lambda_1 = \begin{cases} 0 & \text{if} \quad Y_1 = Z_1 \\ 1 & \text{if} \quad Y_1 = Z_3 \end{cases} \qquad \Lambda_2 = \begin{cases} 0 & \text{if} \quad Y_2 = Z_2 \\ 1 & \text{if} \quad Y_2 = Z_3. \end{cases}$$

در نظر گرفت. توجه شود که اگر $Y_1 = Y_2$ آنگاه $\Lambda_1 = \Lambda_2 = 0$. ولی اگر $Y_1 < Y_2$ یا $Y_1 > Y_2$ آنگاه (Λ_1, Λ_2) قابل تشخیص نیست. تمام ترتیب‌های ممکنه Z_iها، مقادیر (Y_1, Y_2) و (Λ_1, Λ_2) و احتمال‌های متناظر آنها در جدول ۲ آورده شده‌اند.

جدول ۲. تمام ترتیب‌های ممکنه Z_iها، مقادیر (Y_1, Y_2) و (Λ_1, Λ_2) و احتمال‌های متناظر آنها.

حالت	ترتیب‌های ممکنه	Y_1	Y_2	Λ_1	Λ_2	احتمال	مجموعه
۱	$Z_1 < Z_2 < Z_3$	Z_3	Z_3	۱	۱	$\frac{\alpha_2\alpha_3}{(\alpha_1+\alpha_2)(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)}$	I_0
۲	$Z_2 < Z_1 < Z_3$	Z_3	Z_3	۱	۱	$\frac{\alpha_1\alpha_3}{(\alpha_1+\alpha_2)(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)}$	I_0
۳	$Z_1 < Z_3 < Z_2$	Z_3	Z_2	۱	۰	$\frac{\alpha_2\alpha_3}{(\alpha_1+\alpha_3)(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)}$	I_1
۴	$Z_3 < Z_1 < Z_2$	Z_1	Z_2	۰	۰	$\frac{\alpha_1\alpha_2}{(\alpha_1+\alpha_3)(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)}$	I_1
۵	$Z_2 < Z_3 < Z_1$	Z_1	Z_3	۰	۱	$\frac{\alpha_1\alpha_3}{(\alpha_2+\alpha_3)(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)}$	I_2
۶	$Z_3 < Z_2 < Z_1$	Z_1	Z_2	۰	۰	$\frac{\alpha_1\alpha_2}{(\alpha_2+\alpha_3)(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)}$	I_2

ابتدا، تابع شبه لگاریتم درستنمایی شرطی با شرطی کردن روی N تشکیل داده می‌شود، سپس N با $E(N|Y_1, Y_2)$ جایگذاری می‌گردد. برای ایجاد مرحله E الگوریتم EM بدین صورت عمل می‌شود: هنگامی که مشاهدات در مجموعه I_0 قرار داشته باشند کل مشاهدات استفاده می‌شوند. هنگامی که مشاهدات در مجموعه I_1 قرار داشته باشند تابع شبه لگاریتم درستنمایی با تقسیم کردن (y_1, y_2) به دو شبه مشاهده به‌صورت $(y_1, y_2, u_1(\Theta))$ و $(y_1, y_2, u_2(\Theta))$ ایجاد می‌شود به‌طوری‌که $u_1(\Theta)$ و $u_2(\Theta)$

احتمال‌های شرطی هستند، که در آن (Λ_1, Λ_2) به ترتیب مقادیر $(1, 0)$ و $(1, 1)$ اختیار می‌کند. بنابراین

$$u_1(\mathbf{\Theta}) = \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_3}, \qquad u_2(\mathbf{\Theta}) = \frac{\alpha_3}{\alpha_1 + \alpha_3}.$$

به‌طور مشابه، هنگامی که مشاهدات در مجموعه I_2 قرار داشته باشند تابع شبه لگاریتم درستنمایی با تقسیم کردن (y_1, y_2) به دو شبه مشاهده به‌صورت $(y_1, y_2, v_1(\mathbf{\Theta}))$ و $(y_1, y_2, v_2(\mathbf{\Theta}))$ ایجاد می‌شود، به‌طوری که $v_1(\mathbf{\Theta})$ و $v_2(\mathbf{\Theta})$ احتمال‌های شرطی هستند، که در آن (Λ_1, Λ_2) به ترتیب مقادیر $(0, 1)$ و $(1, 1)$ را اختیار می‌کند. بنابراین

$$v_1(\mathbf{\Theta}) = \frac{\alpha_2}{\alpha_2 + \alpha_3}, \qquad v_2(\mathbf{\Theta}) = \frac{\alpha_3}{\alpha_2 + \alpha_3}.$$

در ادامه $u_1(\mathbf{\Theta})$، $u_2(\mathbf{\Theta})$، $v_1(\mathbf{\Theta})$ و $v_2(\mathbf{\Theta})$ به اختصار با u_1، u_2، v_1 و v_2 نشان داده می‌شوند.

مرحله E: فرض کنید $b_i = E(N|y_{1i}, y_{2i}, \mathbf{\Theta})$. تابع لگاریتم شبه درستنمایی بدون درنظرگرفتن مقدار ثابت را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned}
\ell_{\text{pseudo}}(\mathbf{\Theta}) \;=\;& \log(\theta) \sum_{i=1}^{m} b_i - m\log(C(\theta)) + (2m - m_0)\log(\lambda) \\
&+ (m_1 u_1 + m_2)\log(\alpha_1) + (m_1 + m_2 v_1)\log(\alpha_2) \\
&+ (m_0 + m_1 u_2 + m_2 v_2)\log(\alpha_3) + \gamma \sum_{i \in I_1 \cup I_2} (y_{1i} + y_{2i}) \\
&+ \gamma \sum_{i \in I_0} y_i - \frac{\lambda}{\gamma} \sum_{i \in I_0} (e^{\gamma y_i} - 1) - \frac{\lambda}{\gamma} \sum_{i \in I_1 \cup I_2} (e^{\gamma y_{1i}} + e^{\gamma y_{2i}} - 2) \\
&+ \alpha_1 \Big(\sum_{i \in I_0} b_i \log(1 - e^{-\frac{\lambda}{\gamma}(e^{\gamma y_i} - 1)}) + \sum_{i \in I_1 \cup I_2} b_i \log(1 - e^{-\frac{\lambda}{\gamma}(e^{\gamma y_{1i}} - 1)}) \Big) \\
&+ \alpha_2 \Big(\sum_{i \in I_0} b_i \log(1 - e^{-\frac{\lambda}{\gamma}(e^{\gamma y_i} - 1)}) + \sum_{i \in I_1 \cup I_2} b_i \log(1 - e^{-\frac{\lambda}{\gamma}(e^{\gamma y_{2i}} - 1)}) \Big) \\
&+ \alpha_3 \Big(\sum_{i \in I_0} b_i \log(1 - e^{-\frac{\lambda}{\gamma}(e^{\gamma y_i} - 1)}) + \sum_{i \in I_1} b_i \log(1 - e^{-\frac{\lambda}{\gamma}(e^{\gamma y_{1i}} - 1)}) \\
&+ \sum_{i \in I_2} b_i \log(1 - e^{-\frac{\lambda}{\gamma}(e^{\gamma y_{2i}} - 1)}) \Big) - \sum_{i \in I_0} \log(1 - e^{-\frac{\lambda}{\gamma}(e^{\gamma y_i} - 1)}) \\
&- \sum_{i \in I_1 \cup I_2} \log(1 - e^{-\frac{\lambda}{\gamma}(e^{\gamma y_{1i}} - 1)}) - \sum_{i \in I_1 \cup I_2} b_i \log(1 - e^{-\frac{\lambda}{\gamma}(e^{\gamma y_{2i}} - 1)}) .
\end{aligned}$$

مرحله M: در این مرحله، $\ell_{\text{pseudo}}(\mathbf{\Theta})$ نسبت به پارامترها ماکسیمم می‌شود. برای مقدار ثابت λ و γ، ماکسیمم نسبت به $\alpha_۱$، $\alpha_۲$ و $\alpha_۳$ به‌صورت

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}_۱(\lambda,\gamma) &= \frac{m_۱u_۱+m_۲}{\sum_{i\in I_۰} b_iQ_i+\sum_{i\in I_۱\cup I_۲} b_iQ_i}, \\ \hat{\alpha}_۲(\lambda,\gamma) &= \frac{m_۱+m_۲v_۱}{\sum_{i\in I_۰} b_iQ_i+\sum_{i\in I_۱\cup I_۲} b_iQ_i}, \\ \widehat{\alpha}_۳(\lambda,\gamma) &= \frac{m_۰+m_۱u_۲+m_۲v_۲}{\sum_{i\in I_۰} b_iQ_i+\sum_{i\in I_۱} b_iQ_i+\sum_{i\in I_۲} b_iQ_i}, \end{aligned} \tag{۱۳}$$

است، که در آن $Q_i=\log(۱-e^{-\frac{\lambda}{\gamma}(e^{\gamma y_i}-۱)})$. ماکسیمم $\ell_{\text{pseudo}}(\mathbf{\Theta})$ نسبت به θ، با حل معادله غیرخطی

$$\frac{\theta C'(\theta)}{C(\theta)}=\frac{۱}{m}\sum_{i=۱}^{m} b_i. \tag{۱۴}$$

نسبت به θ به‌دست می‌آید. سرانجام، ماکسیمم $\ell_{\text{pseudo}}(\mathbf{\Theta})$ نسبت به λ و γ، با ماکسیمم کردن تابع شبه لگاریتم درستنمایی $\ell_{\text{pseudo}}(\widehat{\alpha}_۱(\lambda,\gamma), \widehat{\alpha}_۲(\lambda,\gamma), \widehat{\alpha}_۳(\lambda,\gamma), \lambda,\gamma,\theta)$ به‌دست آورده می‌شود. الگوریتم ۱ می‌تواند برای محاسبه برآوردگرهای ماکسیمم درستنمایی پارامترها براساس الگوریتم EM استفاده شوند:

الگوریتم ۱ :

گام ۱: یک مقدار اولیه برای $\mathbf{\Theta}$ درنظر گرفته شود، مثلا $\mathbf{\Theta}^{(0)}=(\alpha_۱^{(۰)},\alpha_۲^{(۰)},\alpha_۳^{(۰)},\lambda^{(۰)},\gamma^{(۰)},\theta^{(۰)})'$.

گام ۲: مقدار $b_i=E(N\mid y_{۱i},y_{۲i};\mathbf{\Theta}^{(۰)})$ با استفاده از (؟؟) محاسبه شود.

گام ۳: مقادیر $u_۱$، $u_۲$، $v_۱$ و $v_۲$ محاسبه می‌شوند.

گام ۴: تابع شبه لگاریتم درستنمایی $\ell_{\text{pseudo}}(\alpha_۱^{(۰)},\alpha_۲^{(۰)},\alpha_۳^{(۰)},\lambda,\gamma,\theta^{(۰)})$ نسبت به λ و γ ماکسیمم شود و به ترتیب با $\hat{\lambda}^{(۱)}$ و $\hat{\gamma}^{(۱)}$ نشان داده شوند.

گام ۵: مقدار $\hat{\alpha}_i^{(۱)}=\hat{\alpha}_i(\widehat{\lambda}^{(۱)},\hat{\gamma}^{(۱)})$ بر اساس رابطه (۱۳) محاسبه شود.

گام ۶: مقدار $\hat{\theta}$ از حل معادله (۱۴) پیدا نموده و با $\hat{\theta}^{(۱)}$ نشان داده شود.

گام ۷: مقدار $\mathbf{\Theta}^{(0)}$ با $\mathbf{\Theta}^{(1)}=(\hat{\alpha}_۱^{(۱)},\hat{\alpha}_۲^{(۱)},\hat{\alpha}_۳^{(۱)},\hat{\lambda}^{(۱)},\hat{\gamma}^{(۱)},\hat{\theta}^{(۱)})$ جایگذاری شود و مراحل تا زمانی که فرایند همگرا شود ادامه یابد.

۵ مثال‌های عددی

در این بخش توزیع BGGPS برای برازش به دو مجموعه داده‌های واقعی مورد استفاده قرار می‌گیرد. در اینجا شش زیرکلاس از این توزیع در نظر گرفته شده است. توزیع‌های دومتغیره گومپرتز تعمیم‌یافته (BGG)، گومپرتز تعمیم‌یافته-هندسی (BGGG)، گومپرتز تعمیم‌یافته-پواسون (BGGP)، گومپرتز تعمیم‌یافته-دوجمله‌ای (BGGB) با $k = ۱۰$، گومپرتز تعمیم‌یافته-لگاریتمی (BGGL) و گومپرتز تعمیم‌یافته-دوجمله‌ای منفی (BGGNB) با $k = ۲$. اولین مجموعه داده‌های دومتغیره در این مثال که اولین بار توسط واشنگتن پست ارائه شده است (سزورگو و ولش، (۱۹۸۹، مربوط به لیگ فوتبال آمریکا طی سه هفته متوالی مسابقات در سال ۱۹۸۶ است. در اینجا، $Y_۱$ نشان‌دهنده زمانی است که اولین امتیاز با ضربه به توپ حاصل شده است و $Y_۲$ زمانی است که اولین امتیاز با انتقال توپ به آخر زمین حاصل شده است. تمام داده‌ها بر ۱۰۰ تقسیم شده‌اند. کوندو و گوپتا (۲۰۱۰)، جمالیزاده و کندو (۲۰۱۲)، الشرپیانی و همکاران (۲۰۱۳) نیز این داده‌ها را مورد تحلیل قرار داده‌اند. دومین مجموعه داده‌های دومتغیره مربوط به ۴۴ مورد درخواست خسارت از بیمه حوادث موتورسیکلت تا انتهای سال ۱۳۹۴ بابت هزینه‌های صدمه به اموال ($Y_۱$) و هزینه‌های درمانی ($Y_۲$) گزارش شده توسط بیمه ایران است. این مجموعه داده‌ها که تا نزدیک‌ترین ۱۰۰۰۰۰ واحد گرد شده و سپس بر این عدد تقسیم شده‌اند در جدول ۳ گزارش شده است.

جدول ۳. تعداد تقاضاهای بیمه حوادث موتور سیکلت از شرکت بیمه.

$Y_۱$	۵۰۰	۸۹۰	۴۲۸	۱۴۴	۵۴۶	۵۵۰	۳۴۳	۴۱۱	۱۳۴	۳۸۰	۵۳۵
$Y_۲$	۱۶۸	۲۹۲	۲۷۲	۱۹۳	۲۸۶	۱۳۲	۱۶۱	۱۹۲	۹۴۵	۲۲۶	۲۰۶
$Y_۱$	۴۹۱	۶۲۰	۴۱۲	۱۹۹	۶۶۵	۳۰۰	۲۵۲	۱۷۵	۳۷۴	۲۳۰	۷۲۰
$Y_۲$	۶۸۴	۱۸۳	۱۹۸	۲۴۳	۴۵۶	۴۱۷	۵۲۲	۱۷۵	۸۸۱	۷۸۴	۴۰۰
$Y_۱$	۴۷۰	۷۰۶	۳۲۳	۲۲۴	۱۶۰	۴۹۹	۳۳۵	۱۱۴	۱۹۸	۱۹۲	۲۰۵
$Y_۲$	۵۷۰	۲۲۲	۱۰۳	۳۴۹	۳۴۲	۴۷۹	۸۰۷	۳۸۹	۱۷۱	۱۱۴	۱۲۲
$Y_۱$	۴۷۶	۳۶۸	۳۰۶	۳۹۸	۴۲۳	۵۰۰	۳۸۰	۵۵۰	۵۲۹	۱۷۱	۳۳۵
$Y_۲$	۲۷۴	۱۶۵	۱۸۹	۹۷۶	۳۷۵	۱۹۸	۲۶۷	۱۰۷	۲۰۲	۹۹۹	۲۶۴

توزیع‌ها به مجموعه داده‌های دومتغیره برازش شده و برآوردگرهای ماکسیمم درستنمایی و مقادیر لگاریتم درستنمایی متناظر محاسبه شده‌اند. همچنین، انحرافات استاندارد (SE) بر اساس ماتریس اطلاع مشاهده به‌دست آمده‌اند. برای هر مدل برازش شده، معیار اطلاع آکائیکی (AIC)، معیار اطلاع آکائیکی اصلاح‌شده (AICC) و معیار اطلاع بیزی (BIC) نیز محاسبه شده‌اند. از آنجایی که آماره کلموگروف-اسمیرنوف (K-S) برای حالت یک متغیره استفاده می‌شود p-مقدارهای متناظر این آماره برای Y_1، Y_2 و $V = \max(Y_1, Y_2)$ محاسبه شده‌اند. سرانجام، آزمون نسبت درستنمایی (LRT) و p-مقدارهای متناظر برای آزمون مناسب بودن توزیع BGG در مقابل سایر مدل‌ها مورد استفاده قرار گرفت. نتایج در جداول ۴ و ۵ آورده شده‌اند. می‌توان مشاهده کرد که تمام مدل‌ها برای این دو مجموعه داده‌ها مناسب هستند.

بحث و نتیجه‌گیری

در این مقاله خانواده‌ای از توزیع‌های جدیدی، تحت عنوان خانواده توزیع‌های دومتغیره گومپرتز تعمیم‌یافته-سری توانی معرفی شد. این کلاس جدید از توزیع‌های دومتغیره شامل چندین مدل دیگر است که به‌طور جداگانه مورد بررسی قرار گرفتند. چندین ویژگی از توزیع مانند تابع چگالی احتمال توام و شرطی، توابع توزیع حاشیه‌ای و امید ریاضی شرطی محاسبه شد. پس از برآورد پارامترهای این مدل، برای نشان دادن میزان انعطاف‌پذیری و توانمندی این توزیع دومتغیره، از دو سری داده واقعی برای برازش مدل استفاده گردید. با توجه به نتایج حاصله از مقایسه در بخش کاربردها می‌توان نتیجه گرفت که مدل جدید برای این مجموعه داده‌ها مناسب است و می‌تواند جایگزین مناسبی برای توزیع‌های دومتغیره دیگر باشد.

تقدیر و تشکر

مولفین لازم می‌دانند از داوران گرامی، سردبیر و اعضای هیات تحریریه محترم مجله که با نظرات ارزنده خود باعث بهبود مقاله شدند، صمیمانه تشکر و قدردانی نمایند. از دانشگاه یزد نیز بخاطر حمایت و پشتیبانی از این مقاله قدردانی می‌گردد.

مراجع

Adamidis, K. and Loukas, S. (1998), A Lifetime Distribution with Decreasing Failure Rate, *Statistics and Probability Letters*, **39**, 35-42.

جدول ۴. نتایج برای شش توزیع برازش شده روی مجموعه داده‌های اول.

آماره	BGG	BGGG	BGGP	BGGB	BGGL	BGGNB
$\hat{\alpha}_1$	۰/۰۹۲۱	۰/۰۶۰۵	۰/۰۵۷۸	۰/۰۵۹۷	۰/۰۶۷۵	۰/۰۱۹۵
SE	۰/۰۶۵۳	۰/۰۴۸۳	۰/۰۴۹۵	۰/۰۴۹۷	۰/۰۵۰۴	۰/۰۲۲۸
$\hat{\alpha}_2$	۰/۵۷۲۲	۰/۴۱۹۷	۰/۳۸۹۶	۰/۳۹۸۸	۰/۴۷۲۰	۰/۱۳۲۵
SE	۰/۱۶۱۴	۰/۱۷۹۸	۰/۲۱۱۲	۰/۲۰۴۰	۰/۱۵۸۶	۰/۱۲۳۶
$\hat{\alpha}_3$	۱/۱۵۱۹	۰/۷۴۷۱	۰/۷۱۷۲	۰/۷۴۰۹	۰/۸۳۳۱	۰/۲۴۲۱
SE	۰/۲۳۸۸	۰/۳۱۹۳	۰/۳۷۴۶	۰/۳۵۸۱	۰/۲۶۳۴	۰/۲۳۱۳
$\hat{\lambda}$	۹/۶۱۸۷	۱۲/۰۹۶۱	۱۱/۴۶۱۶	۱/۲۸۰۲	۱۲/۲۴۸۹	۱۱/۶۳۸۶
SE	۱/۵۵۹۰	۲/۱۹۰۰	۱/۸۱۵۹	۱/۷۶۶۶	۲/۳۰۰۸	۲/۰۲۷۲
$\hat{\gamma}$	۲/۱e-۱۲	۱/۳e-۱۲	۱/۱e-۱۲	۱/۲e-۱۲	۱/۵e-۱۲	۱/۳e-۱۲
SE	۰/۰۴۵۵	۰/۰۵۹۴	۰/۱۰۶۰	۰/۱۰۰۸	۰/۰۹۶۲	۰/۱۱۴۰
$\hat{\theta}$	—	۰/۶۱۲۸	۱/۹۹۳۰	۰/۲۳۲۵	۰/۸۰۵۳	۰/۷۱۸۶
SE	—	۰/۲۳۵۴	۱/۶۱۰۵	۰/۲۰۷۴	۰/۱۷۸۱	۰/۳۱۳۷
$\log(\ell)$	۳۶/۶۷۰	۳۸/۳۶۳	۳۸/۲۳۲۸	۳۸/۱۶۶	۳۸/۳۵۸	۳۸/۱۷۲
AIC	-۶۳/۳۴۰	-۶۴/۷۲۵	-۶۴/۴۶۵	-۶۴/۳۳۲	-۶۴/۷۱۶	-۶۴/۳۴۴
AICC	-۶۱/۶۷۳	-۶۲/۳۲۵	-۶۲/۰۶۵	-۶۱/۹۳۲	-۶۲/۳۱۶	-۶۱/۹۴۴
BIC	-۵۴/۶۵۱	-۵۴/۲۹۹	-۵۴/۰۳۹	-۵۳/۹۰۶	-۵۴/۲۹۰	-۵۳/۹۱۸
p-مقدار K-S (X_1)	۰/۱۲۸۲	۰/۱۰۲۸	۰/۱۰۰۵	۰/۱۰۱۶	۰/۱۰۷۱	۰/۱۰۰۱
p-مقدار K-S (X_2)	۰/۳۴۰۸	۰/۲۹۵۳	۰/۲۶۷۹	۰/۲۶۸۸	۰/۳۳۲۱	۰/۲۶۸۱
p-مقدار K-S (V)	۰/۳۹۲۹	۰/۳۶۸۵	۰/۳۲۷۱	۰/۳۲۶۲	۰/۴۱۶۵	۰/۳۲۹۲
LRT	—	۳/۳۸۶	۳/۱۲۶	۲/۹۹۲	۳/۳۷۶	۳/۰۰۴
p-مقدار	—	۰/۰۶۵۷	۰/۰۷۷۰	۰/۰۸۳۶	۰/۰۶۶۱	۰/۰۸۳۰

Barreto-Souza, W., Morais, A. L. and Cordeiro, G. M. (2011), The Weibull-Geometric Distribution, *Journal of Statistical Computation and Simulation*, **81**, 645-657.

جدول ۵. نتایج برای شش توزیع برازش شده روی مجموعه داده‌های دوم.

BGGNB	BGGL	BGGB	BGGP	BGGG	BGG	آماره
۲/۷۷۰۲	۵/۵۴۲۶	۵/۵۴۰۵	۵/۵۴۰۷	۵/۵۴۰۱	۵/۵۴۰۵	$\hat{\alpha}_1$
۲/۳۲۷	۱/۳۱۸	۱/۳۰۰	۱/۳۱۷	۱/۳۸۰	۱/۳۱۶	SE
۱/۷۹۶۵	۳/۵۹۴۳	۳/۵۹۳۴	۳/۵۹۱۸	۳/۵۹۲۹	۳/۵۹۳۱	$\hat{\alpha}_2$
۱/۲۵۱	۰/۸۶۲	۰/۸۶۹	۰/۸۶۲	۰/۸۳۲	۰/۸۶۲	SE
۱۰e-۰۶	۱۰e-۰۶	۱۰e-۰۶	۱۰e-۰۶	۱۰e-۰۶	۱۰e-۶	$\hat{\alpha}_3$
۱/۱۱۵	۱/۱۴۲	۱/۰۶۴	۱/۱۷۱	۱/۱۴۲	۱/۱۴۰	SE
۵۸۳۹/۹۳	۵۸۴۱/۲۷	۵۸۴۰/۰۱۳	۵۸۳۹/۸۷۱	۵۸۳۹/۶۷۵	۵۸۳۹/۹۵۹	$\hat{\lambda}$
۷۲۷/۵۴۱	۷۳۶/۱۱۲	۷۲۶/۸۷۵	۷۳۵/۷۷۵	۷۷۱/۰۴۷	۷۳۵/۷۰۱	SE
۲,۲۵e-۰۵	۴,۰۷e-۰۵	۳,۱۲e-۶	۹,۹۳e-۰۶	۶,۴۱e-۰۵	۱۰e-۰۸	$\hat{\gamma}$
۰/۰۰۱۵۴	۰/۰۰۰۸۱	۰/۰۰۰۰۵	۰/۰۱۴۶	۰/۰۰۱۴	۰/۰۰۰۹	SE
۱۱e-۰۶	۱۰e-۰۶	۱۲e-۰۶	۱۰e-۰۶	۱۰e-۰۶	—	$\hat{\theta}$
۰/۰۴۲۸	۰/۰۵۰۱	۰/۰۴۴۷	۰/۰۴۸۳	۰/۴۰۹۴	—	SE
۶۳۴/۹۹۳	۶۳۵/۳۸۵	۶۳۴/۹۸۴	۶۳۵/۲۱۴	۶۳۵/۴۲۸	۶۳۳/۸۸۲	$\log(\ell)$
-۱۲۵۷/۹۸	-۱۲۵۸/۷۷	-۱۲۵۷/۹۶	-۱۲۵۸/۴۲	-۱۲۵۸/۸۵	-۱۲۵۷/۷۶	AIC
-۱۲۵۵/۷۱	-۱۲۵۶/۵۰	-۱۲۵۵/۶۹	-۱۲۵۶/۱۵	-۱۲۵۶/۵۸	-۱۲۵۶/۱۸	AICC
-۱۲۶۰/۱۲	-۱۲۶۰/۹۱	-۱۲۶۰/۱۱	-۱۲۶۰/۵۶	-۱۲۶۰/۹۹	-۱۲۴۸/۸۴	BIC
۰/۸۰۹	۰/۸۲۳	۰/۸۱۷	۰/۸۱۱	۰/۸۱۲	۰/۸۳۱	p-مقدار K-S (X_1)
۰/۱۹۳	۰/۲۷۱	۰/۱۹۷	۰/۲۰۳	۰/۲۱۵	۰/۴۲۸	p-مقدار K-S (X_2)
۰/۶۹۱	۰/۷۲۴	۰/۶۸۸	۰/۶۹۴	۰/۷۳۱	۰/۷۶۲	p-مقدار K-S (V)
۳/۱۱۶	۳/۲۵۱	۳/۰۹۲	۳/۱۴۲	۳/۲۸۷	—	LRT
۰/۰۸۴۱	۰/۰۷۲۲	۰/۰۸۴۶	۰/۰۸۱۷	۰/۰۷۱۴	—	p-مقدار

Chahkandi, M. and Ganjali, M. (2009), On some Lifetime Distributions with Decreasing Failure Rate, *Computational Statistics and Data Analysis*, **53**, 4433-4440.

Csorgo, S. and Welsh, A. (1989), Testing for Exponential and Marshall-Olkin Distributions, *Journal of Statistical Planning and Inference*, **23**, 287-300.

El-Gohary, A., Alshamrani, A. and Al-Otaibi, A. (2013), The Generalized

Gompertz Distribution, *Applied Mathematical Modeling*, **37**, 13-24.

El-Sherpieny, E. A., Ibrahim, S. A. and Bedar, R. E. (2013), A New Bivariate Distribution with Generalized Gompertz Marginals, *Asian Journal of Applied Sciences*, **1**, 141-150.

Flores, J., Borges, P., Cancho, V. G. and Louzada, F. (2013), The Complementary Exponential Power Series Distribution, textitBrazilian Journal of Probability and Statistics, **27**, 565-584.

Gupta, R. D. and Kundu, D. (1999), Generalized Exponential Distributions, *Australian & NewZealand Journal of Statistics*, **41**, 173-188.

Jamalizadeh, A. and Kundu, D. (2013), Weighted Marshall-Olkin Bivariate Exponential Distribution, *Statistics*, **47**, 917-928.

Kundu, D. and Gupta, R. D. (2010), A Class of Bivariate Models with Proportional Reversed Hazard Marginals, *Sankhya* B, **72**, 236-253.

Kundu, D. and Gupta, A. K. (2014), On Bivariate Weibull-Geometric Distribution, *Journal of Multivariate Analysis*, **123**, 19-29.

Kuş, C. (2007), A New Lifetime Distribution, *Computational Statistics and Data Analysis*, **51**, 4497-4509.

Lawless, J. F. (1982), *Statistical Models and Methods for Lifetime Data*, John Wiley, New York.

Mahmoudi, E. and Jafari, A. A. (2012), Generalized Exponential-Power Series Distributions. *Computational Statistics and Data Analysis*, **56**, 4047-4066.

Mahmoudi, E. and Jafari, A. A. (2017), The Compound Class of Linear Failure Rate-Power Series Distributions: Model, Properties and Applications, *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, **46**, 1414-1440.

Marshall, A. W. and Olkin, I. (1997), A New Method for Adding a Parameter to a Aamily of Distributions with Application to the Exponential and Weibull Families, *Biometrika*, Series B, **84**, 641-652.

Morais, A. L. and Barreto-Souza, W. (2011), A Compound Class of Weibull and Power Series Distributions, *Computational Statistics and Data Analysis*, **55**, 1425-1410.

Noack, A. (1950), A Class of Random Variables with Discrete Distributions, *Annals of Mathematical Statistics*, **21**, 132-127.

Roozegar, R. and Nadarajah, S. (2017), The Quadratic Hazard Rate Power Series Distribution, *Journal of Testing and Evaluation*, **45**, 1072-1058.

Silva, R. B., Bourguignon, M., Dias, C. R. B. and Cordeiro, G. M. (2013), The Compound Class of Extended Weibull Power Series Distributions, *Computational Statistics and Data Analysis*, **58**, 367-352.

Tahmasebi, S. and Jafari, A. A. (2016), Generalized Gompertz-Power Series Distributions, *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, **45**, 1604-1579.

Tahmasbi, R. and Rezaei, S. (2008), A Two-Parameter Lifetime Distribution with Decreasing Failure Rate, *Computational Statistics and Data Analysis*, **52**, 3901-3889.