مجله علوم آماری، بهار و تابستان ۱۳۹۶
جلد ۱۱، شماره ۱، ص ۱۷۵-۱۹۶
DOI: 10.18869/acadpub.jss.11.1.175

نتایجی در تعمیم زمان از کار افتادگی سیستم‌های $(n-k+1)$ از n با واحدهای وابسته

سید شاهرخ هاشمی بصرا[1]، ابراهیم صالحی[2]
[1]گروه علوم پایه، دانشگاه صنعتی بیرجند
[2]گروه مهندسی صنایع، دانشگاه صنعتی بیرجند

تاریخ دریافت: ۱۳۹۵/۲/۱۴ تاریخ آخرین بازنگری: ۱۳۹۵/۱۱/۲۸

چکیده: سیستم‌های $(n-k+1)$ از n یکی از مهمترین انواع سیستم‌های منسجم هستند که کاربردهای زیادی در زمینه‌های مختلف مهندسی دارند. در این مقاله متغیر تعمیم زمان از کار افتادگی واحدهای شکست خورده سیستم‌های $(n-k+1)$ از n هنگامی که سیستم در زمان $t>0$ از کار افتاده باشد، مورد مطالعه قرار می‌گیرد. ابتدا سیستم‌های موازی شامل دو واحد تبادل‌پذیر را در نظر گرفته و با استفاده از تابع مفصل فارلی-گامبل-مورگنسترن رفتار تابع میانگین زمان از کارفتادگی واحدهای شکست خورده سیستم مورد بررسی قرار می‌گیرد. سیستم‌های $(n-k+1)$ از n با واحدهای تبادل‌پذیر را در بخش بعدی در نظر گرفته و در ادامه برخی ویژگی‌های ترتیب تصادفی تعمیم زمان از کار افتادگی برای این نوع سیستم‌ها بر اساس یک یا دو نمونه ارائه می‌شود.

واژه‌های کلیدی: میانگین زمان از کار افتادگی، نرخ خطر معکوس، آماره‌های ترتیبی، تابع مفصل، ترتیب‌های تصادفی، قابلیت اعتماد.

۱ مقدمه

یک سیستم $(n-k+1)$ از n سیستمی شامل n واحد است که این سیستم کار می‌کند اگر و فقط اگر حداقل $(n-k+1)$ واحد از n واحد سیستم در حال کار باشد. سیستم‌های $(n-k+1)$ از n زیر

آدرس الکترونیکی نویسنده مسئول مقاله: ابراهیم صالحی، salehi@birjandut.ac.ir
کد موضوع‌بندی ریاضی (۲۰۱۰): 62N05، 60E15

کلاس بزرگی از سیستم‌های منسجم هستند که در بر گیرنده سیستم‌های سری و موازی به ترتیب با $k=1$ و $k=n$ هستند. در چند دهه‌ی گذشته نویسندگان زیادی قابلیت اعتماد و ویژگی‌های سالخوردگی این نوع سیستم‌ها را مورد مطالعه و بررسی قرار دادند. از جمله آنها می‌توان به اسدی (۲۰۰۶)، اسدی و بایرامو (۲۰۰۶)، لی و زاو (۲۰۰۸)، کوچار و زو (۲۰۱۰) و ژانگ (۲۰۱۱) اشاره کرد.

تابع میانگین زمان از کار افتادگی[1] (MIT) یکی از مهم‌ترین اندازه‌ها در نظریه قابلیت اعتماد است. طی چندین سال گذشته، مطالعه و بررسی ویژگی این تابع برای سیستم‌های منسجم از جمله سیستم‌های سری، موازی و k از n مورد توجه محققان و نویسندگان زیادی قرار گرفته است. اسدی (۲۰۰۶) میانگین زمان از کار افتادگی را تعریف و برخی نتایج جالب را برای آن ارائه کرد. توانگر و اسدی (۲۰۱۰) نتایج اسدی (۲۰۰۶) را برای سیستم‌های $(n-k+1)$ از n شامل واحدهای مستقل و هم توزیع بسط دادند. صالحی و اسدی (۲۰۱۲) میانگین تعمیم زمان از کارافتادگی[2] (MGIT) سیستم‌های $(n-k+1)$ از n با واحدهای مستقل و نا هم‌توزیع را بررسی کردند. از جمله مطالعات دیگر درباره زمان از کار افتادگی می‌توان به خالدی و شیکد (۲۰۰۷)، لی و ژانگ (۲۰۰۸)، زاو و همکاران (۲۰۰۸) و توانگر (۲۰۱۶) اشاره کرد.

اکثر نتایج ذکر شده فوق تحت فرض استقلال واحدهای سیستم ارائه شده است. اما در جهان واقع، واحدهای قرار گرفته در یک شرایط محیطی یکسان تحت تاثیر یکدیگر قرار می‌گیرند، بنابراین فرض وابستگی بین واحدهای سیستم فرض منطقی و واقع‌بینانه است. اخیراً مطالعه وابستگی میان واحدهای سیستم‌های منسجم مورد توجه بسیاری از محققان و طراحان سیستم قرار گرفته است. از مهمترین آنها می‌توان مقاله‌های کاتز و همکاران (۲۰۰۳)، ناوارو و همکاران (۲۰۰۷)، ژانگ (۲۰۱۰)، صادق (۲۰۱۱)، ناوارو و روبیو (۲۰۱۱)، توانگر و اسدی (۲۰۱۵) و صالحی و هاشمی بصرا (۲۰۱۷) را نام برد. امروزه توابع مفصل که ابزار بسیار مفید و کارا برای توصیف و مدل‌سازی ساختار وابستگی بین طول عمر واحدها هستند، در تحلیل قابلیت اعتماد این نوع سیستم‌ها بکار رفته و نقش بسزایی در حل اینگونه مسائل ایفا می‌کنند. ناوارو و اسپیزیچینو (۲۰۱۰)، رضاپور و همکاران (۲۰۱۳)، جیا و همکاران (۲۰۱۴) و ناوارو و گومیز (۲۰۱۵) منابع مناسبی برای مطالعه در مورد ویژگی‌های تابع مفصل و کاربرد آن در زمینه قابلیت اعتماد سیستم‌ها هستند.

این مقاله بصورت زیر مرتب شده است. در بخش ۲ برخی مفاهیم و ابزارهایی که برای ارائه نتایج اصلی مقاله لازم است بیان می‌شوند. تعمیم زمان از کار افتادگی (GIT) سیستم موازی با دو واحد تبادل‌پذیر بر

[1] Mean Inactivity Time
[2] Mean General Inactivity Time

اساس تابع مفصل بویژه مفصل فارلی-گامبل-مورگنسترن (FGM) در بخش ۳ مورد مطالعه قرار گرفته و فرم صریحی برای میانگین این متغیر تصادفی شرطی بدست آورده می‌شود. در ادامه این بخش با ارائه مثال‌هایی رفتار تابع MGIT سیستم بررسی شده و با رفتار تابع MIT واحدهایی که تابع نرخ خطر معکوس آنها وانی-شکل باشند، مقایسه می‌شود. در بخش ۴، فرم بسته‌ای برای تابع قابلیت اعتماد (بقاء) تعمیم زمان از کارافتادگی سیستم $(n-k+۱)$ از n با واحدهای وابسته تبادل‌پذیر ارائه شده و ویژگی‌های ترتیب‌های تصادفی این متغیر تصادفی شرطی بر اساس یک یا دو نمونه بدست آورده می‌شود. بعلاوه، با ذکر مثال نتایج بدست آمده تشریح می‌شوند.

۲ تعاریف و مفاهیم اولیه

فرض کنید بردار تصادفی $\mathbf{T} = (T_۱, \ldots, T_n)$ نشان‌دهنده طول عمر واحدهای یک سیستم، دارای تابع توزیع توام دلخواه $F(t_۱, \ldots, t_n)$ و تابع بقاء متناظر $\bar{F}(t_۱, \ldots, t_n)$ باشد و $T_{۱:n}, \ldots, T_{n:n}$ آماره‌های مرتب شده متناظر با این طول عمرها باشند. همچنین فرض کنید T_iها دارای تابع توزیع بطور مطلق پیوسته F_i، تابع چگالی f_i و تابع بقاء $\bar{F}_i$، $i = ۱, \ldots, n$، باشند.

تعریف ۱: متغیرهای تصادفی $T_۱, \ldots, T_n$، تبادل‌پذیر نامیده می‌شوند اگر برای هر n،

$$P(T_۱ \leq t_۱, \ldots, T_n \leq t_n) = P(T_{\pi_۱} \leq t_۱, \ldots, T_{\pi_n} \leq t_n),$$

برای هر جایگشت $\pi = (\pi_۱, \ldots, \pi_n)$ از $\{۱, \ldots, n\}$، یعنی تابع توزیع توام (یا تابع بقاء توام) $T_۱, \ldots, T_n$ در $t_۱, \ldots, t_n$ متقارن باشد.

تابع بقاء سیستم $(n-k+۱)$ از n متشکل از واحدهایی با طول عمرهای تبادل‌پذیر $T_۱, \ldots, T_n$، برابر است با:

$$\bar{F}_{k:n}(x) = P(T_{k:n} > t) = \sum_{j=n-k+۱}^{n} (-۱)^{j-n+k-۱} \binom{j-۱}{n-k} \binom{n}{j} P(T_{۱:j} > t),$$

برای جزئیات بیشتر به دیوید و ناگاراجا (۲۰۰۳) مراجعه شود.

در بسیاری از مواقع اغلب سیستم‌ها به طور مداوم کنترل نمی‌شوند، بنابراین زمان دقیق از بین رفتن

واحدهای سیستم نامعلوم است. اطلاعات بیشتری در مورد گذشته سیستم ممکن است موضوعی مهم و مورد علاقه مهندسین و طراحان سیستم باشد. فرض کنید T طول عمر یک واحد با تابع توزیع $F(t)$ باشد که در زمان $t > 0$ یا قبل از آن از کار افتاده باشد. با این فرض متغیر تصادفی شرطی $\{t-T|T\leq t\}$ را زمان از کار افتادگی واحد می‌نامند. این متغیر شرطی در بعضی از متون نیز به طول عمر گذشته[۳] واحد نیز معروف است. میانگین زمان از کارافتادگی طول عمر واحد برای مقادیر t که $F(t) > 0$، بصورت

$$M(t) = E(t-T|T\leq t) = \frac{\int_0^t F(x)dx}{F(t)},$$

تعریف می‌شود. حال یک سیستم $(n-k+1)$ از n با واحدهای تبادل‌پذیر را در نظر بگیرید. در اکثر مواقع ممکن است دانستن زمان سپری شده ازrامین واحد از کار افتاده، هنگامی که سیستم از کار افتاده است مهم باشد. فرض کنید سیستم $(n-k+1)$ از n در زمان t یا قبل از آن از کار افتاده باشد. زمان از کار افتادگی واحدی با طول عمر $T_{r:n}$ در این سیستم بصورت $\{t-T_{r:n}|T_{k:n}\leq t\}$، $1\leq r\leq k\leq n$، تعریف می‌شود. این متغیر شرطی همچنین به تعمیم زمان از کار افتادگی سیستم معروف است. تابع میانگین تعمیم زمان از کار افتادگی این سیستم برابر است با:

$$\Psi^r_{k:n}(t) = E(t-T_{r:n}|T_{k:n}\leq t).$$

برای تحلیل و مطالعه توزیع چند متغیره طول عمر واحدها از یک ابزار مفید و کارایی به نام تابع مفصل استفاده می‌شود. علاوه بر این، مفصل این امکان را فراهم می‌سازد تا ساختار وابستگی موجود بین متغیرها به خوبی توصیف شود. در حقیقت مفصل یک رابطه‌ای بین توابع توزیع چند متغیره و توابع توزیع حاشیه‌ای آنهاست. با بکار بردن قضیه اسکلار داریم:

$$F(t_1,\ldots,t_n) = C(F_1(t_1),\ldots,F(t_n)), \tag{1}$$

که در آن $F_i(t_i)$ تابع توزیع حاشیه‌ای T_i، $i=1,\ldots,n$، است (نلسن ۲۰۰۶).

خانواده مفصل FGM یکی از خانواده‌های معروف توابع مفصل هستند که به طور گسترده در زمینه‌های مختلف به ویژه در بررسی ساختار وابستگی بین چند متغیره مورد استفاده قرار می‌گیرند. سادگی فرم این

[۳] Past Lifetime

نوع مفصل‌ها این امکان را فراهم می‌سازد تا در بسیاری از مسائل پیچیده بتوان نتایج دقیق‌تری را بدست آورد. این خانواده مفصل ابتدا توسط مورگنسترن (۱۹۵۶)، فارلی (۱۹۶۰) و سپس گامبل (۱۹۶۰) معرفی و مورد مطالعه قرار گرفته و بعد از آن طی سالیان متمادی توجه محققان زیادی را به خود معطوف کرده است. برای آشنایی بیشتر این تابع و حالت‌های تعمیم یافته آن می‌توان به جانسون و کاتز (۱۹۷۵)، هانگ و کاتز (۱۹۸۴) و بایرامو و کاتز (۲۰۰۲) اشاره کرد.

تعریف ۲: اگر $F(x_۱, x_۲)$ تابع توزیع توام FGM دومتغیره برای بردار تصادفی $(X_۱, X_۲)$ باشد، آنگاه

$$F(x_۱, x_۲) = F_۱(x_۱)F_۲(x_۲)\Big[۱ + \alpha\Big(۱ - F_۱(x_۱)\Big)\Big(۱ - F_۲(x_۲)\Big)\Big],$$

که در آن F_i تابع توزیع X_i، $i = ۱, ۲$ و $|\alpha| \leq ۱$، پارامتر همبستگی است. همچنین $\alpha = ۰$ حالت استقلال بین $X_۱$ و $X_۲$ را نتیجه می‌دهد. در مدل چند متغیره برای $n \geq ۳$، تابع مفصل FGM، n بعدی بر روی $[۰, ۱]^n$، به صورت زیر تعریف شده و تعداد پارامترهای وابسته آن با فرمول $۲^n - n - ۱$ قابل محاسبه است (نلسن ۲۰۰۶).

$$C(\mathbf{u}) = u_۱ \dots u_n\left(۱ + \sum_{k=۲}^{n} \sum_{۱ \leq j_۱ < \dots < j_k \leq n} \alpha_{j_۱ \dots j_k}(۱ - u_{j_۱}) \dots (۱ - u_{j_k})\right),$$

که در آن $\{j_۱, \dots, j_k\} \in \{۱, \dots, n\}$.

فرض کنید X و Y دو متغیر تصادفی پیوسته به ترتیب با توابع توزیع F، G و توابع قابلیت اعتماد $\bar{F} = ۱ - F$ و $\bar{G} = ۱ - G$ باشند.

تعریف ۳: متغیر تصادفی X در ترتیب تصادفی معمولی[۴] کوچکتر از Y است و با $X \leq_{st} Y$ نمایش داده می‌شود، هرگاه به ازای هر t متعلق به اجتماع تکیه‌گاه‌های X و Y، $\bar{F}(t) \leq \bar{G}(t)$.

تعریف ۴: (الف) بردارهای تصادفی n بعدی $\mathbf{X} = (X_۱, \dots, X_n)$ و $\mathbf{Y} = (Y_۱, \dots, Y_n)$ را در نظر بگیرید. برادر تصادفی $\mathbf{X}$ در ترتیب تصادفی چند متغیره معمولی[۵] کوچکتر از $\mathbf{Y}$ و با $\mathbf{X} \leq_{\mathbf{st}} \mathbf{Y}$ نمایش داده می‌شود، هرگاه به ازای هر تابع صعودی ϕ، $E(\phi(\mathbf{X})) \leq E(\phi(\mathbf{Y}))$.

[۴] Usual stochastic order
[۵] Multivariate usual stochastic order

(ب) فرض کنید $\mathbf{X}=(X_1,\ldots,X_n)$ و $\mathbf{Y}=(Y_1,\ldots,Y_n)$ دو بردار تصادفی nبعدی با توابع توزیع به طور مطلق پیوسته به ترتیب دارای تابع چگالی f و g باشند. بردار تصادفی $\mathbf{X}$ در ترتیب نسبت درستنمایی چند متغیره[۶] کوچکتر از $\mathbf{Y}$ و با $\mathbf{X}\le_{lr}\mathbf{Y}$ نمایش داده می‌شود، اگر $f(\mathbf{x})g(\mathbf{y})\le f(\mathbf{x}\wedge\mathbf{y})g(\mathbf{x}\vee\mathbf{y})$ باشد، که در آن

$$\begin{aligned}\mathbf{x}\wedge\mathbf{y} &= (x_1\wedge y_1,\ldots,x_n\wedge y_n),\\ \mathbf{x}\vee\mathbf{y} &= (x_1\vee y_1,\ldots,x_n\vee y_n),\end{aligned}$$

با $x_i\wedge y_i=\min\{x_i,y_i\}$ و $x_i\vee y_i=\max\{x_i,y_i\}$، $i=1,\ldots,n$.

تعریف ۵: تابع $K:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}_+$ به طور کامل مثبت از مرتبه ۲ چند متغیره[۷] (MTP_2) است، هرگاه برای $\mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathbb{R}^n$،

$$K(\mathbf{x})K(\mathbf{y})\le K(\mathbf{x}\wedge\mathbf{y})K(\mathbf{x}\vee\mathbf{y}).$$

قضیه ۱: اگر $\mathbf{X}$ و $\mathbf{Y}$ دو متغیر تصادفی n بعدی باشند به طوری که $\mathbf{X}\le_{lr}\mathbf{Y}$، آنگاه $\mathbf{X}\le_{st}\mathbf{Y}$.

قضیه ۲: اگر $\mathbf{X}$ و $\mathbf{Y}$ دو متغیر تصادفی n بعدی باشند به طوری که $\mathbf{X}\le_{lr}\mathbf{Y}$، آنگاه برای هر $A\subseteq\mathbb{R}^n$،

$$[\mathbf{X}|\mathbf{X}\in A]\le_{lr}[\mathbf{Y}|\mathbf{Y}\in A].$$

قضیه ۳: فرض کنید $\{X_1,X_2,\ldots\}$ و $\{Y_1,Y_2,\ldots\}$ دو دنباله از متغیرهای تصادفی (نه لزوماً مستقل) باشند. به طوری که برای $k\ge 1$،

$$(X_1,\ldots,X_k)\le_{st}(Y_1,\ldots,Y_k),$$

آنگاه برای $i\le j$ و $m-i\ge n-j$، داریم:

$$X_{i:m}\le_{st}Y_{j:n}.$$

[۶] Multivariate likelihood ratio order
[۷] Multivariate totally positive of order 2

با توجه به قضیه ۳، لم زیر را می‌توان فوراً نتیجه گرفت.

لم ۱: فرض کنید $\{X_1, X_2, ...\}$ یک دنباله از متغیرهای تصادفی (نه لزوماً مستقل) باشند. آنگاه برای $i \leq j$ و $m - i \geq n - j$، داریم:

$$X_{i:m} \leq_{st} X_{j:n}.$$

برای جزئیات بیشتر در مورد نتایج فوق و آشنایی بهتر با ترتیب‌های تصادفی ارائه شده به شیکد و شانتیکومار (۲۰۰۷) مراجعه شود. در ادامه تعریف تابع نرخ خطر معکوس[۸] و مفهوم تابع وانی-شکل[۹] ارائه شده است. فرض کنید T متغیر تصادفی پیوسته با تابع توزیع F و تابع چگالی f باشد. تابع نرخ خطر معکوس T برابر است با:

$$r(t) = \frac{f(t)}{F(t)}.$$

تعریف ۶: تابع نرخ خطر معکوس $r(t)$ را وانی-شکل یا U-شکل گوییم، هرگاه وجود داشته باشد s_0، t_1 و t_2 ($0 \leq s_0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \infty$)، به طوری که

$$r(t) = \begin{cases} \text{اکیداً نزولی باشد}, & s_0 \leq t \leq t_1; \\ \text{ثابت باشد}, & t_1 \leq t \leq t_2; \\ \text{اکیداً صعودی باشد}, & t_2 \leq t, \end{cases}$$

که در آن t_1 و t_2 نقاط تغییر[۱۰] تابع $r(t)$ روی بازه $[s_0, \infty)$ هستند.

---
[۸] Reversed hazard rate function
[۹] Bathtub-shape
[۱۰] Change points

۳ سیستم‌های موازی شامل دو واحد تبادل‌پذیر

فرض کنید T_1 و T_2 طول عمرهای وابسته واحدهای یک سیستم موازی باشند، به طوری که $\mathbf{T}=(T_1,T_2)$ دارای تابع توزیع توام $F(t_1,t_2)$ و T_iها به ترتیب دارای تابع توزیع به طور مطلق پیوسته و تابع بقاء F_i و $\bar{F}_i$، $i=1,2$ باشند. آنگاه برای $0<x<t$ و تحت فرض تبادل‌پذیری T_1 و T_2، تابع قابلیت اعتماد متغیر تعمیم زمان از کار افتادگی سیستم برابر است با:

$$\begin{aligned}\psi(x|t) &= P(t-T_{1:2}>x|T_{2:2}\leq t)\\ &= \frac{2F(t-x,t)-F(t-x,t-x)}{F(t,t)}.\end{aligned} \qquad (2)$$

در این صورت میانگین زمان از کار افتادگی این سیستم عبارت است از

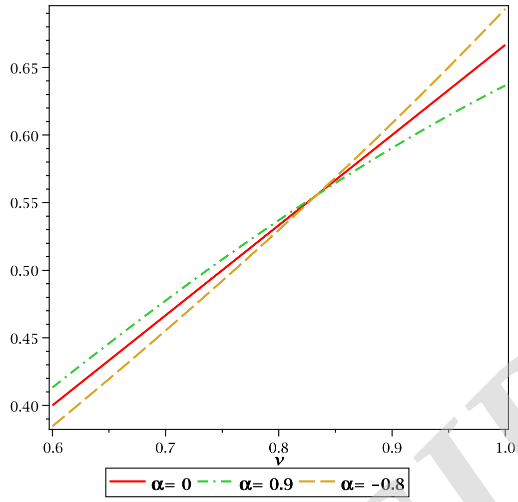
$$\Psi(t)=\int_0^t \psi(x|t)dx, \quad t>0.$$

برای یک سیستم موازی با دو واحد دلخواه، تابع قابلیت اعتماد $\{t-T_{1:2}|T_{2:2}\leq t\}$ از رابطه (۲) و با بکار بردن فرم تابع مفصل (۱)، به صورت

$$\psi^C(x|t)=\frac{2C(F_1(t-x),F_2(t))-C(F_1(t-x),F_2(t-x))}{C(F_1(t),F_2(t))}. \qquad (3)$$

حاصل می‌شود. با فرض تبادل‌پذیری T_1 و T_2 و همچنین تحت مدل دو متغیره FGM، با قرار دادن $u=F(t-x)$ و $v=F(t)$ در (۳)، تابع میانگین از کار افتادگی این سیستم برای $v\in[0,1]$، به صورت

$$\begin{aligned}\Psi^C(v) &= \int_0^v \psi^C\Big(F^{-1}(v)-F^{-1}(u),F^{-1}(v)\Big)du\\ &= \frac{1}{C(v,v)}\int_0^v \Big(2C(u,v)-C(u,u)\Big)du\\ &= \frac{20(1+\alpha)v^3-35\alpha v^4+14\alpha v^5}{30((1+\alpha)v^2-2\alpha v^3+\alpha v^4)},\end{aligned}$$



شکل ۱. منحنی‌های توابع MGIT سیستم موازی شامل دو واحد تبادل‌پذیر تحت مفصل FGM.

است، که در آن $C(u,v)$ تابع مفصل FGM است، یعنی

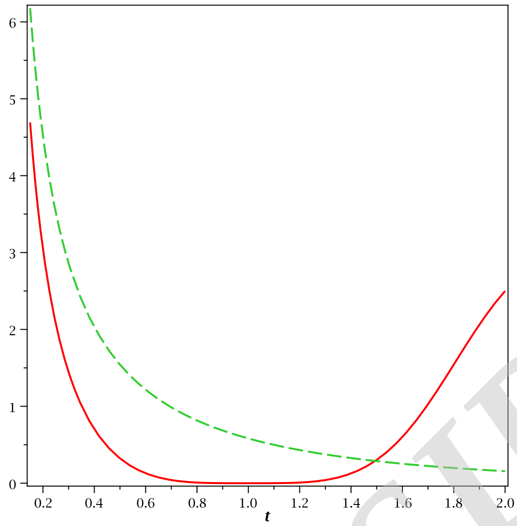
$$C(u,v) = uv(۱ + \alpha(۱-u)(۱-v)), \qquad u,v \in [۰,۱].$$

از آنجائی که تابع $\Psi^C(v)$ در بازه $[۰,۱]$ پیوسته است، مشتق آن وجود دارد و می‌توان نشان داد به ازای مقادیر $v \in [۰,۱]$ مثبت است. در نتیجه تابع $\Psi^C(v)$ در بازه $[۰,۱]$ صعودی است. نمودار این تابع برای مقادیر $\alpha = ۰, ۰/۹, -۰/۸$، در شکل ۱ رسم شده است.

برای مطالعه زمان از کار افتادگی سیستم‌های موازی شامل دو واحد وابسته، فرض کنید $T_۱$ و $T_۲$ دارای توزیع دومتغیره FGM باشند. با توجه به تعریف ۲، میانگین تعمیم زمان از کار افتادگی سیستم موازی با دو واحد تبادل‌پذیر به صورت

$$\begin{aligned}\Psi(t) &= \frac{۱}{F^۲(t)(۱+\alpha\bar{F}^۲(t))} \\ &\times \int_۰^t (۲F(t)F(x)[۱+\alpha\bar{F}(t)\bar{F}(x)] - F^۲(x)[۱+\alpha\bar{F}^۲(x)])dx \qquad (۴)\end{aligned}$$

است. در ادامه ویژگی‌های تابع MGIT بر اساس تابع MIT واحدهای تبادل‌پذیر تحت توزیع دومتغیره



شکل ۲. نمودار توابع نرخ خطر معکوس توزیع نمایی $\lambda = 1$ با خط‌چین و توزیع ارائه شده در مثال ۵ با خط ممتد.

FGM بررسی می‌شود.

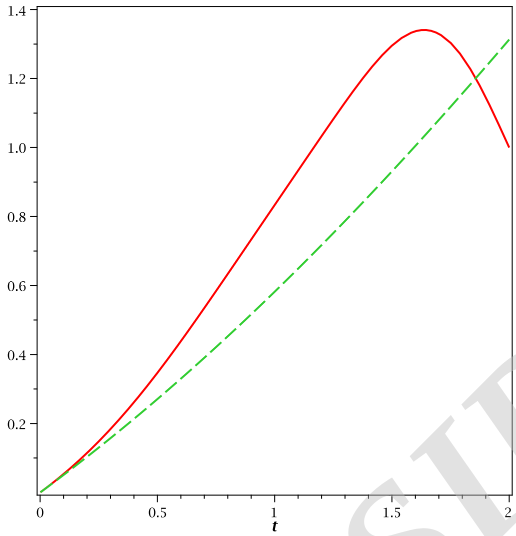
قضیه ۴: فرض کنید T_1 و T_2 دارای توزیع دومتغیره FGM با پارامتر $|\alpha| \le 1$ باشند. در این صورت میانگین زمان از کار افتادگی سیستم موازی با واحدهای تبادل‌پذیر، برای هر $t > 0$، عبارت است از

$$\Psi(t) = \frac{1}{(1+\alpha\bar{F}^2(t))}\Big[2M_1(t) - M_2(t) + 2\alpha\phi(t)\mu_1(t) - \frac{\alpha}{F^2(t)}\mu_2(t)\Big],$$

که در آن $\phi(t) = \frac{\bar{F}(t)}{F(t)}$ و $M_i(t)$، $i = 1, 2$، میانگین زمان از کار افتادگی یک سیستم موازی شامل i واحد مستقل است. بعلاوه برای $j = 1, 2$،

$$\mu_j(t) = \int_0^t \Big(F(x)\bar{F}(x)\Big)^j dx.$$

برهان: با توجه به تعریف مفصل FGM و با کمی محاسبات ساده اثبات کامل خواهد شد.



شکل ۳. نمودار توابع MIT برای توزیع نمایی $\lambda = ۱$ با خط‌چین و توزیع ارائه شده در مثال ۵ با خط ممتد.

مثال ۴: فرض کنید $T_۱$ و $T_۲$ طول عمرهای تبادل‌پذیر دو واحد یک سیستم موازی، دارای تابع توزیع توام FGM نمایی با پارامترهای $\lambda > ۰$ و $|\alpha| \leq ۱$ باشند. با استفاده از قضیه ۴، میانگین زمان از کار افتادگی این سیستم برای $t > ۰$ عبارت است از

$$\begin{aligned}\Psi(t) &= \frac{۱}{\lambda(۱+\alpha\bar{F}^{۲}(t))}\Big[۲\lambda M(t) - \frac{۲\lambda t - ۴F(t) + F(۲t)}{۲F^{۲}(t)} \\ &+ \alpha\Big(F(t)\bar{F}(t) - \frac{۶F(۲t) - ۸F(۳t) + ۳F(۴t)}{۱۲F(t)^{۲}}\Big)\Big],\end{aligned}$$

که در آن $M(t) = \frac{\lambda t - F(t)}{\lambda F(t)}$ میانگین زمان از کار افتادگی توزیع نمایی با میانگین $\frac{۱}{\lambda}$، و F و $\bar{F}$ به ترتیب توابع توزیع و بقاء توزیع نمایی مورد نظر است.

مثال ۵: فرض کنید $T_۱$ و $T_۲$ دارای توزیع توام دومتغیره FGM با پارامتر $|\alpha| \leq ۱$ و $T_۱$ و $T_۲$ هم‌توزیع

با تابع چگالی به صورت

$$f(t) = ۵(۱-t)^{۴}/۲, \qquad ۰ < t < ۲, \tag{۵}$$

باشند، برای $۰ < t < ۲$، تابع میانگین تعمیم زمان از کار افتادگی سیستم موازی شامل دو واحد وابسته با طول عمرهای $T_۱$ و $T_۲$ عبارت است از

$$\begin{aligned} \Psi(t) &= \frac{۱}{۴F^{۲}(t)(۱+\alpha\bar{F}^{۲}(t))}\Big(۲F^{۲}(t)[۴M(t)+\alpha\phi(t)(t-\delta(t,۱۱))] \\ &- t-\delta(t,۱۱)+۲\delta(t,۶)-\frac{\alpha}{۴}(t+\delta(t,۲۱)-۲\delta(t,۱۱))\Big), \end{aligned}$$

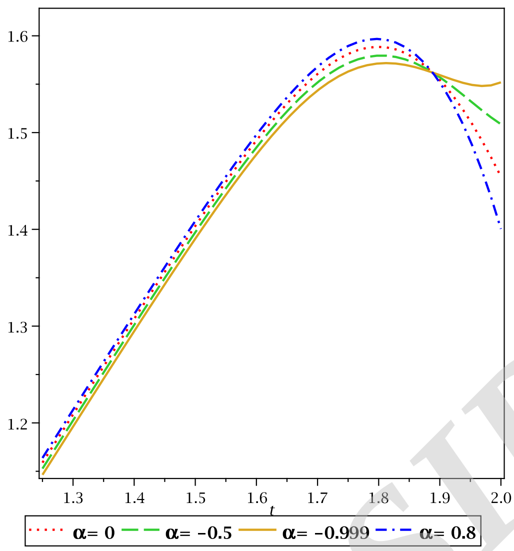
که در آن $\phi(t) = \frac{\bar{F}(t)}{F(t)}$، برای $n \in \mathbb{N}$،

$$\delta(n,t) = \frac{۱-(۱-t)^{n}}{n},$$

و $M(t) = \frac{۶t-۱+(۱-t)^{۶}}{۶(۱-(۱-t)^{۵})}$ تابع MIT طول عمر واحدها است.

تذکر ۱: صالحی و اسدی (۲۰۱۲) ثابت کردند هنگامی که تابع نرخ خطر معکوس یک متغیر تصادفی وانی-شکل باشد، آنگاه میانگین زمان از کارافتادگی این متغیر همانند شکل‌های ۲ و ۳ وارون وانی-شکل است. همچنین آنها با ارائه یک مثال عددی نشان دادند این ویژگی برای تابع MGIT سیستم $(n-k+۱)$ از n شامل واحدهای مستقل و غیر هم‌توزیع حفظ نمی‌شوند. بنابراین در اینجا انتظار داریم این ویژگی هنگامی که واحدها وابسته تبادل‌پذیر، بویژه وابسته هم‌توزیع، باشند نیز برقرار نباشد (شکل ۴).

توابع نرخ خطر معکوس و MIT متناظر با توزیع به فرم رابطه (۵)، در شکل‌های ۲ و ۳ رسم شده‌اند که به ترتیب وانی-شکل و وارون وانی-شکل هستند. همان طور که مشاهده می‌کنید منحنی‌های رسم شده در شکل ۴ نشان می‌دهد تابع MGIT سیستم موازی در مثال ۵ لزوماً وارون وانی-شکل نیست. در این شکل تابع MGIT سیستم موازی مربوط به توزیعی به فرم رابطه (۵) برای $\alpha = -۰/۹۹۹$، در ابتدا وارون وانی-شکل بوده اما پس از مدتی منحنی دارای روند افزایشی می‌شود.



شکل ۴. منحنی‌های توابع MGIT سیستم موازی شامل دو واحد همسان تحت توزیع توام FGM با توزیع حاشیه‌ای به فرم رابطه (۵) و مقادیر مختلف α.

۴ مقایسه تصادفی سیستم‌های $(n-k+۱)$ از n شامل واحدهای تبادل‌پذیر

فرض کنید سیستم قبل از زمان t از کار بیافتد. توانگر و اسدی (۲۰۱۵) تابع قابلیت اعتماد متغیر تصادفی تعمیم زمان از کار افتادگی سیستم $\{t - T_{r:n}|T_{k:n} \leq t\}$، $r = ۱, \ldots, k$، را با فرض تبادل‌پذیری واحدها به صورت

$$\psi^r_{k:n}(x|t) = P(t - T_{r:n} > x|T_{k:n} \leq t) = \frac{\sum_{i=k}^{n} \binom{n}{i} P\{A_i^{(t)}\} \bar{F}^{(i,t)}_{i-r+۱:i}(x)}{\sum_{i=k}^{n} \binom{n}{i} P\{A_i^{(t)}\}}, \qquad (۶)$$

ارائه کردند، که در آن

$$A_i^{(t)} = [T_۱ \leq t, \ldots, T_i \leq t, T_{i+۱} > t, \ldots, T_n > t],$$

و $\bar{F}^{(i,t)}_{i-r+1:i}(x)$، تابع بقاء $(i-r+1)$امین آماره ترتیبی بردار تصادفی $(t-T_1,\dots,t-T_i|A^{(t)}_i)$ است.

علاوه بر این، توانگر و اسدی (۲۰۱۵) با استفاده از اصل شمول و عدم شمول فرم دیگری برای تابع $\psi^r_{k:n}(x|t)$ به صورت

$$\psi^r_{k:n}(x|t)=\frac{\sum_{i=k}^{n}\sum_{j=r}^{i}\binom{n}{i}\binom{i}{j}p_{i,j}(x,t)}{\sum_{i=k}^{n}\binom{n}{i}p_i(t)}, \tag{7}$$

ارائه کردند، که در آن

$$p_i(t)=\sum_{j=0}^{i}(-1)^j\binom{i}{j}\bar{F}(\underbrace{t,\dots,t}_{n-i+j},\underbrace{0,\dots,0}_{i-j}),$$

و برای $j\le i$،

$$p_{i,j}(x,t)=\sum_{l_1=0}^{j}\sum_{l_2=0}^{i-j}(-1)^{l_1+l_2}\binom{j}{l_1}\binom{i-j}{l_2}\bar{F}(\underbrace{t-x,\dots,t-x}_{i-j+l_1-l_2},\underbrace{t,\dots,t}_{n-i+l_2},\underbrace{0,\dots,0}_{j-l_1}).$$

میانگین تعمیم زمان از کار افتادگی سیستم $(n-k+1)$ از n هم برای $t>0$ به صورت

$$\Psi^r_{k:n}(t)=E(t-T_{r:n}|T_{k:n}\le t),$$

تعریف می‌شود. در ادامه برخی ویژگی‌های میانگین تعمیم زمان از کار افتادگی، $\Psi^r_{k:n}(t)$ را ارائه می‌دهیم. ابتدا به مقایسه تابع MIGT براساس یک نمونه می‌پردازیم.

نتیجه ۱: فرض کنید $T_1,\dots,T_n$ متغیرهای تصادفی تبادل‌پذیر باشند. آنگاه برای $0<x<t$، داریم:

$$P(t-T_1>x|T_{n:n}\le t)=\frac{1}{n}\sum_{r=1}^{n}P(t-T_{r:n}>x|T_{n:n}\le t).$$

برهان: با استفاده از ویژگی‌های مربوط به آماره‌های ترتیبی متغیرهای تصادفی تبادل‌پذیر اثبات واضح

است.

قضیه ۵: فرض کنید $T_۱,\dots,T_n$ طول عمرهای تبادل‌پذیر واحدهای یک سیستم $(n-k+۱)$ از n باشند. اگر تابع چگالی احتمال توام متغیرهای تصادفی $T_۱,\dots,T_n$ دارای ویژگی MTP_2 باشد، آنگاه برای $t>۰$ و $۱\le \ell\le r\le k\le p\le n-۱$،

$$\Psi^{\ell}_{k:n-۱}(t)\ge \frac{n-k}{n}\Psi^{r}_{p:n}(t).$$

برهان: با استفاده از (۵,۴,۳) در دیوید و ناگاراجا (۲۰۰۳) داریم:

$$\begin{aligned} nP(T_{r:n-۱}\le t-x, T_{k:n-۱}\le t) &= rP(T_{r+۱:n}\le t-x, T_{k+۱:n}\le t)\\ &+ (k-r)P(T_{r:n}\le t-x, T_{k+۱:n}\le t)\\ &+ (n-k)P(T_{r:n}\le t-x, T_{k:n}\le t). \end{aligned}$$

با توجه به اینکه $F_{k:n-۱}(t)\le F_{k:n}(t)$ (ببینید لم ۱)، می توان نتیجه گرفت که برای $t>۰$،

$$P(T_{r:n-۱}\le t-x|T_{k:n-۱}\le t)\ge \frac{n-k}{n}P(T_{r:n}\le t-x|T_{k:n}\le t).$$

با به کار بردن قضیه‌های ۳ و ۴ در توانگر و اسدی (۲۰۱۵)، برای $\ell\le r$ و $k\le p$، داریم:

$$P(T_{\ell:n-۱}\le t-x|T_{k:n-۱}\le t)\ge \frac{n-k}{n}P(T_{r:n}\le t-x|T_{p:n}\le t).$$

با انتگرال‌گیری از ۰ تا t نسبت به x از نامساوی فوق اثبات کامل خواهد شد.

تذکر ۲: در قضیه ۵، اگر $p=n$ باشد، نتیجه قضیه همچنان برای $۱\le \ell\le r\le k<p\le n$ برقرار است.

نتیجه ۲: فرض کنید $T_۱,\dots,T_n$ متغیرهای تصادفی تبادل‌پذیر باشند و $T_{n+۱}$ مستقل از $T_۱,\dots,T_n$

باشد. آنگاه برای $0 < x < t$،

$$\tilde{\Psi}^r_{n+1:n+1}(t) \geq \frac{1}{n+1} \Psi^r_{n:n+1}(t),$$

که در آن $\tilde{\Psi}^r_{n+1:n+1}(t) = E\{t - T_{r:n} \leq t - x | T_{n+1:n+1} \leq t\}$.

برهان: با توجه به استقلال T_{n+1} و $(T_1, \ldots, T_n)$، به آسانی می‌توان نشان داد که

$$\{t - T_{r:n} \leq t - x | T_{n+1:n+1} \leq t\} =_{st} \{t - T_{r:n} \leq t - x | T_{n:n} \leq t\},$$

یعنی $\tilde{\Psi}^r_{n+1:n+1}(t) = \Psi^r_{n:n}(t)$. سپس با در نظر گرفتن یک سیستمی با $n+1$ واحد تبادل‌پذیر و قرار دادن $k = p = n$ در قضیه ۵، اثبات کامل خواهد شد.

توانگر و اسدی (۲۰۱۵) نشان دادند اگر $T_1, \ldots, T_n$ متغیرهای تصادفی تبادل‌پذیر و T_{n+1} مستقل از $(T_1, \ldots, T_n)$ باشد، متغیر شرطی $\{t - T_{r:n} | T_{k:n} \leq t\}$ برای r و kهای ثابت نسبت به n به طور تصادفی صعودی است. در ادامه نشان داده می‌شود که بدون فرض استقلال بین T_{n+1} و $(T_1, \ldots, T_n)$ نتیجه فوق برای سیستم‌های موازی برقرار است. یعنی ثابت می‌شود متغیر تعمیم زمان از کار افتادگی سیستم موازی $\{t - T_{r:n} | T_{n:n} \leq t\}$، با فرض تبادل‌پذیر بودن طول عمرهای $T_1, \ldots, T_n$، برای rهای ثابت نسبت به n به طور تصادفی صعودی است.

قضیه ۶: فرض کنید $T_1, \ldots, T_{n+1}$ متغیرهای تصادفی تبادل‌پذیر باشند. آنگاه برای $t > 0$،

$$\begin{aligned} \{t - T_{r+1:n+1} | T_{n+1:n+1} \leq t\} &\leq_{st} \{t - T_{r:n} | T_{n:n} \leq t\} \\ &\leq_{st} \{t - T_{r:n+1} | T_{n+1:n+1} \leq t\}. \end{aligned}$$

برهان: با توجه به رابطه (۶)، برای $0 < x < t$ داریم:

$$\psi^r_{n+1:n+1}(x|t) - \psi^r_{n:n}(x|t) = \bar{F}^{(n+1,t)}_{n-r+2:n+1}(x) - \bar{F}^{(n,t)}_{n-r+1:n}(x), \qquad (۸)$$

$$\psi^r_{n:n}(x|t) - \psi^{r+1}_{n+1:n+1}(x|t) = \bar{F}^{(n,t)}_{n-r+1:n}(x) - \bar{F}^{(n+1,t)}_{n-r+1:n+1}(x). \qquad (۹)$$

بنابر لم ۱، برای $0 < x < t$،

$$\begin{aligned} \bar{F}^{(n+1,t)}_{n-r+2:n+1}(x) &\geq \bar{F}^{(n,t)}_{n-r+1:n}(x), \\ \bar{F}^{(n,t)}_{n-r+1:n}(x) &\geq \bar{F}^{(n+1,t)}_{n-r+1:n+1}(x). \end{aligned}$$

بنابراین عبارت‌های (۸) و (۹) مثبت هستند و اثبات کامل است.

مثال ۶: فرض کنید طول عمرهای تبادل‌پذیر واحدها، $T_1, \dots, T_n$، دارای تابع توزیع توام FGM نمایی چند متغیره به صورت

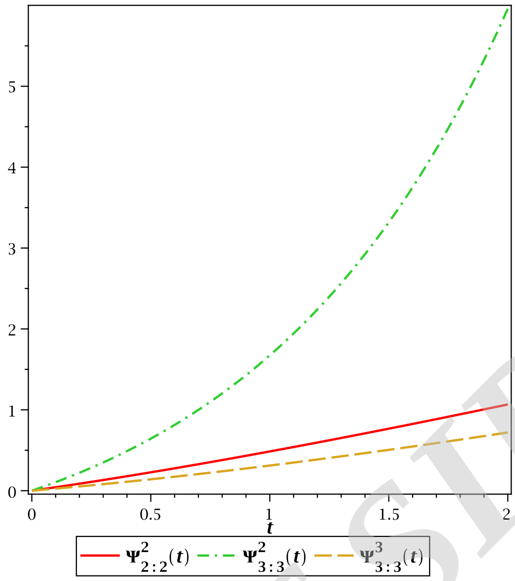
$$\begin{aligned} \bar{F}(t_1, \dots, t_n) &= 1 + \sum_{p=1}^{n} (-1)^p \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_p \leq n} \prod_{l=1}^{p} F_{i_l}(t) \\ &\quad \times \left[1 + \sum_{d=2}^{p} \sum_{1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_d \leq p} \alpha_{j_1 j_2 \dots j_d} \bar{F}_{j_1}(t) \dots \bar{F}_{j_d}(t) \right], \end{aligned}$$

باشند، که در آن $\{1, \dots, n\}$ $i_1, \dots, i_p \in$، $j_1, \dots, j_d \in \{i_1, \dots, i_p\}$ و $\lambda > 0$. در حالت خاص، فرض کنید $\alpha_{12} = \dots = \alpha_{12\dots n} = \alpha$ باشد. در این صورت اگر $n = 3$ آنگاه $\alpha \in [-\frac{1}{3}, \frac{1}{2}]$ (مانزی ۲۰۱۱). آنگاه با استفاده از رابطه (۷)، برای $0 < x < t$ داریم:

$$\begin{aligned} \psi^{2}_{3:3}(x|t) &= P(t - T_{2:3} | T_{3:3} \leq t) \\ &= \frac{2F(t-x, t-x, t) - F(t-x, t-x, t-x)}{F(t,t,t)}, \\ \psi^{2}_{2:2}(x|t) &= P(t - T_{2:2} | T_{2:2} \leq t) = \frac{F(t-x, t-x)}{F(t,t)}, \\ \psi^{3}_{3:3}(x|t) &= P(t - T_{3:3} | T_{3:3} \leq t) = \frac{F(t-x, t-x, t-x)}{F(t,t,t)}. \end{aligned}$$

به سادگی می‌توان نشان داد $\Psi^{2}_{3:3}(t) \geq \Psi^{2}_{2:2}(t) \geq \Psi^{3}_{3:3}(t)$ (شکل ۵).

قضیه ۷: فرض کنید S_1 و S_2 دو سیستم موازی به ترتیب شامل n و m واحد با طول عمرهای تبادل‌پذیر



شکل ۵. منحنی‌های تابع $\Psi^r_{n:n}(t)$، $n=۲,۳$ و $r=۲,۳$، برای $\alpha=۰/۲۵$ و $\lambda=۰/۵$ در مثال ۶.

$(T_۱,\ldots,T_n)$ و $(Z_۱,\ldots,Z_m)$ باشند. اگر

$$(T_۱,\ldots,T_q)\leq_{lr}(Z_۱,\ldots,Z_q),$$

که درآن $q=\min\{m,n\}$. آنگاه برای $t>۰$، $\ell\leq r$ و $m-r\geq n-\ell$،

$$\{t-Z_{r:m}|Z_{m:m}\leq t\}\leq_{st}\{t-T_{\ell:n}|T_{n:n}\leq t\}.$$

برهان: با توجه به $(T_۱,\ldots,T_q)\leq_{lr}(Z_۱,\ldots,Z_q)$ و با به کاربردن قضیه ۲ و سپس قضیه ۱، داریم:

$$\{t-Z_۱,...,t-Z_q|Z_۱\leq t,....,Z_q\leq t\}\leq_{st}\{t-T_۱,...,t-T_q|T_۱\leq t,...,T_q\leq t\}.$$

این رابطه را می‌توان به صورت

$$\{t-Z_1, ...t-Z_q | Z_{q:q} \leq t\} \leq_{st} \{t-T_1, ..., t-T_q | T_{q:q} \leq t\},$$

نیز نوشت. بعلاوه با به کاربردن قضیه ۳ نتیجه می‌شود که

$$\{t-Z_{r:q} | Z_{q:q} \leq t\} \leq_{st} \{t-T_{r:q} | T_{q:q} \leq t\}. \qquad (۱۰)$$

حال اگر $m \leq n$، آنگاه

$$\begin{aligned} \{t-Z_{r:m} | Z_{m:m} \leq t\} &\leq_{st} \{t-Z_{r:n} | Z_{n:n} \leq t\} \\ &\leq_{st} \{t-T_{r:n} | T_{n:n} \leq t\} \\ &\leq_{st} \{t-T_{l:n} | T_{n:n} \leq t\}, \end{aligned}$$

که در آن اولین و سومین نامساوی تصادفی با توجه به قضیه ۶ و دومین نامساوی تصادفی با توجه به رابطه (۱۰) برقرار است. همچنین اگر $m > n$، آنگاه

$$\begin{aligned} \{t-Z_{r:m} | Z_{m:m} \leq t\} &\leq_{st} \{t-T_{r:m} | T_{m:m} \leq t\} \\ &\leq_{st} \{t-T_{l:n} | T_{n:n} \leq t\}. \end{aligned}$$

اولین نامساوی تصادفی با توجه به رابطه (۱۰) و دومین نامساوی تصادفی با توجه به قضیه ۶ برقرار می‌باشد. بنابراین اثبات کامل می‌شود.

بحث و نتیجه‌گیری

در این مقاله به مطالعه تعمیم زمان از کار افتادگی سیستم‌های $(n-k+1)$ از n با واحدهای تبادل‌پذیر پرداخته شد. ابتدا فرم تابع MIGT برای سیستم‌های موازی با دو واحد تبادل‌پذیر بر اساس تابع مفصل FGM بدست آورده شد. سپس رفتار این تابع با ارائه نمودار بررسی شده و با مثال نقض نشان داده شد که

هرگاه تابع نرخ خطر معکوس طول عمر واحدهای وابسته تبادل‌پذیر وانی-شکل باشد، تابع MIGT سیستم وارون وانی-شکل نخواهد بود. با ارائه فرم بسته‌ای برای تابع قابلیت اعتماد تعمیم زمان از کار افتادگی یک سیستم $(n-k+1)$ از n با واحدهای تبادل‌پذیر، به مقایسه توابع MIGT این نوع سیستم‌ها بر اساس یک نمونه پرداخته شد. همچنین نشان داده شد که متغیر تصادفی تعمیم زمان از کار افتادگی سیستم موازی، $\{t-T_{r:n}|T_{n:n}\leq t\}$، برای rهای ثابت به طور تصادفی نسبت به n صعودی است. توجه داشته باشید که برای برقراری این نتیجه کافی است فقط شرط تبادل‌پذیر بودن واحدها وجود داشته باشد. بنابراین این نتیجه حالت کلی‌تری نسبت به قضیه ۵ توانگر و اسدی (۲۰۱۵) برای سیستم‌های موازی است. علاوه بر این، تعمیم زمان از کار افتادگی سیستم‌های $(n-k+1)$ از n بر اساس دو نمونه به طور تصادفی مقایسه شد. لازم بذکر است که بجز فرض تبادل‌پذیری هیچ فرضی و یا شرطی روی نوع ساختار وابستگی طول عمر واحدهای سیستم وجود ندارد، در حالی که رضاپور و همکاران (۲۰۱۳) تحت اینکه ساختار وابستگی طول عمر واحدها مفصل ارشمیدوسی باشد، نتایج‌شان را بدست آوردند. بنابراین، نتایج بخش ۴ بویژه قضیه‌های ۵-۷، از دیدگاه متفاوتی نسبت به نتایج زیر بخش ۳٫۱ رضاپور و همکاران (۲۰۱۳) بدست آمده است.

تقدیر و تشکر

نویسندگان مقاله از سردبیر و ویراستار محترم نشریه و داوران گرامی که نظرات و پیشنهادات ارزشمند ایشان باعث بهبود کیفیت مقاله گردید، صمیمانه کمال تشکر و قدردانی را دارند.

مراجع

Asadi, M. (2006), On the Mean Past Lifetime of the Components of Parallel System, *Journal of Statistical Planning and Inference*, **136**, 1197-1206.

Asadi, M. and Bairamov, I. (2006), The Mean Residual Life Function of k-Out-of-n Structure at the System Level, *IEEE Transactions on Reliability*, **55**, 314-318.

Bairamov, I. G. and Kotz, S. (2002), Dependence Structure and Symmetry of Huang-Kotz FGM Distribution and Their Extensions, *Metrika*, **56**, 55-72.

David, H. A. and Nagaraja, H. N. A. (2003), *Order Statistics*, New York: John Wiley.

Farlie, D. G. J. (1960), The Performance of Some Correlation Coefficients for a General Bivariate Distribution, *Biometrika*, **47**, 307-323.

Gumbel, E. J. (1960), Bivariate Exponential Distributions, *Journal of the American Statistical Association*, **55**, 698-707.

Huang, J. S. and Kotz, S. (1984), Correlation Structure in Iterated Farlie-Gumbel-Morgenstern Distribution, *Biometrika*, **71**, 633-636.

Jia, X., Wang, L. and Wei, C. (2014), Reliability Research of Dependent Failure System Using Copula, *Communications in Statistics - Simulation and Computation*, **43**, 1838-1851.

Johnson, N. and Kotz, S. (1975), On Some Generalized Fairle-Gumbel-Morgenstern Distribution, *Communications in Statistics - Theory and Methods*, **4**, 415-427.

Khaledi, B-E. and Shaked, M. (2007), Ordering Conditional Lifetime of Coherent Systems, *Journal of Statistical Planning and Inference*, **137**, 1173-1184.

Kochar, S. and Xu, M. (2010), On the Residual Lifetimes of k-Out-of-n Systems with Nonidentical Components, *Probability in the Engineering and Informational Sciences*, **24**, 109-124.

Kotz, S. and Lai, C. D. and Xie, M. (2003), On the Effect of Redundancy for Systems with Dependent Components, *IIE Transactions*, **35**, 1103-1110.

Li, X. and Zhang, Z. (2008), Some Stochastic Comparisons of Conditional Coherent Systems, *Applied Stochastic Models in Business and Industry*, **24**, 541-549.

Li, X. and Zhao, P. (2008), Stochastic Comparisons on General Inactivity Time and General Residual Life of k-Out-of-n Systems, *Communications in Statistics - Simulation and Computation*, **37**, 1005-1019.

Morgenstern, D. (1956), Einfache Beispiele Zweidimensionaler Verteilungen. *Mitteilungsblatt für Mathematische Statistik*, **8**, 234-235.

Navarro, J. and Gomis, M. C. (2015), Comparison in the Mean Residual Life Order of Coherent Systems with Identically Distributed Components, *Applied Stochastic Models in Business and Industry*, **32**, 33-47.

Navarro, J. and Rubio, R. (2011), A Note on Neccessary and Sufficient Condit.ions for Ordering Properties of Coherent Systems with Exchangable Components, *Naval Research Logistics*, **58**, 478 -489.

Navarro, J. and Spizzichino, F. (2010), Comparison of Series and Parallel Systems with Components Sharing the Some Copula, *Applied Stochastic Models in Business and Industry*, **26**, 775-791.

Navarro, J., Ruiz, J. M. and Sandoval, C. J. (2007), Properties of Coherent Systems with Dependent Components, *Communications in Statistics - Theory and Methods*, **36**, 175-191.

Nelsen, R. B. (2006), *An Introduction to Copula*, New York: Springer.

Rezapour, M., Salehi, E. T. and Alamatsaz, M. H. (2013), Stochastic Comparisons of Residual and Past Lifetimes of *(n-k+1)*-Out-of-n Systems with Dependent Components, *Communications in Statistics - Theory and Methods*, **42**, 2185-2199.

Sadegh, M. K. (2011), A Note on the Mean Residual Life Function of a Coherent System with Exchanable or Nonidentical Components, *Journal of Statistical Planning and Inference*, **141**, 3267-3275.

Salehi, E. T. and Asadi, M. (2012), Results on the Past Lifetime of *(n-k+1)*-Out-of-n Structure with Nonidentical Components, *Metrika*, **75**, 439-454.

Salehi, E. and Hashemi-Bosra, S. S. (2017), The Mean General Residual Lifetime of *(n-k+1)*-Out-of-n Systems with Exchangeable Components, *Communications in Statistics - Theory and Methods*, **46**, 6382-6400.

Shaked, M. and Shanthikumar, J. G. (2007), *Stochastic Orders*, New York: Springer.

Tavangar, M. (2016), Conditional Inactivity Time of Components in a Coherent Operating System, *IEEE Transactions on Reliability*, **65**, 359-369.

Tavangar, M. and Asadi, M. (2010), A Study on the Mean Past Lifetime of the Components of *(n-k+1)*-Out-of-n System at the Level System, *Metrika*, **72**, 59-73.

Tavangar, M. and Asadi, M. (2015), The Inactivity Time of Exchangable Components of k-Out-of-n Structure, *Sankhya*, **77**, 141-164.

Zhang, Z. (2010), Ordering Conditional General Coherent Systems with Exchangable Components, *Journal of Statistical Planning and Inference*, **140**, 454-460.

Zhao, P. Li, X. and Balakerishnan, N. (2008), Conditional Ordering of k-Out-of-n Systems with Independent But Non-identical Components, *Journal of Applied Probability*, **45**, 1113-1125.