مجله علوم آماری، پاییز و زمستان ۱۳۹۶
جلد ۱۱، شماره ۲، ص ۲۰۷ – ۲۱۷
DOI: 10.18869/acadpub.jss.11.2.207

کران‌های بالایی و پائینی برای انتگرال‌های میانگین مربعِ تصادفی

حمزه آگاهی

گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه صنعتی نوشیروانی بابل

تاریخ دریافت: ۱۳۹۴/۱۲/۱۴ تاریخ آخرین بازنگری: ۱۳۹۶/۴/۲۷

چکیده: فرایندهای تصادفی در آمار و احتمال از اهمیت زیادی برخوردار هستند، به طوری که پیدا کردن کران‌های بالایی و پائینی برای انتگرال‌های میانگین مربعِ تصادفی به یک مسئله اساسی منجر شده است. در این مقاله نشان داده می‌شود که برای فرایندهای تصادفی میانگین مربع مشتق‌پذیر، شرط تحدب در نتایج مشهور گذشته را می توان با شرایط ضعیف‌تر جایگزین کرد.

واژه‌های کلیدی: فرایندهای تصادفی، انتگرال‌های میانگین مربعِ تصادفی، میانگین مربع مشتق‌پذیر.

۱ مقدمه

کاربرد فرایندهای تصادفی در آمار و احتمال بر کسی پوشیده نیست. ازجمله فرایندهای تصادفی که امروزه مورد توجه بسیاری از محققین قرارگرفته است، فرایندهای تصادفی محدب است. در این بخش مفاهیم مقدماتی در حوزه انتگرال‌های میانگین مربعِ تصادفی و فرایندهای تصادفی محدب بیان می‌شوند. نمادهای به‌کار رفته در این بخش از منابع شاکد و همکاران (۱۹۸۸)، سوبسزیک (۱۹۹۱) و اسکورنسکی (۱۹۹۲) مستخرج شده‌اند.

تعریف ۱: فرض کنید $X : I \times \Omega \to \mathbb{R}$ یک فرایند تصادفی باشد به طوری که برای هر $t \in I$، $E[X^2(t,\cdot)] < \infty$ که در آن $E[X(t,\cdot)]$ امید ریاضی فرایند تصادفی $X(t,\cdot)$ است.
الف) متغیر تصادفی $Y : \Omega \to \mathbb{R}$ نسبت به X، میانگین مربع انتگرال‌پذیر تصادفی[1] روی $[a,b] \subset I$

آدرس الکترونیکی نویسنده مسئول مقاله: حمزه آگاهی، h_agahi@nit.ac.ir

کد موضوع‌بندی ریاضی (۲۰۱۰): 60G05، 60E15

[1] mean-square stochastic integrable

Archive of SID

www.SID.ir

نامیده می‌شود هرگاه برای هر دنباله‌ای از دیوارک‌ها در بازه $[a, b]$ مانند

$$a = t_۰ < t_۱ < \cdots < t_n = b$$

و برای هر $\Theta_k \in [t_{k-۱}, t_k]$، $k = ۱, ..., n$،

$$\lim_{n \to \infty} E[(\sum_{k=۱}^{n} X(\Theta_k, \cdot)(t_k - t_{k-۱}) - Y)^۲] = ۰.$$

آنگاه می‌نویسیم:

$$Y(\cdot) \stackrel{\text{a.e.}}{=} \int_a^b X(s, \cdot) ds.$$

ب) فرایند تصادفی X میانگین مربع مشتق‌پذیر[۲] در بازه I نامیده می‌شود اگر یک فرایند تصادفی X' (به‌اختصار مشتق X) وجود داشته باشد به طوری که برای هر $t_۰ \in I$،

$$\lim_{t \to t_۰} E[\frac{X(t, \cdot) - X(t_۰, \cdot)}{t - t_۰} - X'(t_۰, \cdot)]^۲ = ۰.$$

ج) فرایند تصادفی X میانگین مربع پیوسته[۳] در بازه I نامیده می‌شود اگر برای هر $t_۰ \in I$،

$$\lim_{t \to t_۰} E[(X(t, \cdot) - X(t_۰, \cdot))^۲] = ۰.$$

د) فرایند تصادفی X دو بار میانگین مربع مشتق‌پذیر[۴] در بازه I نامیده می‌شود اگر یک فرایند تصادفی X'' (به‌اختصار مشتق دوم X) وجود داشته باشد به‌طوری‌که برای هر $t_۰ \in I$،

$$\lim_{t \to t_۰} E[\frac{X'(t, \cdot) - X'(t_۰, \cdot)}{t - t_۰} - X''(t_۰, \cdot)]^۲ = ۰.$$

تعریف ۲ (نیکودم، ۱۹۸۰): فرایند تصادفی $X : I \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ محدب نامیده می‌شود هرگاه برای هر

[2] mean-square differentiable
[3] mean-square continuous
[4] twice mean-square differentiable

Archive of SID

www.SID.ir

$\lambda \in [0,1]$ و $a, b \in I$، نابرابری زیر برقرار باشد:

$$X(\lambda a + (1-\lambda)b, \cdot) \overset{\text{a.e.}}{\leqslant} \lambda X(a,\cdot) + (1-\lambda)X(b,\cdot). \qquad (1)$$

اگر در نابرابری (۱)، $\lambda = \frac{1}{2}$، آنگاه X را جنسن- محدب[5] نامیده می‌شود.

تذکر ۱: الف) اگر X جنسن-محدب، میانگین-مربع پیوسته باشد، آنگاه X محدب است.
ب) فرض کنید $X : I \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ یک فرایند تصادفی دو بار میانگین مربع مشتق‌پذیر در بازه I باشد. فرایند تصادفی X در بازه I محدب است اگر و تنها اگر برای هر $t \in I$،

$$X''(t,\cdot) \geq 0 \quad \text{(a.e.)}.$$

ج) فرض کنید X یک فرایند تصادفی میانگین مربع مشتق‌پذیر در بازه I باشد. فرایندهای تصادفی X در بازه I محدب است اگر و تنها اگر X' در بازه I نانزولی باشد. توجه کنید X' در بازه I نانزولی است هرگاه برای هر $t, s \in I$ اگر $t < s$، آنگاه

$$X'(t,\cdot) \leq X'(s,\cdot) \quad \text{(a.e.)}.$$

جدیداً کوتریس (۲۰۱۲،۲۰۱۳) و سپس آگاهی (۲۰۱۵) کران‌های بالایی و پائینی برای انتگرال‌های میانگین مربعِ تصادفی ارائه شده در تعریف ۱ بر پایه فرایندهای تصادفی محدب را با استفاده از نابرابری هرمیت-هادامارد[6] به صورت زیر ارائه داده‌اند:

قضیه ۱: (کوتریس، ۲۰۱۲) فرض کنید $X : I \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ یک فرایند تصادفی جنسن-محدب، میانگین-مربع پیوسته در بازه I باشد. آنگاه به ازای هر $a, b \in I$، نابرابری هرمیت-هادامارد

$$X(\frac{a+b}{2},\cdot) \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b X(t,\cdot)dt \leqslant \frac{X(a,\cdot)+X(b,\cdot)}{2} \quad \text{(a.e.)} \qquad (2)$$

برقرار است.

---
[5] Jensen-convex
[6] Hermite-Hadamard inequality

Archive of SID

قضیه ۲: (آگاهی، ۲۰۱۵) فرض کنید $X : I \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ یک فرایند تصادفی جنسن-محدب، میانگین-مربع پیوسته در بازه I باشد. آنگاه به ازای هر $a, b \in I$ و هر $\lambda \in [۰, ۱]$، نابرابری

$$\ell(\lambda) \leqslant \frac{۱}{b-a} \int_a^b X(t,\cdot)dt \leqslant L(\lambda) \quad \text{(a.e.)}$$

برقرار است، که در آن

$$\ell(\lambda) := \lambda X(\frac{\lambda b + (۲-\lambda)a}{۲}, \cdot) + (۱-\lambda) X(\frac{(۱+\lambda)b + (۱-\lambda)a}{۲}, \cdot)$$

و

$$L(\lambda) := \frac{۱}{۲}[X(\lambda b + (۱-\lambda)a, \cdot) + \lambda X(a,\cdot) + (۱-\lambda)X(b,\cdot)].$$

تذکر ۲: با قرار دادن $\lambda = ۱$ (یا $\lambda = ۰$) در قضیه ۲، قضیه ۱ به دست می‌آید. لازم به ذکر است که به ازای $۰ < \lambda < ۱$ کران‌های ارائه شده در قضیه ۲ از کران‌های قضیه ۱ بهتر هستند.

با توجه به قضیه ۱ و تذکر ۱ (الف)، شرط تحدب فرایند تصادفی X در این قضیه لازم به نظر می‌رسد. در این مقاله ابتدا در بخش ۲ و در قضیه‌های ۳ و ۴ نشان داده می‌شود که با تذکر ۱ (قسمت‌های ب و ج) در فرایندهای تصادفی میانگین مربع مشتق‌پذیر، می‌توان شرط تحدب را با شرط‌های دیگری جایگزین کرد. قضیه ۳ نشان می‌دهد که برای فرایندهای تصادفی میانگین مربع مشتق‌پذیر، شرط تحدب را می توان با شرط ضعیف‌تر

$$X'(b+a-t,\cdot) \geq X'(t,\cdot) \quad \text{(a.e.)} \tag{۳}$$

برای هر $t \in [a, \frac{a+b}{۲}]$ عوض کرد. واضح است که اگر فرایند تصادفی X محدب باشد، آنگاه طبق نکته ۱ (قسمت ج) X' در بازه I نانزولی است و بنابراین شرط (۳) برقرار است. طبق تذکر ۱ (ب) برای فرایندهای تصادفی میانگین مربع دو بار مشتق‌پذیر، طبیعی است که برای هر $t \in I$،

$$X''(t,\cdot) \geq ۰ \quad \text{(a.e.)}.$$

در قضیه ۴ نشان داده می‌شود چنانچه X یک فرایند تصادفی میانگین مربع دو بار مشتق‌پذیر باشد فقط

Archive of SID

www.SID.ir

کران‌داری $X''(t,\cdot)$ در بازه $[a,b]$ لازم است. در این قضیه لزومی به تحدب X یعنی نامنفی بودن $X''(t,\cdot)$ نیست.

۲ نتایج اصلی

قضیه ۳: اگر $X : I\times\Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ یک فرایند تصادفی میانگین مربع مشتق‌پذیر در بازه I باشد به‌طوری‌که برای هر $t\in[a,\frac{a+b}{۲}]$ که $a,b\in I$، در شرط

$$X'(b+a-t,\cdot)\geq X'(t,\cdot)\ \text{(a.e.)} \tag{۴}$$

صدق کند، آنگاه

$$X(\frac{a+b}{۲},\cdot)\leqslant\frac{۱}{b-a}\int_a^b X(t,\cdot)dt\leqslant\frac{X(a,\cdot)+X(b,\cdot)}{۲}\quad\text{(a.e.)}. \tag{۵}$$

برهان. طبق خواص اولیه‌ی انتگرال‌های میانگین مربعِ تصادفی تساوی

$$\frac{۱}{b-a}\int_a^b X(t,\cdot)dt=\frac{۱}{b-a}\int_a^b X(a+b-t,\cdot)dt\quad\text{(a.e.)}$$

برقرار است. سپس

$$\frac{۱}{b-a}\int_a^b X(t,\cdot)dt=\frac{۱}{۲(b-a)}\int_a^b [X(t,\cdot)+X(a+b-t,\cdot)]dt\quad\text{(a.e.)}. \tag{۶}$$

در نتیجه

$$\begin{aligned}&\frac{۱}{b-a}\int_a^b X(t,\cdot)dt-X(\frac{a+b}{۲},\cdot)\\&=\frac{۱}{۲(b-a)}\int_a^b [X(t,\cdot)+X(a+b-t,\cdot)-۲X(\frac{a+b}{۲},\cdot)]dt\quad\text{(a.e.)}.\end{aligned} \tag{۷}$$

Archive of SID

www.SID.ir

ازآنجا که $[X(t,\cdot)+X(a+b-t,\cdot)-۲X(\frac{a+b}{۲},\cdot)]$ حول نقطه $t=\frac{a+b}{۲}$ متقارن است، داریم

$$\begin{aligned}&\frac{۱}{b-a}\int_a^b[X(t,\cdot)+X(a+b-t,\cdot)-۲X(\frac{a+b}{۲},\cdot)]dt\\&=\frac{۲}{b-a}\int_a^{\frac{a+b}{۲}}[X(t,\cdot)+X(a+b-t,\cdot)-۲X(\frac{a+b}{۲},\cdot)]dt\quad\text{(a.e.)}.\end{aligned}$$

بنابراین

$$\begin{aligned}&\frac{۱}{b-a}\int_a^b X(t,\cdot)dt-X(\frac{a+b}{۲},\cdot)\\&=\frac{۱}{b-a}\int_a^{\frac{a+b}{۲}}[X(t,\cdot)+X(a+b-t,\cdot)-۲X(\frac{a+b}{۲},\cdot)]dt.\ \text{(a.e.)}\end{aligned}\qquad(۸)$$

از طرفی

$$X(a+b-t,\cdot)-X(\frac{a+b}{۲},\cdot)=\int_{\frac{a+b}{۲}}^{a+b-t}X'(s,\cdot)ds\quad\text{(a.e.)}\qquad(۹)$$

و همچنین

$$X(\frac{a+b}{۲},\cdot)-X(t,\cdot)=\int_t^{\frac{a+b}{۲}}X'(s,\cdot)ds\quad\text{(a.e.)}.\qquad(۱۰)$$

با استفاده از روابط (۹) و (۱۰) داریم

$$\begin{aligned}&X(t,\cdot)+X(a+b-t,\cdot)-۲X(\frac{a+b}{۲},\cdot)\\&=\int_{\frac{a+b}{۲}}^{a+b-t}X'(s,\cdot)ds-\int_t^{\frac{a+b}{۲}}X'(s,\cdot)ds\\&=\int_t^{\frac{a+b}{۲}}X'(a+b-s,\cdot)ds-\int_t^{\frac{a+b}{۲}}X'(s,\cdot)ds\\&=\int_t^{\frac{a+b}{۲}}[X'(a+b-s,\cdot)-X'(s,\cdot)]ds\quad\text{(a.e.)}.\end{aligned}\qquad(۱۱)$$

Archive of SID

www.SID.ir

سرانجام با استفاده (۱۱)، (۸)، و (۴) داریم

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{b-a}\int_a^b X(t,\cdot)dt - X(\frac{a+b}{2},\cdot)\\
&= \frac{1}{b-a}\int_a^{\frac{a+b}{2}} [X(t,\cdot)+X(a+b-t,\cdot)-2X(\frac{a+b}{2},\cdot)]dt\\
&= \frac{1}{b-a}\int_a^{\frac{a+b}{2}}\int_t^{\frac{a+b}{2}} [X'(a+b-s,\cdot)-X'(s,\cdot)]dsdt\\
&\geq 0 \ \ \text{(a.e.)}. \qquad (12)
\end{aligned}$$

که سمت چپ نابرابری (۵) را اثبات می‌کند. اکنون برای اثبات نابرابری سمت راست (۵) با استفاده از (۶)، داریم

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{b-a}\int_a^b X(t,\cdot)dt - \frac{X(a,\cdot)+X(b,\cdot)}{2} \qquad (13)\\
&= \frac{1}{2(b-a)}\int_a^b [X(t,\cdot)+X(a+b-t,\cdot)-(X(a,\cdot)+X(b,\cdot))]dt \quad \text{(a.e.)}.
\end{aligned}$$

با توجه به اینکه $X(t,\cdot)+X(a+b-t,\cdot)-(X(a,\cdot)+X(b,\cdot))$ حول $x=\frac{a+b}{2}$ متقارن است، آنگاه

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{b-a}\int_a^b X(t,\cdot)dt - \frac{X(a,\cdot)+X(b,\cdot)}{2} \qquad (14)\\
&= \frac{1}{b-a}\int_a^{\frac{a+b}{2}} [X(t,\cdot)+X(a+b-t,\cdot)-(X(a,\cdot)+X(b,\cdot))]dt \ \text{(a.e.)}.
\end{aligned}$$

از طرفی

$$\begin{aligned}
&X(b,\cdot)-X(a+b-t,\cdot) = \int_{a+b-t}^b X'(s,\cdot)ds \quad \text{(a.e.)},\\
&X(t,\cdot)-X(a,\cdot) = \int_a^t X'(s,\cdot)ds \quad \text{(a.e.)}.
\end{aligned}$$

Archive of SID

در این صورت

$$
\begin{aligned}
&X(t,\cdot)+X(a+b-t,\cdot)-(X(a,\cdot)+X(b,\cdot))\\
&=\int_a^t X'(s,\cdot)ds-\int_{a+b-t}^b X'(s,\cdot)ds\\
&=\int_a^t X'(t,\cdot)dt-\int_a^t X'(a+b-s,\cdot)ds\\
&=-\int_a^t [X'(a+b-s,\cdot)-X'(s,\cdot)]ds \quad \text{(a.e.)}. \qquad (۱۵)
\end{aligned}
$$

با استفاده از (۱۵)، (۱۴) و (۴) داریم

$$
\begin{aligned}
&\frac{۱}{(b-a)}\int_a^b X(t,\cdot)dt-\frac{X(a,\cdot)+X(b,\cdot)}{۲}\\
&=\frac{۱}{(b-a)}\int_a^{\frac{a+b}{۲}}[X(t,\cdot)+X(a+b-t,\cdot)-(X(a,\cdot)+X(b,\cdot))]dt\\
&=\frac{۱}{(b-a)}\int_a^{\frac{a+b}{۲}}\int_a^t -[X'(a+b-s,\cdot)-X'(s,\cdot)]dsdt\\
&\leq \circ \quad \text{(a.e.)}
\end{aligned}
$$

که اثبات را تکمیل می‌کند.

قضیه ۴: فرض کنید $X: I\times\Omega\longrightarrow\mathbb{R}$ یک فرایند تصادفی دو بار میانگین مربع مشتق‌پذیر در بازه I باشد. اگر برای هر $a,b\in I$، $X''(t,\cdot)$ در بازه $[a,b]$ از پایین کران‌دار باشد، آنگاه

$$
\begin{aligned}
X(\frac{a+b}{۲},\cdot)+\frac{۱}{۲۴}m(a-b)^۲ &\leq \frac{۱}{b-a}\int_a^b X(t,\cdot)dt\\
&\leq \frac{X(a,\cdot)+X(b,\cdot)}{۲}-\frac{۱}{۱۲}m(a-b)^۲ \ \text{(a.e.)}, \qquad (۱۶)
\end{aligned}
$$

که در آن $m=\inf_{t\in[a,b]}X''(t,\cdot)$.

برهان. طبق خواص اولیه انتگرال‌های میانگین مربعِ تصادفی، داریم

$$X'(a+b-t,\cdot)-X'(t,\cdot)=\int_t^{a+b-t}X''(s,\cdot)ds \quad \text{(a.e.)}.$$

Archive of SID

www.SID.ir

پس به ازای $t \in [a, \frac{a+b}{2}]$ و با استفاده از شرط کران‌داری داریم

$$m(a+b-2t) \leq X^{'}(a+b-t,\cdot) - X^{'}(t,\cdot) \quad \text{(a.e.)}.$$

در این صورت با استفاده از رابطه (۱۱) نابرابری

$$\int_t^{\frac{a+b}{2}} m(a+b-2s)ds \leq X(t,\cdot) + X(a+b-t,\cdot) - 2X(\frac{a+b}{2},\cdot) \quad \text{(a.e.)}$$

حاصل می‌شود. در نتیجه

$$m(\frac{a+b}{2}-t)^2 \leq X(t,\cdot) + X(a+b-t,\cdot) - 2X(\frac{a+b}{2},\cdot) \quad \text{(a.e.)}$$

و سرانجام با استفاده از رابطه (۸) داریم

$$\frac{m}{b-a}\int_a^{\frac{a+b}{2}} (\frac{a+b}{2}-t)^2 dt \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b X(t,\cdot)dt - X(\frac{a+b}{2},\cdot) \quad \text{(a.e.)}.$$

بنابراین

$$X(\frac{a+b}{2},\cdot) + \frac{1}{24}m(a-b)^2 \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b X(t,\cdot)dt \quad \text{(a.e.)}$$

و سمت چپ نابرابری (۱۶) حاصل می‌گردد. از طرفی

$$X^{'}(a+b-t,\cdot) - X'(t,\cdot) = \int_t^{a+b-t} X^{''}(s,\cdot)ds \quad \text{(a.e.)}.$$

پس به ازای $t \in [a, \frac{a+b}{2}]$، با استفاده از شرط کران‌داری داریم

$$m(a+b-2t) \leq X'(a+b-t,\cdot) - X'(t,\cdot) \quad \text{(a.e.)}.$$

Archive of SID

www.SID.ir

با استفاده از (۱۵) رابطه

$$X(t,\cdot)+X(a+b-t,\cdot)-(X(a,\cdot)+X(b,\cdot)) \leq -\int_a^t m(a+b-2s)ds \quad \text{(a.e.)}$$

برقرار است. در نتیجه

$$X(t,\cdot)+X(a+b-t,\cdot)-(X(a,\cdot)+X(b,\cdot)) \leq -m(t-a)(b-t) \quad \text{(a.e.)}.$$

با استفاده از رابطه (۱۴)

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b X(t,\cdot)dt - \frac{X(a,\cdot)+X(b,\cdot)}{2} \leq \frac{-m}{b-a}\int_a^{\frac{a+b}{2}} (t-a)(b-t)dt \text{ (a.e.)}. \quad (17)$$

بنابراین

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b X(t,\cdot)dt \leq \frac{X(a,\cdot)+X(b,\cdot)}{2} - \frac{1}{12}m(a-b)^2 \text{ (a.e.)} \qquad (18)$$

که اثبات را تکمیل می‌کند.

بحث و نتیجه‌گیری

در این مقاله نتایج جدیدی برای انتگرال‌های میانگین مربعِ تصادفی ارائه شد. قضیه ۳ برای فرایند تصادفی میانگین مربع مشتق‌پذیر، شرط تحدب در قضیه ۱ را با شرط ضعیف‌تر جایگزین کرد. همچنین قضیه ۴ برای فرایندهای تصادفی در حالتی که $X''(t,\cdot)$ در بازه $[a,b]$ از پایین کران‌دار است، بیان شد که با توجه به تذکر ۱ (قسمت ب) برای فرایندهای تصادفی دو بار میانگین مربع مشتق‌پذیر در حالتی که $m>0$ در نظر گرفته شود، کران‌هایی بهتر از کران‌های ارائه شده توسط [۴] ارائه می‌کند.

Archive of SID

www.SID.ir

تقدیر و تشکر

نویسنده مقاله از نظرات و پیشنهادات داوران ، هیئت تحریریه و ویراستار مجله علوم آماری که باعث ارتقای مقاله شد، کمال تشکر و قدردانی را دارد.

مراجع

Shaked, M., Shanthikumar, J. G. (1988), Stochastic Convexity and its Applications, *Advances in Applied Probability*, **20**, 427-446.

Sobczyk, K. (1991), *Stochastic Differential Equations with Applications to Physics and Engineering*, Kluwer, Dordrecht.

Agahi, H. (2016), Refinements of Mean-square Stochastic Integral Inequalities on Convex Stochastic Processes, *Aequationes mathematicae*, **90** (4) 765-772.

Kotrys, D. (2012), Hermite–Hadamard Inequality for Convex Stochastic Processes, *Aequationes Mathematicae*, **83**, 143-151.

Kotrys, D. (2013), Remarks on Strongly Convex Stochastic Processes, *Aequationes Mathematicae*, **86**, 91-98.

Nikodem, K. (1980), On Convex Stochastic Processes, *Aequationes Mathematicae*, **20**, 184-197.

Skowroński, A. (1992), On Some Properties of J-convex Stochastic Processes, *Aequationes Mathematicae*, **44**, 249-258.

Archive of SID

www.SID.ir