مجله علوم آماری، پاییز و زمستان ۱۳۹۶
جلد ۱۱، شماره ۲، ص ۳۵۷ – ۳۷۹
DOI: 10.18869/acadpub.jss.11.2.357

برآورد تابع‌های چگالی احتمال و توزیع تجمعی توزیع بتا وایبول هندسی

شهرام یعقوب‌زاده شهرستانی

گروه آمار، دانشگاه پیام نور تهران

تاریخ دریافت: ۱۳۹۵/۹/۲۴ تاریخ آخرین بازنگری: ۱۳۹۶/۱۱/۲۱

چکیده: در این مقاله برآوردهای ماکسیمم درستنمایی، نااریب با کمترین واریانس به طور یکنواخت، صدکی، بهترین برآورد صدکی تک–مشاهده‌ای در خانواده برآوردهای صدکی تک–مشاهده‌ای و بهترین برآورد صدکی دو–مشاهده‌ای در خانواده برآوردهای صدکی دو–مشاهده‌ای مبتنی بر آماره‌های ترتیبی برای تابع چگالی احتمال و تابع توزیع تجمعی توزیع بتا وایبول هندسی، خصوصا با تابع نرخ خطر گودالی و تک‌مدی شکل که برای مدل‌بندی داده‌های مربوط به قابلیت اعتماد و طول عمر مفید است در دو بخش به دست آورده شده و با استفاده از روش شبیه‌سازی مونت‌کارلو و محاسبه میانگین توان دوم خطای برآوردگرها مقایسه شده و در هر بخش برآورد مطلوب تعیین می‌شود.

واژه‌های کلیدی: توزیع بتا وایبول هندسی، برآورد صدکی، بهترین برآورد صدکی تک–مشاهده‌ای، بهترین برآورد صدکی دو–مشاهده‌ای.

۱ مقدمه

توزیع بتا وایبول هندسی که دارای تابع نرخ خطر با ویژگی افزایشی، کاهشی، گودالی شکل[1]، تک‌مدی شکل[2] و افزایشی–کاهشی–افزایشی است توسط کردیرو و همکاران (۲۰۱۳) و بیدرام و همکاران (۲۰۱۳) معرفی و ویژگی‌های آن بر حسب خصوصیات توزیع وایبول هندسی (بارتو–سوزا و همکاران، ۲۰۱۱) بررسی شد. همچنین توزیع بتا وایبول هندسی به عنوان تعمیمی از توزیع وایبول هندسی توسط یعقوب‌زاده و همکاران

آدرس الکترونیکی نویسنده مسئول مقاله: شهرام یعقوب‌زاده شهرستانی، yagoubzade@gmail.com

کد موضوع‌بندی ریاضی (۲۰۱۰): 62F10، 62G05

[1]bathtub
[2]unimodal

(۲۰۱۵) معرفی و به کمک چند جمله‌ای‌های استرلینگ ویژگی‌های آن بررسی شد. به دلیل انعطاف‌پذیری تابع نرخ خطر این توزیع و کاربرد آن در تحلیل داده‌های قابلیت اعتماد مانند داده‌های مقاومت الیاف شیشه‌های به ضخامت ۱/۵ سانتیمتری (اسمیت و نایلور، ۱۹۸۷)، داده‌های مدت زمان مقاومت قطعه‌های $T6 - 6061$ آلومینیم در اثر فشار نیروی ۲۶۰۰۰ پوند بر اینچ مربع در هر چرخش و داده‌های مربوط به تعداد خرابی‌های متوالی سیستم‌های تهویه هواپیما در هر پرواز هواپیماهای ناوگان شامل ۱۳ هواپیمای بوئینگ ۷۲۰ (بیدرام و همکاران، ۲۰۱۳) و داده‌های مربوط به اندازه‌گیری سطح لایه ازن در ماه‌های می‌-سپتامبر سال ۱۹۷۳ در شهر نیویورک آمریکا (کردیرو و همکاران، ۲۰۱۳)، برآورد تابع‌های چگالی احتمال و توزیع تجمعی توزیع بتا وایبول هندسی تحت شرایطی هدف این مقاله است. برآورد تابع‌های چگالی احتمال و توزیع تجمعی چند توزیع توسط نویسندگان متعددی اخیرا مورد توجه قرارگرفته که می‌توان به روش‌های برآورد تابع‌های چگالی احتمال و توزیع تجمعی توزیع پارتو توسط دیکسیت و جباری نوقابی (۲۰۱۰)، توزیع پارتو-توانی توسط جباری نوقابی و جباری نوقابی (۲۰۱۰)، توزیع توزیع پواسن-نمایی تعمیم‌یافته توسط باقری و همکاران (۲۰۱۴)، توزیع رایلی تعمیم‌یافته توسط علیزاده و همکاران (۲۰۱۳) و توزیع گامبل-توانی توسط باقری و همکاران (۲۰۱۵) اشاره کرد.

اگر متغیر تصادفی X دارای توزیع بتا وایبول هندسی باشد، آنگاه تابع چگالی احتمال آن به صورت

$$f(x) = \frac{\alpha(1-\theta)^b\beta^\alpha x^{\alpha-1}e^{-b(\beta x)^\alpha}(1-e^{-(\beta x)^\alpha})^{a-1}}{B(a,b)} \times(1-\theta e^{-(\beta x)^\alpha})^{-(a+b)} \qquad (1)$$

است، که در آن $x,\alpha,\beta,a,b>0$، $0<\theta<1$ و $B(a,b)=\int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{b-1}dt$. در این مقاله فرض می‌شود $b=1$، که در این صورت رابطه (۱) به صورت

$$f^*(x) = a\alpha(1-\theta)\beta^\alpha x^{\alpha-1}e^{-(\beta x)^\alpha}\frac{(1-e^{-(\beta x)^\alpha})^{a-1}}{(1-\theta e^{-(\beta x)^\alpha})^{a+1}} \qquad (2)$$

و تابع توزیع تجمعی آن به صورت

$$F^*(x) = \{\frac{1-e^{-(\beta x)^\alpha}}{1-\theta e^{-(\beta x)^\alpha}}\}^a \qquad (3)$$

خواهد شد. در بخش ۲ برای تابع چگالی احتمال (۲) و تابع توزیع تجمعی (۳) به ترتیب برآوردهای نااریب با کمترین واریانس[3]، ماکسیمم درستنمایی[4]، صدکی[5] و بهترین برآورد صدکی تک-مشاهده‌ای[6] را در حالتی که پارامتر a نامعلوم و مقادیر α، β و θ معلومند به دست آورده می‌شوند. در بخش ۳ بهترین برآورد صدکی دو-مشاهده‌ای[7]، برآوردهای ماکسیمم درستنمایی و صدکی برای حالت نامعلوم بودن پارامترهای α و β و معلوم بودن مقادیر a و θ محاسبه می‌شوند. در بخش ۴ به روش شبیه‌سازی مونت‌کارلو این برآوردگرها با هم ارزیابی و مقایسه می‌شوند. بخش ۵ هم به بحث و نتیجه‌گیری پرداخته می‌شود.

۲ برآورد پارامترها در حالت معلوم بودن α، β و θ

یکی از اهداف مقاله معرفی خانواده برآوردهای صدکی تک-مشاهده‌ای و بهترین برآورد صدکی تک-مشاهده‌ای برای یک پارامتر است. به همین علت فقط یک پارامتر نامعلوم و بقیه معلوم در نظر گرفته شده‌اند تا بتوان نحوه محاسبه بهترین برآورد صدکی تک-مشاهده‌ای را بهتر ارائه داد. البته در بخش ۳ خانواده برآوردهای صدکی دو-مشاهده‌ای و بهترین برآورد صدکی دو-مشاهده‌ای معرفی شده است.

۲,۱ برآورد ناریب با کمترین واریانس

اگر $X_1, \cdots, X_n$ یک نمونه تصادفی از توزیع با تابع چگالی احتمال (۲) باشد، آنگاه

$$S = -\sum_{i=1}^{n} \log\left(\frac{1 - e^{-(\beta X_i)^\alpha}}{1 - \theta e^{-(\beta X_i)^\alpha}}\right), \qquad (۴)$$

یک آماره بسنده کامل برای پارامتر a است. بنابر این اگر $h(X_n|S) = f^{**}(S)$ توزیع X_n بشرط S باشد، آنگاه طبق قضیه لهمن-شهفه $f^{**}(S)$ برآورد نااریب با کمترین واریانس $f^*(x)$ است. چون داریم

$$E[f^{**}(S)] = \int h(x_n|s)g(s)ds = \int g(x_n, s)ds = f(x_n).$$

[3] Uniformly Minimum Variance Unbiased (UMVU)
[4] Maximum Liklihood (ML)
[5] Percentile (PC)
[6] Best Single-obsevation Percentile Estimation (BTPE)
[7] Best Two-obsevation Percentile Estimation (BTPE)

که در آن $g(s)$ و $g(x_n, s)$ به ترتیب تابع چگالی احتمال S و (X_n, S) هستند.

قضیه ۱: برآورد ناریب با کمترین واریانس $f^*(x)$ به صورت

$$\begin{aligned} \hat{f}(x) &= \frac{(n-۱)(۱-\theta)a^n\alpha\beta^\alpha x^{\alpha-۱}e^{-(\beta x)^\alpha}}{s^{n-۱}} \\ &\times \frac{\{s+\log(۱-e^{-(\beta x)^\alpha})-\log(۱-\theta e^{-(\beta x)^\alpha})\}^{n-۲}}{(۱-\theta e^{-(\beta x)^\alpha})^۲}, \end{aligned} \qquad (۵)$$

است، که در آن $\log(۱-\theta e^{-(\beta x)^\alpha})-\log(۱-\theta e^{-(\beta x)^\alpha}) < s < \infty$.

برهان: فرض کنید

$$T = -\sum_{i=۱}^{n-۱} \log\left(\frac{۱-e^{-(\beta X_i)^\alpha}}{۱-\theta e^{-(\beta X_i)^\alpha}}\right), \qquad (۶)$$

چون T دارای تابع چگالی به صورت

$$g^*(t) = \frac{a^{n-۱}}{\Gamma(n-۱)} t^{n-۲} e^{-at}, \quad t > ۰.$$

و از $U = -\log\left(\frac{۱-e^{-(\beta X_n)^\alpha}}{۱-\theta e^{-(\beta X_n)^\alpha}}\right)$ با تابع چگالی $h(u) = ae^{au}, u > ۰$ مستقل است، تابع چگالی توام (U, T) به صورت

$$g(u, t) = \frac{a^n}{\Gamma(n-۱)} t^{n-۲} e^{-a(t+u)}, \quad t > ۰, u > ۰.$$

می‌شود که به کمک تبدیل‌های $X_n = -\frac{۱}{\beta}\{-\log[\frac{۱-U}{۱-\theta U}]\}^{\frac{۱}{\alpha}}$ و $S = T + U$ تابع چگالی توام (X_n, S) به صورت

$$\begin{aligned} g(x_n, s) &= \frac{(۱-\theta)a^n\alpha\beta^\alpha x^{\alpha-۱}e^{s-(\beta x_n)^\alpha}}{\Gamma(n-۱)} \\ &\times \frac{\{s+\log(۱-e^{-(\beta x_n)^\alpha})-\log(۱-\theta e^{-(\beta x_n)^\alpha})\}^{n-۲}}{(۱-\theta e^{-(\beta x_n)^\alpha})^۲} \end{aligned}$$

به دست آورده می‌شود. بنابر این رابطه (۵) حاصل می‌شود.

نتیجه ۱: با توجه به رابطه $\hat{F}(x) = \int_k^x \hat{f}(x)dx$، که در آن

$$k = \log(1 - e^{-(\beta x)^\alpha}) - \log(1 - \theta e^{-(\beta x_n)^\alpha})$$

برآورد نااریب با کمترین واریانس $F^*(x)$ برابر است با

$$\hat{F}(x) = [1 - \frac{\log(1 - e^{-(\beta x)^\alpha}) - \log(1 - \theta e^{-(\beta x)^\alpha})}{s}]^{n-1} \qquad (7)$$

قضیه ۲: گشتاورهای $\hat{f}(x)$ و $\hat{F}(x)$ به ترتیب عبارتند از

$$\begin{aligned} E[\hat{f}(x)]^r &= \frac{(n-1)^r(1-\theta)^r a^{nr}\alpha^r\beta^{r\alpha}x^{r(\alpha-1)}e^{-r(\beta x)^\alpha}}{\Gamma(n)(1-\theta e^{-(\beta x)^\alpha})^{2r}} \\ &\times \sum_{j=0}^{n-r-1}\binom{(n-2)r}{j}\{\log[\frac{1-e^{-(\beta x)^\alpha}}{1-\theta e^{-(\beta x)^\alpha}}]\}^j\frac{\Gamma(n-r-j)}{a^{n-r-j}} \end{aligned}$$

$$E[\hat{F}(x)]^r = \frac{1}{\Gamma(n)}\sum_{j=0}^{n-1}\binom{(n-1)r}{j}\{-\log[\frac{1-e^{-(\beta x)^\alpha}}{1-\theta e^{-(\beta x)^\alpha}}]\}^j a^j\Gamma(n-j)$$

برهان: به کمک تابع چگالی S و بسط دوجمله ای خیام-نیوتن قضیه ۲ ثابت می‌شود.

نتیجه ۲: با در نظر گرفتن $r = 1, 2$ در قضیه ۲ میانگین توان دوم خطا برای $\hat{f}(x)$ و $\hat{F}(x)$ به ترتیب عبارتند از

$$\begin{aligned} MSE(\hat{f}(x)) &= \frac{(n-1)(1-\theta)^2a^2\alpha^2\beta^{2\alpha}x^{2\alpha-2}e^{-2(\beta x)^\alpha}}{\Gamma(n)(1-e^{-(\beta x)^\alpha})^4} \\ &\times \{(n-1)a^{n-4}\sum_{j=0}^{n-3}\binom{2n-4}{j}\{-\log[\frac{1-e^{-(\beta x)^\alpha}}{1-\theta e^{-(\beta x)^\alpha}}]\}^j \\ &\times a^j\Gamma(n-j-2) - (n-2)!\} \end{aligned}$$

$$MSE(\hat{F}(x)) = \frac{1}{\Gamma(n)}\sum_{j=0}^{n-1}\binom{2n-2}{j}\{-\log[\frac{1-e^{-(\beta x)^\alpha}}{1-\theta e^{-(\beta x)^\alpha}}]\}^j a^j\Gamma(n-j) - \{\frac{1-e^{-(\beta x)^\alpha}}{1-\theta e^{-(\beta x)^\alpha}}\}^{2\alpha}$$

نتیجه ۳: برآورد ناااریب با کمترین واریانس a و میانگین توان دوم خطای آن به ترتیب عبارتند از

$$\hat{a} = \frac{n-1}{-\sum_{i=1}^{n}[\log(1-\theta e^{-(\beta x_i)^\alpha}) - \log(1-e^{-(\beta x_i)^\alpha})}]$$
$$MSE(\hat{a}) = \frac{a^2}{n-2}$$

۲٫۲ برآورد ماکسیمم درستنمایی

فرض کنید $X_1, \cdots, X_n$ نمونه‌ای تصادفی از توزیع با تابع چگالی احتمال (۲) باشند. برآورد ماکسیمم درستنمایی a با فرض معلوم بودن α، β و θ عبارت است از

$$\tilde{a} = n[-\sum_{i=1}^{n}\log(\frac{1-e^{-(\beta x_i)^\alpha}}{1-\theta e^{-(\beta x_i)^\alpha}})]^{-1}$$

که با توجه به تابع چگالی احتمال S، تابع چگالی احتمال $w = \tilde{a}$ برابر است با

$$g(w) = \frac{(na)^n}{\Gamma(n)w^{n+1}}e^{-\frac{na}{w}}, \quad w > 0.$$

همچنین با توجه به خاصیت پایایی برآوردگرهای ماکسیمم درستنمایی داریم

$$\tilde{f^*}(x) = \tilde{a}\alpha\beta^\alpha(1-\theta)x^{\alpha-1}e^{-(\beta x)^\alpha}(\frac{1-e^{-(\beta x)^\alpha}}{1-\theta e^{-(\beta x)^\alpha}})^{\tilde{a}-1}(1-\theta e^{-(\beta x)^\alpha})^{-2}$$
$$\tilde{F^*}(x) = (\frac{1-e^{-(\beta x)^\alpha}}{1-\theta e^{-(\beta x)^\alpha}})^{\tilde{a}-1}$$

قضیه ۳: گشتاورهای $\tilde{f^*}(x)$ و $\tilde{F^*}(x)$ به ترتیب عبارتند از

$$E(\tilde{f^*}(x))^r = \frac{(\alpha\beta^\alpha k)^r}{\Gamma(n)}\sum_{j=0}^{n-r-1}\frac{(rt)^j(na)^{j+r}\Gamma(n-r-j)}{j!}$$

$$E(\tilde{F^*}(x))^r = \frac{1}{\Gamma(n)}\sum_{j=0}^{n-1}\frac{(rt)^j(na)^j\Gamma(n-j)}{j!}$$

که در آن $k = x^{\alpha-1}e^{-(\beta x)^\alpha}[(1-e^{-(\beta x)^\alpha})(1-\theta e^{-(\beta x)^\alpha})]^{-1}$ و $t = \log\frac{1-e^{-(\beta x)^\alpha}}{1-\theta e^{-(\beta x)^\alpha}}$.

برهان: $f^*(x)$ را می‌توان بر حسب w و k به صورت $\tilde{f^*}(x) = \alpha\beta^\alpha k e^{wt}$ نوشت. با توجه به بسط مک لورن e^{rwt} و تغییر متغیر $u = \frac{1}{w}$ داریم

$$\begin{aligned} E(\tilde{f^*}(x))^r &= \frac{(\alpha\beta^\alpha k)^r(na)^n}{\Gamma(n)}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(rt)^j}{j!}\int_0^\infty w^{r+j-n-1}e^{-\frac{na}{w}}dw \\ &= \frac{(\alpha\beta^\alpha k)^r}{\Gamma(n)}\sum_{j=0}^{n-r-1}\frac{(rt)^j a^{j+r}}{j!}\Gamma(n-r-j) \\ E(\tilde{F^*}(x))^r &= \frac{(na)^n}{\Gamma(n)}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(rt)^j}{j!}\int_0^\infty w^{j-n-1}e^{-\frac{na}{w}}dw \\ &= \frac{1}{\Gamma(n)}\sum_{j=0}^{n-1}\frac{(rt)^j(na)^j}{j!}\Gamma(n-j) \end{aligned}$$

نتیجه ۴: میانگین توان دوم خطای $\tilde{f^*}(x)$ و $\tilde{F^*}(x)$ به ترتیب عبارتند از

$$\begin{aligned} MSE(\tilde{f^*}(x)) &= \frac{\alpha^2\beta^{2\alpha}k^2}{\Gamma(n)}\sum_{j=0}^{n-3}\frac{(2t)^j(na)^{2+j}\Gamma(n-2-j)}{j!} \\ &- \frac{2a(\alpha\beta^\alpha k)^2 e^{at}}{\Gamma(n)}\sum_{j=0}^{n-2}\frac{(2t)^j(na)^{1+j}}{j!}\Gamma(n-1-j) \\ &+ a^2\alpha^2\beta^{2\alpha}k^2 e^{2\alpha t} \end{aligned}$$

$$MSE(\tilde{F}^*(x)) = \frac{۱}{\Gamma(n)} \sum_{j=۰}^{n-۱} \frac{[(۲t)^j - t^j(\frac{۱-e^{-(\beta x)^\alpha}}{۱-\theta e^{-(\beta x)^\alpha}})^a](na)^j}{j!}\Gamma(n-j) + e^{۲t}$$

نتیجه ۵: برآورد ماکسیمم درستنمایی a برآوردی اریب برای a و میانگین توان دوم خطای آن برابر است با

$$MSE(\tilde{a}) = \frac{n+۲}{(n-۱)(n-۲)}a^۲$$

۲,۳ برآورد صدکی

فرض کنید $X_۱, \cdots, X_n$ یک نمونه تصادفی از توزیع با تابع توزیع تجمعی (۳) و $X_{(۱)}, \cdots, X_{(n)}$ آماره‌های مرتب این نمونه و p_i صدک مربوط به $X_{(i)}$ باشد. آنگاه $F^*(X_{(i)}) = p_i$ یا

$$a\log(\frac{۱-e^{-(\beta X_{(i)})^\alpha}}{۱-\theta e^{-(\beta X_{(i)})^\alpha}}) = \log p_i.$$

برآورد صدکی a از مینیمم کردن

$$\sum_{i=۱}^{n}[a\log(\frac{۱-e^{-(\beta X_{(i)})^\alpha}}{۱-\theta e^{-(\beta X_{(i)})^\alpha}}) - \log p_i]^۲, \quad p_i = E(X_{(i)}) = \frac{i}{n+۱}$$

نسبت به a به صورت

$$\tilde{a}_{PCE} = \frac{\sum_{i=۱}^{n}\log p_i[\log(۱-e^{-(\beta X_{(i)})^\alpha}) - \log(۱-\theta e^{-(\beta X_{(i)})^\alpha})]}{\sum_{i=۱}^{n}[\log(۱-e^{-(\beta X_{(i)})^\alpha}) - \log(۱-\theta e^{-(\beta X_{(i)})^\alpha})]^۲}$$

به دست آورده می‌شود. بنابر این برآوردهای صدکی (۲) و (۳) به ترتیب عبارتند از

$$\tilde{f}^*_{PCE}(x) = (\tilde{a}_{PCE})\alpha\beta^\alpha(۱-\theta)x^{\alpha-۱}e^{-(\beta x)^\alpha}(\frac{۱-e^{-(\beta x)^\alpha}}{۱-\theta e^{-(\beta x)^\alpha}})^{\tilde{a}_{PCE}-۱} \times (۱-\theta e^{-(\beta x)^\alpha})^{-۲}$$

$$\tilde{F}^{*}_{PCE}(x) = (\frac{۱ - e^{-(\beta x)^{\alpha}}}{۱ - \theta e^{-(\beta x)^{\alpha}}})^{\tilde{a}_{PCE}}$$

برای جزئیات بیشتر در باره روش برآورد صدکی به کائو (۱۹۵۸) و جونسن و همکاران (۱۹۹۴) مراجعه شود. چون محاسبه امید ریاضی و میانگین توان دوم خطای این برآوردگرها دشوار است با استفاده از شبیه‌سازی، میانگین توان دوم خطای آن‌ها به دست آورده می‌شود.

۲,۴ بهترین برآورد صدکی تک-مشاهده‌ای

روش برآورد صدکی مبتنی بر آماره‌های ترتیبی مانند بهترین برآوردهای صدکی تک-مشاهده‌ای و دو-مشاهده‌ای توسط برخی از نویسندگان برای برآورد پارامترهای بعضی از توزیع‌ها استفاده شد که می‌توان به منون (۱۹۶۳)، دوبی (۱۹۶۵،۱۹۶۷) و زاناکیس (۱۹۸۲) اشاره کرد. فرض کنید $X_{۱}, \cdots, X_n$ یک نمونه تصادفی از توزیع با تابع چگالی احتمال (۲) و تابع توزیع تجمعی (۳) با آماره‌های ترتیبی $X_{(۱)}, \cdots, X_{(n)}$ و $X_{(k)}$ صدک مرتبه p ام ($۰ < p < ۱$) توزیع باشد. آنگاه

$$p = F^{*}(X_{(k)}) = (\frac{۱ - e^{-(\beta X_{(k)})^{\alpha}}}{۱ - \theta e^{-(\beta X_{(k)})^{\alpha}}})^{a}.$$

اگر np عدد صحیح باشد $k = (np)$ و در غیر این صورت $k = ([np] + ۱)$، که در آن $[np]$ بزرگترین عدد صحیح کوچکتر از np است. بنابر این یک برآورد صدکی تک-مشاهده‌ای a به صورت

$$a^{*} = \frac{\log p}{\log(\frac{۱-e^{-(\beta X_{(k)})^{\alpha}}}{۱-\theta e^{-(\beta X_{(k)})^{\alpha}}})} = \frac{\log p}{\log Y_{(k)}}$$

به دست آورده می‌شود، که در آن $i = ۱, \cdots, n$ ، $Y_i = \frac{۱-e^{-(\beta X_i)^{\alpha}}}{۱-\theta e^{-(\beta X_i)^{\alpha}}})$. با توجه به دوبی (۱۹۶۷) ، a^{*} توزیع نرمال مجانبی با میانگین a و واریانس

$$Var(a^{*}) = \frac{a^{۲} p^{*}}{n(۱ - p^{*}) \log^{۲}(۱ - p^{*}) \log^{۲}[-\log(۱ - p^{*})]}$$

دارد که در آن $p^* = ۱ - e^{-p}$. اکنون p طوری تعیین می‌شود که $Var(a^*)$ مینیمم شود. در این صورت به حل معادله

$$\log(۱ - p^*)\log[-\log(۱ - p^*)] + ۲p^*\log[-\log(۱ - p^*)] + ۲p^* = ۰$$

منجر می‌شود که با روش تکراری $p = ۰/۱۱۸۹$ به دست می‌آید. در نتیجه بهترین برآورد صدکی تک-مشاهده‌ای a به صورت

$$\tilde{a}_{BSPE} = \frac{۲/۱۲۹۴۷۲}{-[\log(۱ - e^{-(\beta X_{(k)})^\alpha}) - \log(۱ - \theta e^{-(\beta X_{(k)})^\alpha})]}$$

محاسبه می‌شود، که در آن $k = [۰/۱۱۸۹n]$ یا $k = [۰/۱۱۸۹n] + ۱$. بنابر این بهترین برآوردهای صدکی تک-مشاهده‌ای (۲) و (۳) به ترتیب عبارتند از

$$\begin{aligned}\tilde{f}^*_{BSPE}(x) &= \tilde{a}_{BSPE}\beta^\alpha(۱-\theta)x_{(k)}^{\alpha-۱}e^{-(\beta x_{(k)})^\alpha}\left(\frac{۱ - e^{-(\beta x_{(k)})^\alpha}}{۱ - \theta e^{-(\beta x_{(k)})^\alpha}}\right)^{\tilde{a}_{BSPE}-۱}\\ &\quad \times(۱ - \theta e^{-(\beta x_{(k)})^\alpha})^{-۲}\\ \tilde{F}^*_{BSPE}(x) &= \left(\frac{۱ - e^{-(\beta x_{(k)})^\alpha}}{۱ - \theta e^{-(\beta x_{(k)})^\alpha}}\right)^{\tilde{a}_{BSPE}}\end{aligned}$$

۳ برآورد پارامترها در حالت معلوم بودن a و θ

در این بخش بهترین برآورد صدکی دو-مشاهده‌ای، برآوردهای ماکسیمم درستنمایی و صدکی برای α، β، تابع چگالی احتمال (۲) و تابع توزیع تجمعی (۳) به دست آورده می‌شود.

۳٫۱ برآورد صدکی دو-مشاهده‌ای

اگر $X_{(k_i)}$ صدک مرتبه p_i ام توزیع با تابع توزیع تجمعی $F^*(x)$ باشد، آنگاه

$$\alpha(\log\beta + \log X_{(k_i)}) = \log[-\log(\frac{۱ - p_i^{\frac{۱}{a}}}{۱ - \theta p_i^{\frac{۱}{a}}})] \qquad (۸)$$

بنابر این به ازای دو مقدار حقیقی p_1 و p_2 $(0 < p_1 < p_2 < 1)$ یک برآورد صدکی دو-مشاهده‌ای α به صورت

$$\begin{aligned}\alpha^* &= \frac{\log[-\log(\frac{1-p_1^{\frac{1}{a}}}{1-\theta p_1^{\frac{1}{a}}})] - \log[-\log(\frac{1-p_2^{\frac{1}{a}}}{1-\theta p_2^{\frac{1}{a}}})]}{\log x_{(k_1)} - \log x_{(k_2)}}\\ &= \frac{\log[-\log(1-p_1^*)] - \log[-\log(1-p_2^*)]}{\log x_{(k_1)} - \log x_{(k_2)}}\\ &= \frac{k}{\log x_{(k_1)} - \log x_{(k_2)}}\end{aligned}$$

به دست می‌آید، که در آن $k = \log[-\log(1-p_1^*)] - \log[-\log(1-p_2^*)]$ و

$$p_1^* = \frac{(1-\theta)p_1^{\frac{1}{a}}}{1-\theta p_1^{\frac{1}{a}}}, \quad p_2^* = \frac{(1-\theta)p_2^{\frac{1}{a}}}{1-\theta p_2^{\frac{1}{a}}}. \tag{۹}$$

با توجه به دوبی (۱۹۶۷)، α^* توزیع نرمال مجانبی با میانگین α و واریانس

$$\begin{aligned}Var(\alpha^*) &= \frac{\alpha^2}{nk^2}[\frac{p_1^*}{(1-p_1^*)\ln^2(1-p_1^*)} + \frac{p_2^*}{(1-p_2^*)\ln^2(1-p_2^*)}\\ &\quad -\frac{2p_1^*p_2^*}{(1-p_1^*)\ln(1-p_1^*)(1-p_2^*)\ln(1-p_2^*)}]\end{aligned}$$

دارد که با مینیمم کردن $Var(\alpha^*)$ مقادیر $p_1^* = ۰/۱۶۷۳$ و $p_2^* = ۰/۹۷۳۷$ حاصل شده است. بنابر این با توجه به (۹)، p_1 و p_2 به صورت

$$p_i = (\frac{p_i^*}{(1-\theta)+\theta p_i^*})^a, \quad i = 1, 2 \tag{۱۰}$$

محاسبه و به ترتیب با نمادهای p_1^{**} و p_2^{**} نشان داده می‌شوند، آن‌گاه بهترین برآورد صدکی دو-مشاهده‌ای α به صورت

$$\tilde{\alpha}_{BTPE}=\frac{\log[-\log(\frac{1-(p_1^{**})^{\frac{1}{a}}}{1-\theta(p_1^{**})^{\frac{1}{a}}})]-\log[-\log(\frac{1-(p_2^{**})^{\frac{1}{a}}}{1-\theta(p_2^{**})^{\frac{1}{a}}})]}{\log x_{(k_1)}-\log x_{(k_2)}} \qquad (11)$$

است، که به ازای $i=1,2$، $k_i=[np_i^{**}]$ یا $k_i=[np_i^{**}]+1$ هستند. همچنین یک برآورد صدکی دو-مشاهده‌ای β به کمک روابط (۸) و (۱۱) به صورت

$$\beta^{*}=\exp(w_1\log x_{(k_1)}+w_2\log x_{(k_2)})$$

به دست می‌آید، که در آن $w_1=\frac{T_2}{T_1-T_2}$، $w_1+w_2=-1$ و بازای $i=1,2$، $T_i=\log[-\log(1-p_i^{*})]$. با توجه به دوبی (۱۹۶۷)، β^{*} توزیع نرمال مجانبی با میانگین β و واریانس

$$Var(\beta^{*})=\frac{\beta^{2}}{n\alpha^{2}k^{2}}\{q_1^{*}(\frac{k-\log k_1}{k_1})[\frac{k-\log k_1}{k_1}+\frac{2\log k_1}{k_2}]+\frac{q_2^{*}\log^{2}k_1}{k_2^{2}}\}$$

دارد که در آن $i=1,2$، $k_i=-\log(1-p_i^{*})$، $q_i^{*}=\frac{p_i^{*}}{1-p_i^{*}}$. p_1^{*} و p_2^{*} از مینیمم کردن $Var(\beta^{*})$ توسط دوبی (۱۹۶۷)، به صورت $p_1^{*}=0/3977$ و $p_2^{*}=0/8211$ به دست آورده شده است. بنابر این با توجه به رابطه (۱۰)، p_1 و p_2 محاسبه و به ترتیب با نمادهای p_1^{**} و p_2^{**} نشان داده می‌شوند که در نتیجه بهترین برآورد صدکی دو-مشاهده‌ای β به صورت

$$\begin{aligned}\tilde{\beta}_{BTPE} &= \exp\{[\frac{\log[-\log(\frac{1-(p_2^{**})^{\frac{1}{a}}}{1-\theta(p_2^{**})^{\frac{1}{a}}})]}{\log[-\log(\frac{1-(p_1^{**})^{\frac{1}{a}}}{1-\theta(p_1^{**})^{\frac{1}{a}}})]}]\log x_{(k_1)}\\ &\quad +[\frac{\log[-\log(\frac{1-(p_2^{**})^{\frac{1}{a}}}{-\theta(p_2^{**})^{\frac{1}{a}}})]}{\log[-\log(\frac{1-(p_1^{**})^{\frac{1}{a}}}{1-\theta(p_1^{**})^{\frac{1}{a}}})]}]\log x_{(k_2)}\}\end{aligned}$$

به دست آورده می‌شود. بنابر این بهترین برآوردهای صدکی دو–مشاهده‌ای تابع‌های (۲) و (۳) به ترتیب عبارتند از

$$\begin{aligned} \tilde{f}^{*}_{BTPE}(x) &= (\tilde{\beta}^{\tilde{\alpha}_{BTPE}}_{BTPE})(۱-\theta)x^{\tilde{\alpha}_{BTPE}-۱}\exp(-(\tilde{\beta}_{BTPE}x)^{\tilde{\alpha}_{BTPE}}) \\ &\times(\frac{۱-\exp(-(\tilde{\beta}_{BTPE}x)^{\tilde{\alpha}_{BTPE}})}{۱-\theta\exp(-(\tilde{\beta}_{BTPE}x)^{\tilde{\alpha}_{BTPE}})})^{a-۱} \\ &\times(۱-\theta\exp(-(\tilde{\beta}_{BTPE}x)^{\tilde{\alpha}_{BTPE}}))^{-۲} \end{aligned}$$

$$\tilde{F}^{*}_{BTPE}(x)=(\frac{۱-\exp(-(\tilde{\beta}_{BTPE}x)^{\tilde{\alpha}_{BPTSE}})}{۱-\theta\exp(-(\tilde{\beta}_{BTPE}x)^{\tilde{\alpha}_{BTPE}})})^{a}$$

۳٫۲ برآورد ماکسیمم درستنمایی

بر اساس نمونه تصادفی $X_۱,\cdots,X_n$ از توزیع با تابع چگالی احتمال (۲)، برآورد ماکسیمم درستنمایی پارامترهای α و β با فرض معلوم بودن a و θ به کمک مجموعه معادلات درستنمایی اشاره شده در یعقوب‌زاده و همکاران (۲۰۱۵) با قرار دادن $b=۱$ به دست آورده می‌شوند. چون برآورد پارامترهای α و β به صورت فرم بسته به دست نمی‌آیند به روش عددی روش نیوتن–رافسون محاسبه شده و با جایگذاری در (۲) و (۳) به جای α و β، برآوردهای ماکسیمم درستنمایی تابع چگالی احتمال (۲) و تابع توزیع تجمعی (۳) به دست آورده می‌شود.

۳٫۳ برآوردهای صدکی

فرض کنید $X_۱,\cdots,X_n$ یک نمونه تصادفی از توزیع با تابع توزیع تجمعی (۳) و با آماره‌های ترتیبی $X_{(۱)},\cdots,X_{(n)}$ و p_i صدک مربوط به $X_{(i)}$ باشد. آنگاه $F^{*}(X_{(i)})=p_i$ یا

$$\alpha\log(\beta X_{(i)}) = \log[-\log(\frac{۱-p^{\frac{۱}{a}}}{۱-\theta p^{\frac{۱}{a}}})]$$

است که برآوردهای صدکی α و β یعنی $\tilde{\alpha}_{PC}$ و $\tilde{\beta}_{PC}$ با مینیمم کردن

$$\sum_{i=۱}^{n}\{\alpha\log(\beta X_{(i)})-\log[-\log(\frac{۱-p^{\frac{۱}{a}}}{۱-\theta p^{\frac{۱}{a}}})]\}^{۲}$$

نسبت به α و β به دست می‌آیند که منجر به حل مجموعه معادلات

$$\begin{cases} n\alpha\log\beta+\sum_{i=۱}^{n}\log X_{(i)}-\sum_{i=۱}^{n}\log[-\log(\frac{۱-p^{\frac{۱}{a}}}{۱-\theta p^{\frac{۱}{a}}})]=۰ \\ \alpha\sum_{i=۱}^{n}(\log(\beta X_{(i)}))^{۲}-\sum_{i=۱}^{n}\{\log(\beta X_{(i)})\log[-\log(\frac{۱-p^{\frac{۱}{a}}}{۱-\theta p^{\frac{۱}{a}}})]\}=۰ \end{cases}$$

می‌شود که در آن α و β به روش عددی روش نیوتن-رافسون به دست می‌آیند و مانند روش برآورد ماکسیمم درستنمایی، برآوردهای صدکی (۲) و (۳) به دست آورده می‌شوند.

۴ ارزیابی و مقایسه برآوردگرها

در این بخش در گام اول با استفاده از

$$X=\frac{۱}{\beta}\{-\log(\frac{۱-U^{\frac{۱}{a}}}{۱-\theta U^{\frac{۱}{a}}})\}^{\frac{۱}{\alpha}} \qquad (۱۲)$$

که در آن متغیر تصادفی U دارای توزیع یکنواخت $U(۰,۱)$ است و به ازای مقادیر

$$a=۳,۳/۵,۴,۵,۶,۷/۵,۹$$
$$\alpha=۱/۴,۲,۲/۵,۳,۵,۶,۸$$
$$\beta=۰/۲۵,۰/۷۵,۳,۴,۶,۷$$
$$\theta=۰/۴,۰/۵,۰/۶,۰/۷,۰/۸,۰/۹$$

نمونه‌های تصادفی به حجم‌های $n=۱۰,۱۵,۲۵,۴۰,۵۰$ تولید می‌شود. در گام دوم با توجه به اطلاعات بخش ۲، برآوردهای α و با توجه به بخش ۳، برآوردهای (α,β) به دست آورده می‌شوند. در گام سوم

میانگین توان‌های دوم خطای برآوردهای تابع‌های (۲) و (۳) در هر دو بخش محاسبه می‌شود. گام‌های اول تا سوم ۱۰۰۰۰ بار تکرار شده و سپس میانگین میانگین‌های توان دوم خطای حاصل از ۱۰۰۰۰ بار تکرار به دست آورده می‌شود. نتایج شبیه‌سازی مربوط به بخش ۲ در جدول۱ و مربوط به بخش ۳ در جدول‌های ۲ و ۳ و شکل‌های ۱ و ۲ آمده است. همان‌طور که ملاحظه می‌شود برآورد ماکسیمم درستنمایی تابع چگالی احتمال و تابع توزیع تجمعی از سایر برآوردها بهتر است. همچنین واضح است که با افزایش حجم نمونه، میانگین توان دوم خطای برآوردهای ماکسیمم درستنمایی کاهش می‌یابد. جدول‌های ۲ و ۳ و شکل‌های ۱ و ۲ نشان می‌دهد که بهترین برآورد صدکی دو–مشاهده‌ای تابع چگالی احتمال و تابع توزیع تجمعی، از برآوردهای ماکسیمم درستنمایی و صدکی آن‌ها بهتر است. همچنین بر اساس یک نمونه تصادفی شبیه‌سازی شده ۵۰ تایی از توزیع با تابع چگالی احتمال (۲) به ازای $\alpha = ۱/۵$، $\beta = ۲$، $a = ۱/۲$ و $\theta = ۰/۶$ به کمک رابطه (۱۲) و با توجه به جدول ۴ که نشان دهنده برآورد پارامترها تحت روش‌های برآورد اشاره شده در بخش ۳ است، برآورد تابع چگالی احتمال (۲) به روش‌های بهترین برآورد صدکی دو–مشاهده‌ای، برآورد ماکسیمم درستنمایی و برآورد صدکی در شکل ۳ (سمت راست) رسم شده که نشان دهنده برتری بهترین برآورد صدکی دو–مشاهده‌ای نسبت به سایر برآوردها است.

بحث و نتیجه‌گیری

در این مقاله برآوردهایی برای تابع چگالی احتمال و تابع توزیع تجمعی توزیع بتا وایبول هندسی تحت شرایطی به دست آورده شد. برآوردهای ماکسیمم درستنمایی، نااریب با مینیمم واریانس، صدکی و بهترین برآورد صدکی تک–مشاهده‌ای این تابع‌ها به دست آمده و با استفاده از شبیه‌سازی مونت‌کارلو نشان داده شد برآورد ماکسیمم درستنمایی از سایر برآوردگرها بهتر است. برآورد صدکی دو–مشاهده‌ای، برآورد ماکسیمم درستنمایی و برآورد صدکی نیز به دست آورده و نشان داده شد که برآورد صدکی دو–مشاهده‌ای از سایر برآوردها بهتر است. همچنین پیشنهاد می‌شود بهترین برآوردهای صدکی سه مشاهده‌ای و چند مشاهده‌ای به کمک آماره‌های ترتیبی و روش‌های عددی، محاسبه و با برآوردهای ماکسیمم درستنمایی، نااریب با کمترین واریانس و صدکی مورد مقایسه قرار گیرد.

جدول ۱. میانگین، میانگین توان دوم خطای برآوردهای ماکسیمم درستنمایی، نااریب با مینیمم واریانس، صدکی و بهترین برآورد صدکی تک-مشاهده‌ای تابع توزیع تجمعی (۲)

$\tilde{F}^*_{BSPE}$	$\tilde{F}^*_{PCE}$	$\tilde{F}^*_{UMVUE}$	$\tilde{F}^*_{MLE}$	n	$(\alpha, \beta, a, \theta)$
۰/۲۰۷۴	۰/۱۰۵۴	۰/۸۶۲۲	۰/۰۵۴۷	۱۰	
۰/۲۰۳۸	۰/۱۰۳۱	۰/۶۳۱۳	۰/۰۳۵۴	۱۵	
۰/۲۰۱۷	۰/۱۰۵۰	۰/۱۶۷۵	۰/۰۲۱۳	۲۵	(۶, ۷, ۹, ۲, ۰/۹)
۰/۲۰۳۶	۰/۱۰۶۵	۰/۱۲۵۸	۰/۰۱۰۵	۴۰	
۰/۲۰۳۴	۰/۱۰۳۵	۰/۱۸۸۲	۰/۰۰۸۷	۵۰	
۰/۲۰۰۰۰	۳۰/۶۷۰۰	۰/۹۵۴۱	۰/۵۶۵۶	۱۰	
۰/۲۰۰۵	۰/۴۰۶۲	۰/۸۸۲۲	۰/۳۴۹	۱۵	
۰/۱۰۵۹	۰/۴۰۷۹	۰/۳۵۸۷	۰/۱۹۵۲	۲۵	(۳, ۳, ۳, ۰/۸)
۰/۲۰۱۸	۰/۷۰۴۴	۰/۲۱۸۹	۰/۱۲۵۸	۴۰	
۰/۳۰۹۹	۰/۳۰۹۱	۰/۷۲۹۵	۰/۱۰۱۰	۵۰	
۰/۵۸۶۴	۰/۱۰۴۸	۰/۴۹۴۵	۰/۰۹۷۱	۱۰	
۰/۸۶۴۵	۰/۱۰۶۹	۰/۶۷۶۲	۰/۰۸۰۳	۱۵	
۰/۳۹۰۵	۰/۱۰۰۹	۰/۷۹۶۳	۰/۰۴۸۲	۲۵	(۲, ۳, ۴, ۰/۶)
۰/۳۰۱۷	۰/۱۰۶۴	۰/۸۱۳۱	۰/۰۳۰۵	۴۰	
۰/۵۱۶۴	۰/۱۰۶۱	۰/۷۱۴۳	۰/۰۱۵۲	۵۰	
۰/۹۴۴۶	۰/۱۰۰۷	۰/۲۹۰۳	۰/۰۹۲۷	۱۰	
۰/۳۰۹۴	۰/۱۰۷۶	۰/۳۲۹۲	۰/۰۵۹۹	۱۵	
۰/۲۲۱۴	۰/۱۰۳۶	۰/۲۰۷۵	۰/۰۳۲۹	۲۵	(۸, ۶, ۷/۵, ۰/۷)
۰/۲۲۹۴	۰/۱۰۷۷	۰/۶۱۱۷	۰/۰۲۰۹	۴۰	
۰/۱۹۷۰	۰/۱۰۵۲	۰/۲۳۲۹	۰/۰۱۰۵	۵۰	

جدول ۲. میانگین، میانگین توان دوم خطای برآوردهای ماکسیمم درستنمایی، نااریب با مینیمم واریانس، صدکی و بهترین برآورد صدکی تک-مشاهده‌ای تابع توزیع تجمعی (۳)

$\tilde{F}^*_{BSPE}$	$\tilde{F}^*_{PCE}$	$\tilde{F}^*_{UMVUE}$	$\tilde{F}^*_{MLE}$	n	$(\alpha, \beta, a, \theta)$
۰/۱۲۴۸	۰/۰۸۳۰	۰/۰۹۰۵	۰/۰۰۳۹	۱۰	
۰/۱۱۶۴	۰/۰۸۴۱	۰/۱۱۷۰	۰/۰۰۲۵	۱۵	
۰/۱۱۰۳	۰/۰۸۴۹	۰/۱۹۸۹	۰/۰۰۱۵	۲۵	(۶, ۷, ۹, ۲, ۰/۹)
۰/۱۱۶۲	۰/۰۸۵۲	۰/۴۴۴۱	۰/۰۰۰۹	۴۰	
۰/۱۱۵۹	۰/۰۸۵۵	۰/۳۲۳۴	۰/۰۰۰۶	۵۰	
۰/۲۱۶۸	۰/۰۹۵۲	۰/۸۷۵۰	۰/۰۰۴	۱۰	
۰/۱۷۷۹	۰/۰۹۶۵	۰/۱۸۸۰	۰/۰۰۲۹	۱۵	
۰/۱۷۷۱	۰/۰۹۷۱	۰/۴۳۶۵	۰/۰۰۱۷	۲۵	(۳, ۳, ۳, ۰/۸)
۰/۱۷۸۶	۰/۰۹۷۵	۰/۴۹۸۱	۰/۰۰۱۰	۴۰	
۰/۱۷۷۹	۰/۰۹۶۰	۰/۳۳۵۱	۰/۰۰۰۸	۵۰	
۰/۳۰۱۰	۰/۰۵۹۷	۰/۱۹۰۴	۰/۰۰۴۵	۱۰	
۰/۸۹۲۹	۰/۰۰۸۰	۰/۰۸۰۵	۰/۰۰۲۷	۱۵	
۰/۰۵۰۲	۰/۰۶۲۱	۰/۳۳۱۷	۰/۰۰۱۵	۲۵	(۲, ۳, ۴, ۰/۶)
۰/۵۱۹۷	۰/۰۶۲۹	۰/۱۱۰۷	۰/۰۰۰۹	۴۰	
۰/۴۸۶۴	۰/۰۶۳۲	۰/۸۳۸۹	۰/۰۰۰۷	۵۰	
۰/۰۵۴۶	۰/۰۶۱۳	۰/۴۶۲۶	۰/۰۰۴۰	۱۰	
۰/۲۸۶۷	۰/۰۶۲۴	۰/۹۹۳۸	۰/۰۰۲۵	۱۵	
۰/۲۶۵۱	۰/۰۶۳۷	۰/۱۰۸۷	۰/۰۰۱۴	۲۵	(۸, ۶, ۷/۵, ۰/۷)
۰/۲۷۵۳	۰/۰۶۴۴	۰/۴۰۱۵۴	۰/۰۰۰۹	۴۰	
۰/۲۶۷۹	۰/۰۶۴۶	۰/۳۰۰۴	۰/۰۰۰۷	۵۰	

جدول ۳. میانگین، میانگین توان دوم خطای بهترین برآورد صدکی دو-مشاهده‌ای، برآوردهای ماکسیمم درستنمایی و صدکی تابع توزیع تجمعی (۳)

$\tilde{F}^*_{PCE}$	$\tilde{F}^*_{UMVUE}$	$\tilde{F}^*_{MLE}$	n	$(\alpha, \beta, a, \theta)$
۰/۶۰۹	۰/۵۹۲	۰/۵۱۶	۱۰	
۰/۶۴۲	۰/۵۵۲	۰/۵۷۲	۱۵	
۰/۵۹۸	۰/۵۶۲	۰/۴۱۲	۲۵	(۳, ۴, ۶, ۰/۵)
۰/۴۴۶	۰/۵۲	۰/۳۵۱	۴۰	
۰/۳۹۲	۰/۵۶۸	۰/۳۱۳	۵۰	
۰/۶۵۶	۰/۹۴۳	۰/۳۱۸	۱۰	
۰/۶۰۸	۰/۹۴۳	۰/۲۰۱	۱۵	
۰/۵۴۷	۰/۹۴۴	۰/۱۵۰	۲۵	(۵, ۴, ۳/۵, ۰/۶)
۰/۴۸۹	۰/۹۴۲	۰/۱۳۴	۴۰	
۰/۴۶۲	۰/۹۴۰	۰/۱۳۸	۵۰	
۰/۷۸۱	۰/۳۲۳	۰/۴۹۵	۱۰	
۰/۷۰۴	۰/۳۱۵	۰/۵۱۴۷	۱۵	
۰/۶۴۱	۰/۳۹۱	۰/۳۳۳	۲۵	(۲, ۳, ۵, ۰/۸)
۰/۵۸۴	۰/۷۱۴	۰/۵۲۰	۴۰	
۰/۴۷۶	۰/۵۱۳	۰/۴۱۲	۵۰	
۰/۷۵۱	۰/۷۲۷	۰/۵۳۰	۱۰	
۰/۷۰۰	۰/۷۱۵	۰/۵۲۴	۱۵	
۰/۶۳۲	۰/۵۲۱	۰/۵۱۷	۲۵	(۳, ۳, ۳, ۰/۴)
۰/۵۸۴	۰/۳۷۵	۰/۳۰۰	۴۰	
۰/۴۷۶	۰/۲۱۳	۰/۱۲۷	۵۰	

جدول ۴. برآورد α و β بر اساس یک نمونه تصادفی شبیه‌سازی شده ۵۰ تایی از توزیع (۲)

روش برآورد	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$
بهترین برآورد صدکی دو-مشاهده‌ای	۲/۰۴۱	۲/۵۶۲
برآورد ماکسیمم درستنمایی	۱/۴۰۷	۲/۶۰۳
برآورد صدکی	۱/۴۵۲	۱/۰۲۵۲

تقدیر و تشکر

نویسنده مقاله از زحمات سردبیر، داوران محترم مجله و ویراستار برای داوری و تصحیح مقاله تشکر می‌کند.

مراجع

Alizadeh, M., Bagheri, S. F. and Khaleghy Mogaddam, M. (2013), Efficient Estimation of the Density and Cumulative Distribution Function of the Generalized Rayliegh Distribution, *Journal of Statistical Research of Iran*, **10**, 1-22.

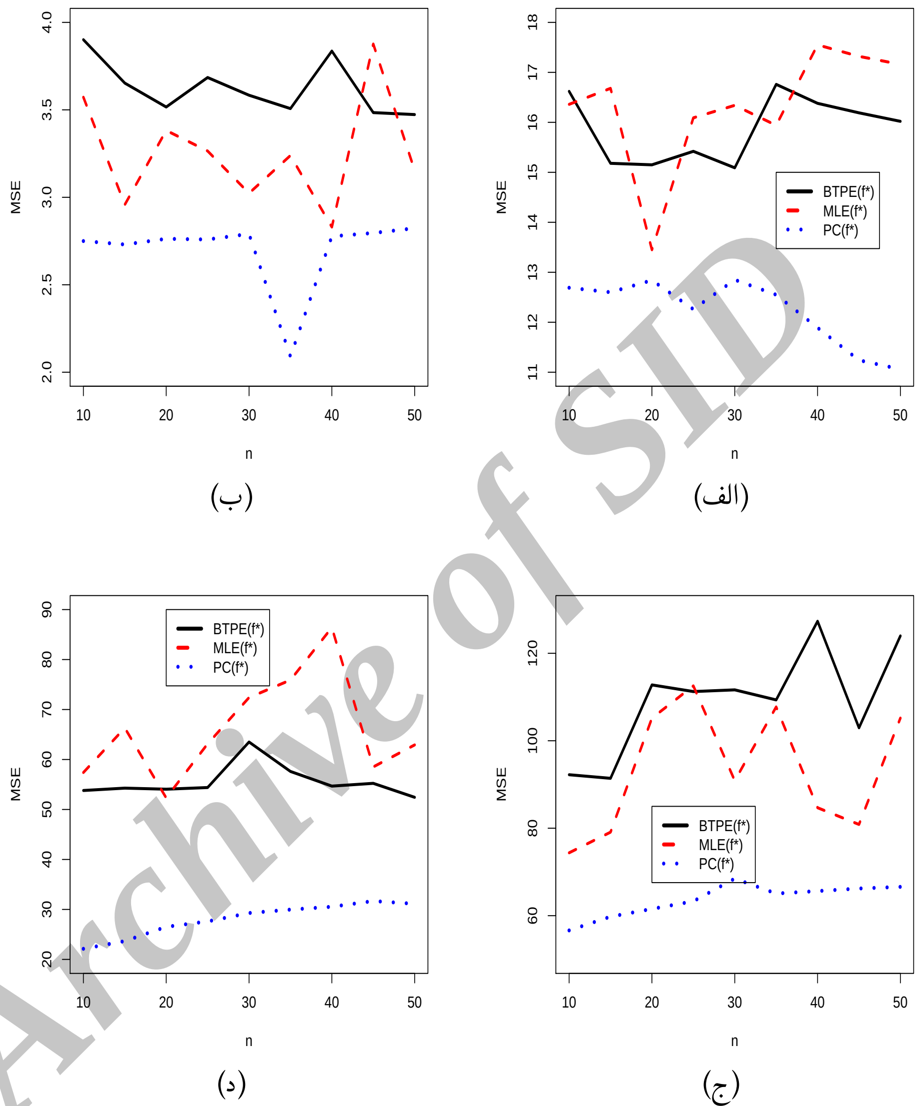
Bidram, H., Behboodian, J. and Towhidi, M. (2013), The Beta Weibull Geometric Distribution, *Journal of Statistical Computation and Simulation*, **82**, 52-67.

Bareto-Suza, W., de Morias, A. L. and Cordeiro, G. M. (2011), The Weibull-Geometric Distribution, *Journal of Statistical Computation and Simulation*, **81**, 645-657.

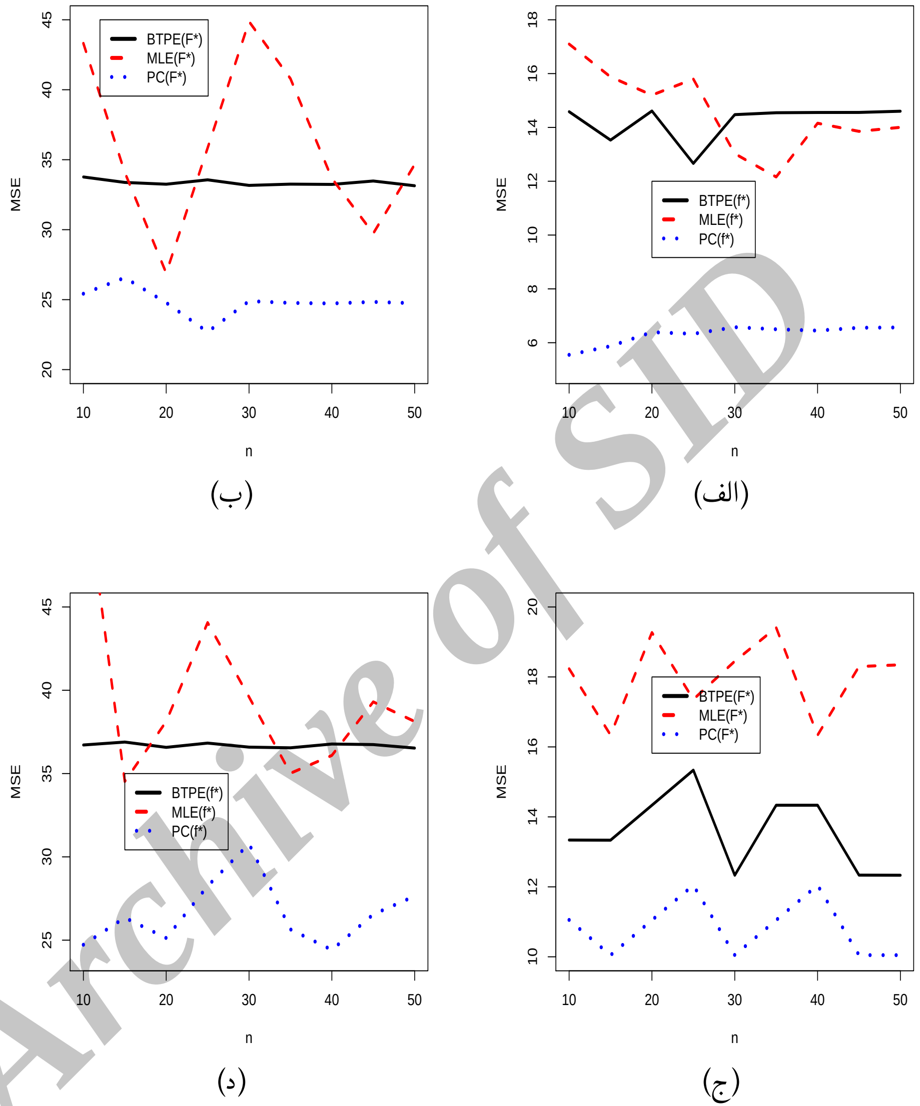
Bagheri, S. F., Alizadeh, M., Baloui Jamkhaneh, E. and Nadarajah, S. (2014), Evaluation and comparsion of estimations in the generalized Exponential-Poisson, *Journal of Statistical Computation and Simulation*, **84**, 2345-2360.

Bagheri, S. F., Alizadeh, M. and Nadarajah, S. (2015), Efficient Estimation of PDF and CDF of the Exponentiated Gumbel Distribution, *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, **45**, 339-361.

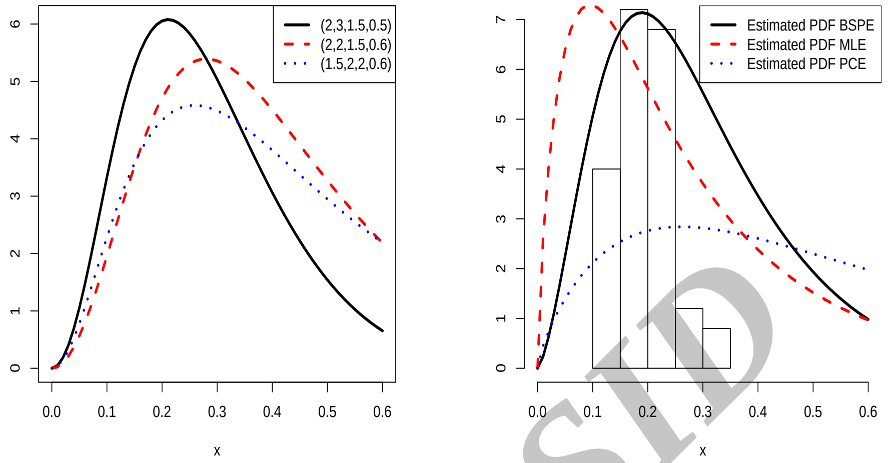
Cordeiro, G. M., Silva, G. O. and Ortega, E. M. M. (2013), The Beta Weibull Geometric Distribution, *Statistics A Journal of Theoretical and Applied Statistics*, **47**, 817-843.



شکل ۱. نمودارهای میانگین، میانگین توان‌های دوم خطای بهترین برآورد صدکی دو-مشاهده‌ای (خط ممتد)، برآوردهای ماکسیمم درستنمایی (خط چین) و صدکی (نقطه چین) تابع چگالی احتمال (۲) بر اساس مقادیر الف-(۰/۵, ۶, ۴, ۳)، ب-(۰/۶, ۳/۵, ۴, ۵)، ج-(۰/۸, ۰/۵, ۳, ۲)، د-(۰/۴, ۳, ۳, ۳) برای $(\alpha, \beta, a, \theta)$



شکل ۲. نمودارهای میانگین، میانگین توان‌های دوم خطای بهترین برآورد صدکی دو–مشاهده‌ای (خط ممتد)، برآوردهای ماکسیمم درستنمایی (خط چین) و صدکی (نقطه چین) تابع چگالی احتمال (۲)، (سمت راست) و تابع توزیع تجمعی (۳)، (سمت چپ) بر اساس مقادیر الف-(۰/۶, ۳, ۰/۵, ۱/۴)، ب-(۰/۶, ۳, ۰/۵, ۱/۴)، ج-(۰/۸, ۴, ۰/۷۵, ۲/۵) و د-(۰/۸, ۴, ۰/۷۵, ۲/۵) برای $(\alpha, \beta, a, \theta)$



(ب) (الف)

شکل ۳. نمودار برآورد تابع چگالی احتمال (۲) بر اساس یک نمونه شبیه‌سازی شده ۵۰ تایی از این توزیع به ازای $\alpha = ۱/۵$، $\beta = ۲$، $a = ۱/۲$ و $\theta = ۰/۶$ (الف) و نمودار واقعی تابع چگالی احتمال (۲) (ب).

Dixit, U. J. and Jabbari Nooghabi, M. (2010), Efficient Estimation in the Pareto Distribution, *Statistical Methodology*, **7**, 687-691.

Dubey, S. D. (1965), Asymptotically single observation best estimator of Exponential expected life, *Sankhya, Series A*, **27**, 133-142.

Dubey, S. D. (1967), Some Percentile Estimators for Weibull Parameters, *Tecnometrics*, **9**, 119-129.

Jabbari Nooghabi, M., Jabbari Nooghabi, H. (2010), Efficient Estimation of PDF and CDF and rth moment for the Exponentiated Pareto Distribution in the presence of outliers, *Statistics A Journal of Theoretical and Applied Statistics*, **44**, 1-20.

Johnson, N. L., Kotz, S. and Balakrishnan, N. (1994), *Continues Univariate Distribution*, Vol. 1, 2nd edition, Wiley, New York.

Kao, J. H. K. (1958), Computer Methods for estimating Weibull Parameters in Reliability studies, *Transaction of IRE-Reliability and Quality Control*, **13**, 15-22.

Menon, M. V. (1963), Estimation of the shape and scale parameters the Weibull Distribution, *Tecnometrics*, **5**, 175-182.

Smith, R. L. and Naylor, J. C. (1987), A comparison of maximum likelihood and bayesian estimators for the three-parameter Weibull distribution, *Applied Statistics*, **36**, 358-369.

Yaghoobzadeh, S. S., Shadrokh, A. and Yarmohammadi, M. (2015), Sterling Polynomials and a New Generalization of Weibull- Geometric Distribution, *Journal of Statistical Sciences*, **9**, 119-141.

Zanakis, S. H. and Mann, N. R. (1982), A Good Simple Percentile Estimator of the Weibull shape Parameter for use when all three parameters are unknown, *Naval Research Logistics*, **29**, 419-428.