

## میانگین مانده عمر سیستم‌های مرکب دو مؤلفه‌ای با تعدادی مؤلفه فعال

مصطفی رزمخواه، زهرا صابرزاده

گروه آمار، دانشگاه فردوسی مشهد

تاریخ دریافت: ۱۳۹۶/۰۷/۱۹ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۷/۰۷/۲۳

**چکیده:** در مباحث قابلیت اعتماد، سیستم‌های چند جزئی که هر یک از اجزای آن‌ها شامل چندین مؤلفه باشد به سیستم‌های مرکب معروف هستند. در این تحقیق سیستم‌های مرکبی در نظر گرفته می‌شوند که دارای  $n$  جزء بوده و هر یک از اجزای آن‌ها شامل دو مؤلفه‌ی وابسته است. با شرط فعال بودن برخی مؤلفه‌ها در زمان مشخص  $t$ ، میانگین مانده‌ی عمر این سیستم‌ها مورد بررسی قرار می‌گیرد. برای این منظور، ابتدا مدل دو جمله‌ای دو متغیره و تعمیم‌هایی از این مدل بیان و سپس میانگین مانده‌ی عمر سیستم‌های مرکب در حالت کلی بررسی می‌شود. رفتار این تابع تحت مدل فارلی-گامبل-مورگنشترن نسبت به پارامترهای مختلف با استفاده از روش‌های عددی مورد بررسی قرار می‌گیرد. واژه‌های کلیدی: آماره‌های مرتب دو متغیره، پارامتر وابستگی، سیستم‌های مرکب، مدل دو جمله‌ای دو متغیره، مدل فارلی-گامبل-مورگنشترن.

## ۱ مقدمه

فرض کنید متغیرهای تصادفی  $X_1, \dots, X_n$  نشان دهنده‌ی طول عمر مؤلفه‌های یک سیستم باشند، طوری که  $X_{1:n} \leq \dots \leq X_{n:n}$  آماره‌های مرتب متناظر باشند. دیوید و ناگاراچا (۲۰۰۳) و آرنولد و همکاران (۲۰۰۸) دو منبع کلیدی هستند که در زمینه آماره‌های مرتب می‌توان به آن‌ها اشاره کرد. این آماره‌ها در قابلیت اعتماد و مدل‌بندی طول عمر سیستم‌های مهندسی نقش بسزایی دارند. یک سیستم شامل  $n$  مؤلفه که فعال بودن آن منوط به فعالیت حداقل  $(n - k + 1)$  مؤلفه آن باشد، یک سیستم  $(n - k + 1)$  از

آدرس الکترونیکی نویسنده مسئول مقاله: زهرا صابرزاده، [saberrzadez@yahoo.com](mailto:saberrzadez@yahoo.com)  
 کد موضوع بندی ریاضی (۲۰۱۰): 62P20

۱۴۰ میانگین مانده عمر سیستم‌های مرکب دو مؤلفه‌ای با تعدادی مؤلفه فعال

$n$  نامیده می‌شود. بدیهی است که طول عمر چنین سیستمی برابر  $X_{k:n}$  می‌باشد. در سال‌های اخیر محققین زیادی از جمله فرناندز (۲۰۱۰)، کوچار و زو (۲۰۱۰)، صالحی و همکاران (۲۰۱۱)، پرورده و بالاکربشنان (۲۰۱۴)، توانگر (۲۰۱۴)، هاشمی بصر و صالحی (۱۳۹۶) روی این سیستم‌ها مطالعات گسترده‌ای انجام داده‌اند.

در متون قابلیت اعتماد، میانگین مانده عمر ( $MRL$ ) یک سیستم  $(n - k + 1)$  از  $n$  به صورت

$$\Phi(t) = E(X_{k:n} - t | X_{k:n} > t).$$

تعریف می‌شود. بایراموف و همکاران (۲۰۰۲)، تابع  $MRL$  متفاوتی برای سیستم به صورت  $E(X_{n:n} - t | X_{1:n} > t)$  تعریف کرده‌اند، که نشان دهنده  $MRL$  سیستم موازی است به شرط این که هیچ یک از مؤلفه‌های آن در زمان  $t$  از کار نیفتاده باشد. لی و ژاو (۲۰۰۶) تابع  $MRL$  را به صورت

$$E(X_{s:n} - t | X_{r:n} > t); \quad 1 \leq r < s \leq n.$$

توسعه دادند. حالت‌های خاصی از توابع فوق توسط اسدی و بایراموف (۲۰۰۵، ۲۰۰۶) مورد توجه قرار گرفته است. تاکنون تحقیقات زیادی در مورد نسخه‌های مختلف میانگین مانده عمر انجام شده است. به عنوان مثال می‌توان به اسدی و گلی فروشانی (۲۰۰۸)، خنجری (۲۰۱۱)، اریلماز (۲۰۱۲)، توانگر و بایراموف (۲۰۱۵)، توانگر و اسدی (۲۰۱۶)، صالحی و هاشمی بصر (۲۰۱۷) اشاره کرد. همچنین بررسی ترتیب‌های تصادفی روی متغیرهای تصادفی مانده عمر توسط محققین زیادی مورد توجه قرار گرفته است. برای مثال لی و ژاو (۲۰۰۸) مقایسه تصادفی زمان غیر فعال و طول عمر مانده یک  $G$  سیستم  $k$  از  $n$  را مورد توجه قرار داده‌اند و رضاپور و همکاران (۲۰۱۳) به مقایسه تصادفی طول عمر مانده و گذشته یک سیستم  $(n - k + 1)$  از  $n$  با مؤلفه‌های وابسته پرداخته‌اند. در اکثر پژوهش‌هایی که تاکنون انجام شده است، سیستم در نظر گرفته شده شامل  $n$  جزء بوده که هر یک از اجزای سیستم شامل یک مؤلفه می‌باشد. با این وجود در عمل ممکن است با سیستم‌های  $n$  جزئی که هر یک از اجزای آن‌ها شامل دو یا چند مؤلفه است، مواجه شویم. به عنوان مثال فرض کنید یک کارخانه لوازم الکتریکی شامل  $n$  خط تولید و هر خط به ترتیب دارای دو دستگاه وابسته  $A_i$  و  $B_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) باشد. همچنین فرض کنید در هر خط، هر یک از دو دستگاه یکی از دو جزء اساسی محصول را تولید کنند و برای رسیدن به محصول نهایی لازم است که تعداد مشخصی از اجزا تولید شوند. اگر تعداد دستگاه‌های فعال  $A_1, \dots, A_n$  کمتر از  $r_1$

و تعداد دستگاه‌های فعال  $B_1, \dots, B_n$  کمتر از  $r_2$  باشند، فرایند متوقف می‌شود، به عبارتی سیستم از کار افتاده تلقی می‌شود. بنابراین، برای این که چنین سیستمی فعال باشد، باید حداقل  $r_1$  دستگاه از بین دستگاه‌های  $A_1, \dots, A_n$  و حداقل  $r_2$  دستگاه از بین دستگاه‌های  $B_1, \dots, B_n$  فعال باشند. چنین سیستم‌هایی سیستم‌های مرکب  $(r_1, r_2)$  از  $n$  نامیده می‌شوند. بایراموف (۲۰۱۳) تحقیق جالبی روی چنین سیستم‌هایی انجام داده است. وی به بررسی قابلیت اعتماد و میانگین مانده عمر در این سیستم‌ها پرداخته و تابع  $MRL$  این سیستم‌های مرکب را مشروط بر این که همه مؤلفه‌های آن‌ها در زمان  $t$  فعال باشند، مورد مطالعه قرار داده است. اریلماز (۲۰۱۷) با در نظر گرفتن برخی قیده‌های خاص روی تابع ساختار این سیستم‌ها، تحقیق بایراموف (۲۰۱۳) را تعمیم داد. همچنین رزمخواه و صابرزاده (۲۰۱۷) با در نظر گرفتن سیستم‌های مرکب سه مؤلفه‌ای به توسعه تحقیق بایراموف (۲۰۱۳) پرداختند.

در این مقاله سیستم‌های مرکب دو مؤلفه‌ای در نظر گرفته می‌شود که برخی از مؤلفه‌های آن‌ها، نه همه آن‌ها، در زمان مشخص  $t$  فعال هستند و میانگین مانده عمر چنین سیستم‌هایی مورد ارزیابی قرار می‌گیرد. برای این منظور در بخش ۲ سیستم‌های مرکب دو مؤلفه‌ای معرفی می‌شود. مدل دو جمله‌ای دومتغیره و برخی از تعمیم‌های آن در بخش ۳ ارائه می‌شود. میانگین مانده عمر سیستم‌های مرکب مورد نظر در بخش ۴ محاسبه می‌شود. در بخش ۵ رفتار این تابع تحت مدل فارلی-گامبل-مورگنشترن<sup>۱</sup> ( $FGM$ ) برای برخی حالات خاص با استفاده از محاسبات عددی بررسی می‌شود. در بخش ۶ بحث و نتیجه‌گیری ارائه خواهد شد.

## ۲ سیستم‌های مرکب دو مؤلفه‌ای

سیستمی را در نظر بگیرید که دارای  $n$  جزء بوده و جزء  $i$ ام ( $i = 1, \dots, n$ ) آن شامل دو مؤلفه  $A_i$  و  $B_i$  باشد. فرض کنید  $X_i$  طول عمر مؤلفه  $A_i$  و  $Y_i$  طول عمر مؤلفه  $B_i$  باشد. همچنین، فرض کنید مؤلفه‌های  $i$ امین جزء به هم وابسته‌اند، یعنی  $X_i$  و  $Y_i$  متغیرهای تصادفی وابسته با تابع توزیع توأم  $F(x, y)$  باشند، اما اجزای سیستم مستقل از هم کار کنند، به عبارتی  $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$  بردارهای تصادفی مستقل از هم باشند. در این سیستم‌ها، فرض بر این است که اولین مؤلفه هر جزء با اولین مؤلفه سایر اجزا هم‌توزیع بوده و برای دومین مؤلفه اجزای سیستم نیز چنین رابطه‌ای برقرار باشد. به منظور بررسی ساختار

<sup>1</sup>Farlie-Gumbel-Morgenstern model

۱۴۲ ..... میانگین مانده عمر سیستم‌های مرکب دو مؤلفه‌ای با تعدادی مؤلفه فعال

این سیستم‌ها، برای  $i$  امین  $(i = 1, \dots, n)$  جزء، متغیرهای نشانگر

$$s_i = \begin{cases} 1, & \text{اگر اولین مؤلفه‌ی } i \text{ امین جزء، یعنی } A_i \text{ فعال باشد} \\ 0, & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

و

$$u_i = \begin{cases} 1, & \text{اگر دومین مؤلفه } i \text{ امین جزء، یعنی } B_i \text{ فعال باشد} \\ 0, & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

در نظر گرفته می‌شوند.

تعریف ۱: یک سیستم  $n$  جزئی با دو مؤلفه وابسته در هر جزء یک سیستم مرکب  $(r_1, r_2)$  از  $n$  نامیده می‌شود هرگاه سیستم فعال باشد اگر و تنها اگر حداقل  $r_1$  تا از مؤلفه‌های  $A_1, \dots, A_n$  و حداقل  $r_2$  تا از مؤلفه‌های  $B_1, \dots, B_n$  فعال باشند. تابع ساختار این سیستم برابر است با

$$\phi_{r_1, r_2}(s_1, u_1, \dots, s_n, u_n) = \begin{cases} 1, & \text{اگر } \sum_{i=1}^n u_i \geq r_2 \text{ و } \sum_{i=1}^n s_i \geq r_1 \\ 0, & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

طول عمر یک سیستم مرکب  $(r_1, r_2)$  از  $n$  با  $(X_{n-r_1+1:n}, Y_{n-r_2+1:n})$  نمایش داده می‌شود. همان‌طور که مشاهده می‌کنید قابلیت اعتماد این سیستم به توزیع توأم  $(n - r_1 + 1)$  امین آماره مرتب از نمونه تصادفی  $X_1, \dots, X_n$  و  $(n - r_2 + 1)$  امین آماره مرتب بدست آمده از نمونه تصادفی  $Y_1, \dots, Y_n$  بستگی دارد. قابلیت اعتماد و میانگین مانده عمر این سیستم‌ها را می‌توان با استفاده از مدل دو جمله‌ای دو متغیره و دو تعمیم آن بدست آورد که در بخش بعد مورد بررسی قرار می‌گیرند.

### ۳ مدل دو جمله‌ای دو متغیره و تعمیم‌های آن

مدل دو جمله‌ای دو متغیره اولین بار توسط آیتگن و گونین (۱۹۳۵) معرفی شد. فرض کنید یکی از پیشامدهای  $E_0 = E_0^c$  و  $E_1$  و به طور همزمان یکی از دو پیشامد  $F_1$  و  $F_1^c = F_0$  با احتمال‌های توأم  $P(E_i F_j) = p_{ij}$  ( $i, j = 0, 1$ ) رخ دهند به قسمی که  $\sum_{i,j} p_{ij} = 1$ . اگر  $\xi_1$  و  $\xi_2$  به ترتیب نمایانگر

تعداد دفعاتی باشند که پیشامدهای  $E_1$  و  $F_1$  در یک نمونه تصادفی  $n$  تایی با جایگذاری رخ می‌دهند، آن‌گاه

$$P(\xi_1 = i, \xi_2 = j) = \sum_{k=\max\{0, i+j-n\}}^{\min\{i, j\}} c_1(n, k; i, j) p_{11}^k p_{10}^{i-k} p_{01}^{j-k} p_{00}^{n-i-j+k} \\ = \eta(i, j; \underline{p}), \quad (1)$$

که در آن  $\underline{p} = (p_{11}, p_{10}, p_{01}, p_{00})$  و

$$c_1(n, k; i, j) = \frac{n!}{k!(i-k)!(j-k)!(n-i-j+k)!}. \quad (2)$$

در ادامه دو تعمیم از مدل دوجمله‌ای دومتغیره ارائه می‌شوند که برای محاسبات این مقاله مفید هستند.

تعمیم ۱: فرض کنید یکی از پیشامدهای  $E_1, E_2, E_3$  و به طور همزمان یکی از دو پیشامد  $F_1$  و  $F_2$  با احتمالات توأم  $1, 2, 3, j = 1, 2$   $P(E_i F_j) = q_{ij}; i = 1, 2, 3, j = 1, 2$  رخ دهند، طوری که  $\sum_{ij} q_{ij} = 1$ . همچنین، فرض کنید  $\xi_1, \xi_2$  و  $\xi_3$  به ترتیب تعداد دفعاتی باشند که پیشامدهای  $E_1, E_2, E_3$  در یک نمونه تصادفی با جایگذاری و به حجم  $n$  رخ می‌دهند، در این صورت تابع جرم احتمال توأم  $(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$  را می‌توان از رابطه

$$P(\xi_1 = i, \xi_2 = j, \xi_3 = k) = \sum_{m=0}^{\min\{i, k\}} \sum_{\ell=0}^{\min\{j, k\}} c_2(i, j, k, m, \ell) q_{11}^m q_{12}^{i-m} q_{21}^{\ell} \\ \times q_{22}^{j-\ell} q_{31}^{k-m-\ell} q_{32}^{n-i-j-k+m+\ell} \\ = \tau(i, j, k; \underline{q}), \quad (3)$$

بدست آورد، که در آن  $\underline{q} = (q_{11}, q_{12}, q_{21}, q_{22}, q_{31}, q_{32})$  و

$$c_2(i, j, k, m, \ell) = \frac{n!}{m!(i-m)!\ell!(j-\ell)!(k-m-\ell)!(n-i-j-k+m+\ell)!}.$$

توجه شود که رخداد پیشامد  $\{\xi_1 = i, \xi_2 = j, \xi_3 = k\}$  منوط به رخداد حالت‌های مختلفی از پیشامدهای  $E_i$  و  $F_j$  ( $i = 1, 2, 3, j = 1, 2$ ) است، که در جدول ۱ نمایش داده شده است. با توجه به این

۱۴۴ ..... میانگین مانده عمر سیستم‌های مرکب دو مؤلفه‌ای با تعدادی مؤلفه فعال

جدول ۱: حالت‌های مختلف پیشامدهای  $E_i$  و  $F_j$  ( $i = 1, 2, 3, j = 1, 2$ ) برای محاسبه رابطه (۳)

مجموع	$E_3$	$E_2$	$E_1$	
$k$	$k - m - \ell$	$\ell$	$m$	$F_1$
$n - k$	$n - i - j - k + m + \ell$	$j - \ell$	$i - m$	$F_2$
$n$	$n - i - j$	$j$	$i$	مجموع

جدول، مقادیر  $m$  و  $\ell$  باید به گونه‌ای تغییر کنند تا در روابط زیر صدق کنند

$$m \geq 0, \ell \geq 0, (k - m - \ell) \geq 0,$$

$$(i - m) \geq 0, (j - \ell) \geq 0, (n - i - j - k + m + \ell) \geq 0.$$

به طور معادل می‌توان حدود کامل‌تری برای  $m$  و  $\ell$  به صورت زیر معرفی کرد

$$0 \leq \max\{0, i + j + k - n - \ell\} \leq m \leq \min\{i, k - \ell\} \leq \min\{i, k\},$$

$$0 \leq \max\{0, i + j + k - n - m\} \leq \ell \leq \min\{j, k - m\} \leq \min\{j, k\}.$$

به عبارتی تمام مقادیر ممکن  $(m, \ell)$  در مجموعه زیر خلاصه می‌شود

$$A_{m,\ell} = \{(m, \ell) : \max\{0, i + j + k - n - \ell\} \leq m \leq \min\{i, k - \ell\},$$

$$\max\{0, i + j + k - n - m\} \leq \ell \leq \min\{j, k - m\}\}$$

در نتیجه رابطه (۳) را می‌توان به صورت زیر بازنویسی نمود

$$P(\xi_1 = i, \xi_2 = j, \xi_3 = k) = \sum_{A_{m,\ell}} c_2(i, j, k, m, \ell) q_{11}^m q_{12}^{i-m} q_{21}^\ell$$

$$\times \frac{q_{22}^{j-\ell} q_{31}^{k-m-\ell} q_{32}^{n-i-j-k+m+\ell}}{q_{33}}.$$

تعمیم ۲: در یک مدل سه جمله‌ای دو متغیره فرض کنید یکی از پیشامدهای  $E_1, E_2$  و  $E_3$  و به طور همزمان یکی از سه پیشامد  $F_1, F_2$  و  $F_3$  با احتمالات توأم  $i, j = 1, 2, 3$  رخ دهند، طوری

که  $\sum_{ij} r_{ij} = 1$ . همچنین، فرض کنید  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$  و  $\xi_4$  به ترتیب تعداد پیشامدهای  $E_1, E_2, E_3$  و  $F_1$  و  $F_2$  در یک نمونه تصادفی با جایگذاری و به حجم  $n$  را نشان دهند، در این صورت،

$$\begin{aligned}
 & P(\xi_1 = k_1, \xi_2 = k_2, \xi_3 = k_3, \xi_4 = k_4) \\
 &= \sum_{m=0}^{\min\{k_1, k_3\}} \sum_{\ell=0}^{\min\{k_1, k_4\}} \sum_{d=0}^{\min\{k_2, k_3\}} \sum_{c=0}^{\min\{k_2, k_4\}} c_3(k_1, k_2, k_3, k_4; n) r_{11}^m r_{12}^\ell \\
 &\times r_{13}^{k_1-m-\ell} r_{21}^d r_{22}^c r_{23}^{k_2-d-c} r_{31}^{k_3-m-d} r_{32}^{k_4-\ell-c} r_{33}^{n-\sum_{i=1}^4 k_i+m+\ell+d+c} \\
 &= \Lambda(k_1, k_2, k_3, k_4; \underline{r}), \tag{۴}
 \end{aligned}$$

که در آن  $\underline{r} = (r_{11}, r_{12}, r_{13}, r_{21}, r_{22}, r_{23}, r_{31}, r_{32}, r_{33})$  و

$$\begin{aligned}
 c_3(k_1, k_2, k_3, k_4; n) &= n! / \{m! \ell! (k_1 - m - \ell)! d! c! (k_2 - d - c)! \\
 &(k_3 - m - d)! (k_4 - \ell - c)! (n - \sum_{i=1}^4 k_i + m + \ell + d + c)!\}.
 \end{aligned}$$

تعداد حالاتی که پیشامدهای مختلف در یک نمونه به حجم  $n$  رخ می‌دهند تا رابطه (۴) برقرار باشد را می‌توان در جدول ۲ ملاحظه نمود.

جدول ۲: حالت‌های مختلف پیشامدهای  $E_i$  و  $F_j$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ) برای محاسبه رابطه (۴)

مجموع	$E_3$	$E_2$	$E_1$	
$k_3$	$k_3 - m - d$	$d$	$m$	$F_1$
$k_4$	$k_4 - \ell - c$	$c$	$\ell$	$F_2$
$n - k_3 - k_4$	$n - \sum_{i=1}^4 k_i + m + \ell + d + c$	$k_2 - d - c$	$k_1 - m - \ell$	$F_3$
$n$	$n - k_1 - k_2$	$k_2$	$k_1$	مجموع

توجه شود که حدود  $m, \ell, d, c$  در روابط زیر صدق می‌کنند

$$\begin{aligned}
 & m \geq 0, d \geq 0, (k_3 - m - d) \geq 0, \ell \geq 0, c \geq 0, \\
 & (k_4 - \ell - c) \geq 0, (k_1 - m - \ell) \geq 0, (k_2 - d - c) \geq 0, \\
 & (n - \sum_{i=1}^4 k_i + m + \ell + d + c) \geq 0.
 \end{aligned}$$

#### ۴ میانگین مانده عمر

یک سیستم مرکب  $(r_1, r_2)$  از  $n$  را در نظر بگیرید که در آن حداقل  $(n - s_1 + 1)$  مؤلفه از  $X_i$ ها و حداقل  $(n - s_2 + 1)$  مؤلفه از  $Y_i$ ها در زمان  $t$  فعال باشند. متغیر مانده عمر این سیستم به صورت

$$T_{r_1, r_2, s_1, s_2; n} = (X_{n-r_1+1:n} - t, Y_{n-r_2+1:n} - t | X_{s_1:n} > t, Y_{s_2:n} > t)$$

تعریف می‌شود. بنابراین تابع  $MRL$  برای  $(n - r_1 + 1) > s_1$  و  $(n - r_2 + 1) > s_2$  برابر است با

$$\Phi_{r_1, r_2, s_1, s_2; n}(t) = E(T_{r_1, r_2, s_1, s_2; n}) = \int_0^{\infty} P(T_{r_1, r_2, s_1, s_2; n} > x) dx. \quad (5)$$

برای محاسبه تابع  $\Phi_{r_1, r_2, s_1, s_2; n}(t)$  ابتدا لازم است تابع بقای متغیر شرطی  $T_{r_1, r_2, s_1, s_2; n}$  مشخص گردد. توجه شود که

$$\begin{aligned} P(T_{r_1, r_2, s_1, s_2; n} > x) &= \\ P(X_{n-r_1+1:n} > t + x, Y_{n-r_2+1:n} > t + x | X_{s_1:n} > t, Y_{s_2:n} > t) &= \\ \frac{P(X_{n-r_1+1:n} > t + x, Y_{n-r_2+1:n} > t + x, X_{s_1:n} > t, Y_{s_2:n} > t)}{P(X_{s_1:n} > t, Y_{s_2:n} > t)}. & \quad (6) \end{aligned}$$

احتمال مخرج کسر در رابطه (۶) قبلاً توسط بایراموف (۲۰۱۳) بدست آمده است. بدین منظور در مدل دو جمله‌ای دو متغیره پیشامدهای  $\{X_i > t\}$ ,  $E_1 = \{X_i > t\}$ ,  $E_0 = \{X_i \leq t\}$ ,  $F_1 = \{Y_i > t\}$  و  $F_0 = \{Y_i \leq t\}$  را در نظر بگیرید. با استفاده از (۱) می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} P(X_{s_1:n} > t, Y_{s_2:n} > t) &= \sum_{i=n-s_1+1}^n \sum_{j=n-s_2+1}^n \eta(i, j; \tilde{p}) \\ &= \sum_{i=n-s_1+1}^n \sum_{j=n-s_2+1}^n \sum_{k=\max\{s_1, i+j-n\}}^{\min\{i, j\}} c_1(n, k; i, j) (p_{11}(t))^i \\ &\quad \times (p_{10}(t))^{i-k} (p_{01}(t))^{j-k} (p_{00}(t))^{n-i-j+k} \end{aligned}$$



$$= \Gamma(s_1, s_2, n; t), \tag{۷}$$

که در آن  $c_1(n, k; i, j)$  در رابطه (۲) تعریف شده است. همچنین،

$$\begin{aligned} p_{11}(t) &= P(E_1 F_1) = P(X > t, Y > t) = \bar{F}(t, t), \\ p_{10}(t) &= P(E_1 F_0) = P(X > t, Y \leq t) = \bar{F}_X(t) - \bar{F}(t, t), \\ p_{01}(t) &= P(E_0 F_1) = P(X \leq t, Y > t) = \bar{F}_Y(t) - \bar{F}(t, t), \\ p_{00}(t) &= P(E_0 F_0) = P(X \leq t, Y \leq t) = F(t, t). \end{aligned}$$

اما برای محاسبه احتمال صورت کسر در رابطه (۶) توجه شود که پیشامدهای دلخواه  $M$ ،  $N$  و  $D$  در  $D_1 \cap D_2$  زیر صدق می کنند

$$\begin{aligned} P(M \cap N \cap D) &= P(M \cap N) - P(M \cap N \cap D^c) \\ &= P(M \cap N) - P((M \cap N \cap D_1^c) \cup (M \cap N \cap D_2^c)) \\ &= P(M \cap N) - P(M \cap N \cap D_1^c) - P(M \cap N \cap D_2^c) \\ &+ P(M \cap N \cap D_1^c \cap D_2^c). \end{aligned} \tag{۸}$$

حال پیشامدهای  $N = \{Y_{n-r_1+1:n} > t+x\}$ ،  $M = \{X_{n-r_1+1:n} > t+x\}$  و  $D_1 = \{X_{s_1:n} > t\}$  و  $D_2 = \{Y_{s_2:n} > t\}$  را در نظر بگیرید. از رابطه (۸)، نتیجه می شود

$$\begin{aligned} &P(X_{n-r_1+1:n} > t+x, Y_{n-r_1+1:n} > t+x, X_{s_1:n} > t, Y_{s_2:n} > t) \\ &= P(X_{n-r_1+1:n} > t+x, Y_{n-r_1+1:n} > t+x) \\ &- P(X_{n-r_1+1:n} > t+x, Y_{n-r_1+1:n} > t+x, X_{s_1:n} \leq t) \\ &- P(X_{n-r_1+1:n} > t+x, Y_{n-r_1+1:n} > t+x, Y_{s_2:n} \leq t) \\ &+ P(X_{n-r_1+1:n} > t+x, Y_{n-r_1+1:n} > t+x, X_{s_1:n} \leq t, Y_{s_2:n} \leq t). \end{aligned} \tag{۹}$$

۱۴۸ ..... میانگین مانده عمر سیستم‌های مرکب دو مؤلفه‌ای با تعدادی مؤلفه فعال

فرض کنید  $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$  بردارهای تصادفی مستقل و هم‌توزیع با تابع توزیع توأم  $F(x, y)$  و توابع توزیع حاشیه‌ای  $F_X(x)$  و  $F_Y(y)$  باشند. در این صورت، موارد زیر نتیجه می‌شوند:

- جمله اول سمت راست در رابطه (۹) به راحتی با استفاده از (۷) بدست می‌آید. به عبارتی

$$P(X_{n-r_1+1:n} > t+x, Y_{n-r_2+1:n} > t+x) = \Gamma(n-r_1+1, n-r_2+1, n; t+x).$$

- با استفاده از نتایج تعمیم ۱، می‌توان جمله دوم سمت راست (۹) را با تعریف پیشامدهای  $E_1 = \{Y > t+x\}$  و همچنین  $F_1 = \{X > t+x\}$ ،  $E_2 = \{X > t+x\}$ ،  $F_2 = \{Y > t+x\}$  و  $F_2 = \{Y \leq t+x\}$  محاسبه نمود. با استفاده از (۳)، نتیجه می‌شود

$$P(X_{n-r_1+1:n} > t+x, Y_{n-r_2+1:n} > t+x, X_{s_1:n} \leq t) = \sum_{i=s_1}^n \sum_{j=r_1}^{n-i} \sum_{k=r_2}^n \tau(i, j, k; \underline{q}(t, x)),$$

که در آن  $\underline{q}(t, x) = (q_{11}(t, x), \dots, q_{r_2}(t, x))$  به قسمی که

$$\begin{aligned} q_{11}(t, x) &= P(X \leq t, Y > t+x) = F_X(t) - F(t, t+x), \\ q_{12}(t, x) &= P(X \leq t, Y \leq t+x) = F(t, t+x), \\ q_{21}(t, x) &= P(X > t+x, Y > t+x) = \bar{F}(t+x, t+x), \\ q_{22}(t, x) &= P(X > t+x, Y \leq t+x) = F_Y(t+x) - F(t+x, t+x), \\ q_{r_1}(t, x) &= P(t < X \leq t+x, Y > t+x) = \bar{F}(t, t+x) - \bar{F}(t+x, t+x), \\ q_{r_2}(t, x) &= P(t < X \leq t+x, Y \leq t+x) = F(t+x, t+x) - F(t, t+x). \end{aligned}$$

- مشابه حالت قبل، با تعریف پیشامدهای  $E_1 = \{Y \leq t\}$ ،  $E_2 = \{Y > t+x\}$ ،  $F_1 = \{X > t+x\}$  و  $F_2 = \{X \leq t+x\}$  و با استفاده

از (۳)، رابطه

$$P(X_{n-r_1+1:n} > t+x, Y_{n-r_2+1:n} > t+x, Y_{s_1:n} \leq t) \\ = \sum_{i=s_1}^n \sum_{j=r_1}^{n-i} \sum_{k=r_1}^n \tau(i, j, k; \underline{q}^*(t, x))$$

بدست می‌آید، که در آن  $(q_{11}^*(t, x), \dots, q_{r_2}^*(t, x))$   $\underline{q}^*(t, x)$  طوری که

$$q_{11}^*(t, x) = F_Y(t) - F(t+x, t), \quad q_{1r_2}^*(t, x) = F(t+x, t), \\ q_{r_1}^*(t, x) = \bar{F}(t+x, t+x), \quad q_{r_2}^*(t, x) = \bar{F}_Y(t+x) - \bar{F}(t+x, t+x), \\ q_{r_1}^*(t, x) = \bar{F}(t+x, t) - \bar{F}(t+x, t+x), \\ q_{r_2}^*(t, x) = F(t+x, t+x) - F(t+x, t).$$

- برای محاسبه جمله آخر سمت راست رابطه (۹) از مدل سه‌جمله‌ای دومتغیره استفاده میشود. به طور خاص در این مدل پیشامدهای

$$E_1 = \{X \leq t\}, \quad E_2 = \{X > t+x\}, \quad E_3 = \{t < X \leq t+x\}, \\ F_1 = \{Y \leq t\}, \quad F_2 = \{Y > t+x\}, \quad F_3 = \{t < Y \leq t+x\}.$$

را در نظر بگیرید. به‌وضوح ملاحظه می‌شود

$$P(X_{n-r_1+1:n} > t+x, Y_{n-r_2+1:n} > t+x, X_{s_1:n} \leq t, X_{s_2:n} \leq t) \\ = \sum_{k_1=s_1}^n \sum_{k_2=r_1}^{n-k_1} \sum_{k_3=s_2}^n \sum_{k_4=r_2}^{n-k_3} \Lambda(k_1, k_2, k_3, k_4; \underline{r}(t, x)),$$

که در آن  $(\Lambda(k_1, k_2, k_3, k_4; \underline{r}(t, x)))$  در رابطه (۴) تعریف شده است، طوری که

$$r_{11}(t, x) = P(X \leq t, Y \leq t) = F(t, t), \\ r_{12}(t, x) = P(X \leq t, Y > t+x) = F_X(t) - F(t, t+x),$$

۱۵۰ ..... میانگین مانده عمر سیستم‌های مرکب دو مؤلفه‌ای با تعدادی مؤلفه فعال

$$\begin{aligned}
 r_{12}(t, x) &= P(X \leq t, t < Y \leq t + x) = F(t, t + x) - F(t, t), \\
 r_{21}(t, x) &= P(X > t + x, Y \leq t) = F_Y(t) - F(t + x, t), \\
 r_{22}(t, x) &= P(X > t + x, Y > t + x) = \bar{F}(t + x, t + x), \\
 r_{23}(t, x) &= P(X > t + x, t < Y \leq t + x) = \bar{F}(t + x, t) - \bar{F}(t + x, t + x), \\
 r_{31}(t, x) &= P(t < X \leq t + x, Y \leq t) = F(t + x, t) - F(t, t), \\
 r_{32}(t, x) &= P(t < X \leq t + x, Y > t + x) = \bar{F}(t, t + x) - \bar{F}(t + x, t + x), \\
 r_{33}(t, x) &= P(t < X \leq t + x, t < Y \leq t + x) \\
 &= \bar{F}(t, t) - \bar{F}(t, t + x) - \bar{F}(t + x, t) + \bar{F}(t + x, t + x).
 \end{aligned}$$

بنابراین با استفاده از نتایج فوق، می‌توان تابع  $MRL$  یک سیستم مرکب  $(r_1, r_2)$  از  $n$  که در زمان  $t$  برخی از مؤلفه‌ها آن فعال هستند را محاسبه نمود.

تذکر ۱: با روش‌های عددی مقادیر  $\Phi_{r_1, r_2, s_1, s_2; n}(t)$  به ازای  $s_1 = s_2 = 1$  محاسبه شده است که دقیقاً بر نتایج بایراموف (۲۰۱۳) منطبق هستند.

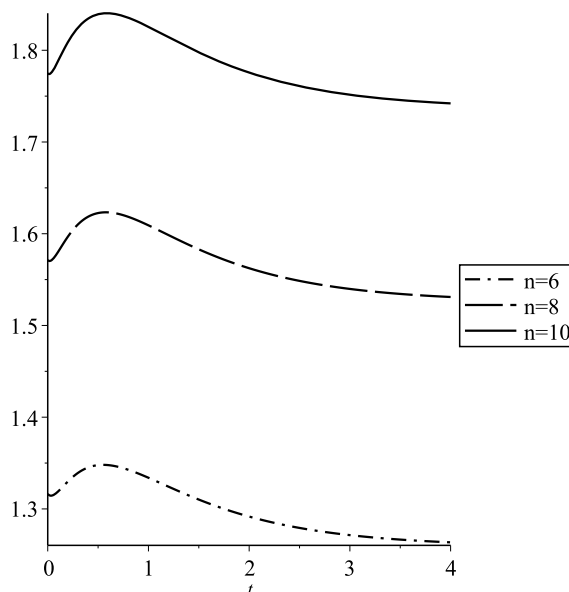
## ۵ محاسبات عددی

یک سیستم  $(r_1, r_2)$  از  $n$  که در زمان  $t$  حداقل  $(n - s_1 + 1)$  مؤلفه اول و حداقل  $(n - s_2 + 1)$  مؤلفه دوم هر جزء آن فعال هستند را در نظر بگیرید. فرض کنید  $(X_i, Y_i)$  در  $i$  امین  $(i = 1, \dots, n)$  جزء، دارای مدل  $FGM$  با تابع توزیع توأم

$$F(x, y) = F_X(x)F_Y(y)\{1 + \alpha(1 - F_X(x))(1 - F_Y(y))\}, \alpha \in [-1, 1],$$

باشد، که در آن  $\alpha$  پارامتر وابستگی بین متغیرهای تصادفی  $X$  و  $Y$  است. برای جزئیات بیشتر در مورد این مدل به ماری و کاتز (۲۰۰۱) و نلسن (۲۰۰۶) مراجعه نمایید. همچنین فرض کنید توابع توزیع حاشیه‌ای، نمایی استاندارد باشند. با استفاده از (۵)، تغییرات تابع  $\Phi_{1, 2, 1; n}(t)$  نسبت به  $t$ ، به ازای مقدار ثابت  $\alpha = 0.7$  و  $n = 6, 8, 10$  رسم شده است. همان‌طور که ملاحظه می‌شود رفتار این تابع نسبت به  $t$  صعودی - نزولی است به گونه‌ای که برای مقادیر بسیار بزرگ  $t$  دارای یک مجانب افقی می‌باشد. همچنین به ازای یک مقدار ثابت  $t$ ، با افزایش تعداد اجزای چنین سیستمی، میانگین مانده عمر آن نیز

افزایش می‌یابد. در این سیستم اهمیت تعداد اجزای زیاد در رسیدن به یک سیستم کارآمد مشخص می‌شود.

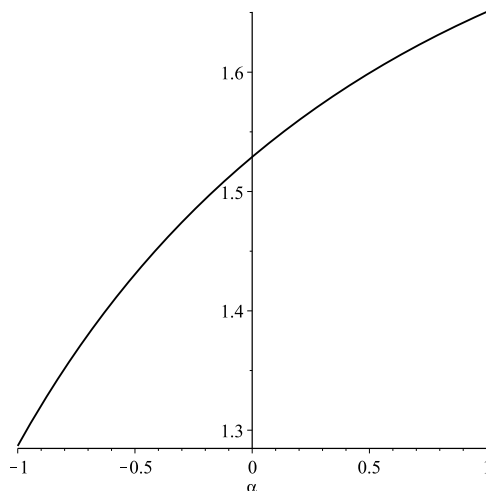


شکل ۱: رفتار تابع  $\Phi_{1,2,2,1:n}(t)$  نسبت به  $t$ ، به ازای  $\alpha = 0.7$  تحت حاشیه‌های نمایشی

در شکل ۲ رفتار تابع  $\Phi_{1,2,2,1:n}(t)$  را نسبت به پارامتر  $\alpha$  مشاهده می‌کنید. با توجه به این شکل مشخص می‌شود که میانگین عمر سیستم با وابستگی بین دو متغیر  $X$  و  $Y$  رابطه‌ای مستقیم دارد. در حقیقت  $\Phi_{1,2,2,1:n}(t)$  تابعی صعودی از  $\alpha$  است. به منظور بررسی تأثیر استفاده از توزیع‌های حاشیه‌ای مختلف در مدل  $FGM$  بر میانگین عمر مانده عمر یک سیستم مرکب، توزیع وایبول با تابع توزیع

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x^\beta}, \quad x > 0.$$

نیز مورد بررسی قرار می‌گیرد. تغییرات تابع  $\Phi_{1,2,2,1:n}(t)$  نسبت به  $t$ ، به ازای  $\alpha = 0.7$ ،  $(\beta, \lambda) = (0.5, 0.5)$  و  $n = 6, 8, 10$  در شکل ۳ رسم شده است. مشاهده می‌شود که تغییرات این تابع نسبت به  $t$  اکیداً صعودی است که متفاوت از رفتار آن در موقعیتی است که توزیع‌های حاشیه مدل  $FGM$ ، نمایشی استاندارد باشند. اما مشابه آن موقعیت با افزایش تعداد اجزای سیستم، میانگین مانده عمر این سیستم نیز افزایش می‌یابد.

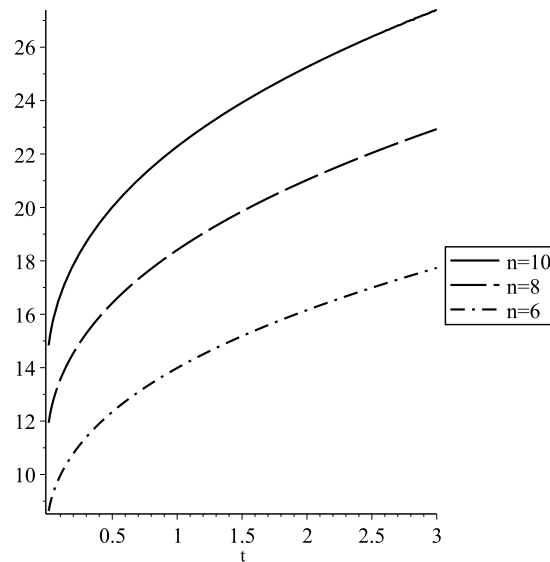


شکل ۲: رفتار تابع  $\Phi_{1,2,2,1;n}(t)$  نسبت به  $\alpha$ ، به ازای  $n = 8$ ،  $t = 0.7$

برای بررسی حساسیت  $MRL$  نسبت به تغییر پارامترها از سایر مقادیر  $(\beta, \lambda)$  نیز استفاده شده است. در حالتی که  $\beta = 1$ ، به ازای مقادیر مختلف  $\lambda$  رفتار تابع  $MRL$  نسبت به  $t$  شبیه شکل ۱ است و در حالتی که  $\lambda = 1$  و  $\beta < 1$ ، نمودار  $MRL$  مشابه شکل ۳ می‌باشد. در پایان برای بررسی تغییرات تابع  $MRL$  نسبت به برخی مقادیر  $r_1, r_2, s_1, s_2$  یک سیستم  $(r_1, r_2)$  از  $\gamma$  تحت مدل  $FGM$  با پارامتر وابستگی  $\alpha$  و توابع توزیع حاشیه‌ای نمایی استاندارد در نظر گرفته شده است. میانگین مانده عمر این سیستم به ازای مقادیر مختلف  $r_1, r_2, s_1, s_2$  در نقطه  $t = 0.6$  در جدول ۳ گزارش شده‌اند. مشاهده می‌شود که با ثابت نگه داشتن سه مقدار از بین  $r_1, r_2, s_1, s_2$  و افزایش مقدار چهارم،  $MRL$  سیستم کاهش می‌یابد.

جدول ۳: مقادیر  $\Phi_{1,2,2,1;\gamma}(0.6)$  به ازای  $\alpha = 0.7$  و برخی مقادیر  $r_1, r_2, s_1, s_2$

$(r_1, r_2) = (2, 2)$				$(s_1, s_2) = (2, 2)$			
$s_1 = 3$	$s_2$	$s_2 = 1$	$s_1$	$r_1 = 1$	$r_2$	$r_2 = 3$	$r_1$
1/13	1	1/28	1	1/88	1	0/98	1
1/07	2	1/21	2	1/37	2	0/88	2
1/01	3	1/13	3	0/98	3	0/74	3
0/94	4	1/06	4	0/66	4	0/57	4
0/88	5	1/00	5	0/41	5	0/38	5
0/83	6	0/96	6	0/2	6	0/2	6



شکل ۳: رفتار تابع  $\Phi_{1,2,2,1:n}(t)$  نسبت به  $t$ ، به ازای  $\alpha = 0.7$  تحت توزیع‌های حاشیه‌ای وایبول

## ۶ بحث و نتیجه‌گیری

در این مقاله سیستم‌های مرکب  $(r_1, r_2)$  از  $n$  با این شرط که در زمان  $t$  برخی از مؤلفه‌های آن‌ها فعال باشند، مورد توجه قرار گرفت. با استفاده از مدل دوجمله‌ای دو متغیره و تعمیم‌هایی از آن، ابتدا تابع قابلیت اعتماد متغیر مانده عمر چنین سیستمی محاسبه شد و سپس میانگین این متغیر بدست آمد. در حقیقت این مطالعه تعمیمی بر تحقیق انجام شده توسط بایراموف (۲۰۱۳) بود که وی تابع  $MRL$  را مشروط بر فعال بودن تمامی مؤلفه‌ها در زمان  $t$  بررسی کرد. با استفاده از محاسبات عددی رفتار تابع  $MRL$  بدست آمده در برخی حالات خاص مورد بررسی واقع شد. مشاهده شد در حالت خاص یک سیستم مرکب  $(1, 2)$  از  $n$  که حداقل  $(n-1)$  مؤلفه از جزء اول و تمامی مؤلفه‌های جزء دوم در زمان  $t$  فعال باشند، تابع  $MRL$  نسبت به همه پارامترهای زمان، تعداد اجزاء و پارامتر وابستگی در مدل  $FGM$  با توابع حاشیه‌ای وایبول صعودی است.

همان‌طور که ملاحظه شد سیستم‌های مورد مطالعه در این مقاله شامل دو مؤلفه وابسته در هر جزء بودند، در حالیکه در عمل می‌توان سیستم‌هایی با بیش از دو مؤلفه‌ی وابسته در هر جزء را نیز در نظر گرفت. همچنین، می‌توان از سایر مدل‌های وابستگی به غیر از مدل  $FGM$  به منظور توصیف ارتباط بین متغیرها

۱۵۴ ..... میانگین مانده عمر سیستم‌های مرکب دو مؤلفه‌ای با تعدادی مؤلفه فعال

استفاده نمود. به علاوه، تمرکز این مقاله بر محاسبه‌ی میانگین مانده‌ی عمر برخی از سیستم‌های مرکب دو مؤلفه‌ای بود، که به‌طور مشابه می‌توان تحقیقاتی در مورد میانگین گذشته‌ی عمر چنین سیستم‌هایی انجام داد.

## تقدیر و تشکر

نویسندگان کمال تشکر و قدردانی از داوران محترم مقاله و ویراستار مجله که با پیشنهادات ارزنده خود باعث بهبود مقاله شدند را دارند.

## مراجع

هاشمی بصر، ش. و صالحی، ا. (۱۳۹۶)، نتایجی در تعمیم زمان از کار افتادگی سیستم های  $(n-k+1)$  از  $n$  با واحدهای وابسته، مجله علوم آماری، ۱۱، ۱۹۶-۱۷۵.

Aitken, A. C. and Gonin, H. T. (1935), On Fourfold Sampling with and without Replacement, *Proceedings of the Royal Society Edinburgh*, **55**, 114-125.

Arnold, B. C., Balakrishnan, N. and Nagaraja, H. N. (2008), *A First Course in Order Statistics*, Philadelphia, SIAM.

Asadi, M. and Bairamov, I. (2005), A Note on the Mean Residual Life Function of a Parallel System, *Communications in Statistics-Theory and Methods*, **34**, 475-484.

Asadi, M. and Bairamov, I. (2006), The Mean Residual Life Function of a k-out-of-n Structure at the System Level, *IEEE Transactions on Reliability*, **55**, 314-318.

Asadi, M. and Goliforushani, S. (2008), On the Mean Residual Life Function of Coherent Systems, *IEEE Transactions on Reliability*, **57**, 574-580.

Bairamov, I. (2013), Reliability and Mean Residual Life of Complex Systems with Two Dependent Components Per Element, *IEEE Transactions on Reliability*, **62**, 276-285.

Bairamov, I., Ahsanullah, M. and Akhundov I. (2002), A Residual Life Function of a System Having Parallel or Series Structures, *Journal of Statistical Theory and Application*, **2**, 119-132.

David, H. and Nagaraja H. N. (2003), *Order Statistics*, John Wiley and Sons.



- Eryilmaz, S. (2012), On the Mean Residual Life of a k-out-of-n: G System with a Single Cold Standby Component, *Journal of European Operational Research*, **222**, 273-277.
- Eryilmaz, S. (2017), Reliability Analysis of Systems with Components Having Two Dependent Subcomponents, *Communication in Statistics-Simulation and Computation*, **46**, 8005-8017.
- Fernandez, A. J. (2010), Tolerance Limits for k-out-of-n Systems with Exponentially Distributed Component Lifetimes, *IEEE Transactions on Reliability*, **59**, 331-337.
- Kochar, S. and Xu, M., (2010), On Results Lifetimes of k-out-of-n Systems with Non-Identical Components, *Probability in the Engineering and Informational Sciences*, **24**, 109-127.
- Khanjari, M. (2011), A Note on Mean Residual Life Function of a Coherent System with Exchangeable or Nonidentical Components, *Journal of Statistical Planning and Inference*, **141**, 3267-3275.
- Li, X. and Zhao, P., (2006), Some Aging Properties of the Residual Life of k-out-of-n System, *IEEE Transactions on Reliability*, **55**, 535-541.
- Li, X. and Zhao, P., (2008), Stochastic Comparison on General Inactivity Time and General Residual Life of k-out-of-n: G systems, *Communications in Statistics - Simulation and Computation*, **37**, 1005-1019.
- Mari, D. D. and Kotz, S. (2001), *Correlation and Dependence*, London: Imperial College Press.
- Nelsen, R. B. (2006), *An Introduction to Copulas*, Second Edition, Springer.
- Parvardeh, A. and Balakrishnan, N. (2014), On the Conditional Residual Life and Inactivity Time of Coherent Systems, *Journal of Applied Probability*, **51**, 990-998.
- Razmkhah, M. and Saberzade, Z. (2017), On the Reliability of Complex Systems with Three Dependent Components Per Element, *Journal of the Iranian Statistical Society (JIRSS)*, **16**, 1-17.
- Rezapour, M. Salehi, E. T. and Alamatsaz, M. H. (2013), Stochastic Comparison of Residual and Past Lifetimes of (n-k+1)-out-of-n Systems with Dependent Components, *Communications in Statistics-Theory and Methods*, **42**, 2185-2199.
- Salehi, E., Asadi, M. and Eryilmaz, S. (2011), Reliability Analysis of Consecutive k-out-of-n Systems with Non-identical Components Lifetimes, *Journal of Statistical Planning and Inference*, **141**, 2920-2932.

میانگین مانده عمر سیستم‌های مرکب دو مؤلفه‌ای با تعدادی مؤلفه فعال ..... ۱۵۶

Salehi, E. and Hashemi-Bosra, S. S., (2017), The Mean General Residual Lifetime of  $(n-k+1)$ -out-of- $n$  Systems with Exchangeable Components, *Communications in Statistics-Theory and Methods*, **46**, 6382-6400.

Tavangar, M., (2014), Some Comparisons of Residual Life of Coherent Systems with Exchangeable Components, *Naval Research Logistics*, **61**, 549-556.

Tavangar, M. and Bairamov, I., (2015), On Conditional Residual Lifetime and Conditional Inactivity Time of  $k$ -out-of- $n$  Systems, *Reliability Engineering and System Safety*, **144**, 225-233.

Tavangar, M. and Asadi, M., (2016), Some Representation Theorems in Terms of Mean Residual Lifetime and Mean Inactivity Time of Coherent Systems, *Communications in Statistics-Theory and Methods*, **45**, 226-235.