



برآورد آنتروپی با روش‌های بوت‌استرپ و جک‌نایف و کاربرد آن در آزمون نرمال بودن

عاطفه پورکاظمی، هادی علیزاده نوقابی، سارا جمهوری

دانشگاه بیرجند، گروه آمار

چکیده: در این مقاله ابتدا به معرفی دو روش بوت‌استرپ و جک‌نایف پرداخته و آنتروپی به کمک این روش‌ها برآورد شده‌اند. سپس برآوردگرهای آنتروپی بوت‌استرپ و جک‌نایف به کمک شبیه‌سازی از لحاظ جذر میانگین توان دوم خطا و اریبی در سه توزیع نرمال، نمایی و یکنواخت بررسی شده‌اند. برآوردگرهای آنتروپی بوت‌استرپ و جک‌نایف با برآوردگرهای معروف دیگر به کمک شبیه‌سازی مونت کارلو مقایسه شده‌اند. نتایج مطالعات شبیه‌سازی نشان می‌دهد که برآوردگرهای جک‌نایف و بوت‌استرپ عملکرد نسبتاً خوبی نسبت به سایر برآوردگرهای آنتروپی دارند. سپس تعدادی آزمون نرمال بودن براساس برآوردگرهای پیشنهادی معرفی و توان آن‌ها با توان سایر آزمون‌ها مقایسه شده‌اند.

واژه‌های کلیدی: آنتروپی، بوت‌استرپ، جک‌نایف، آزمون نرمال بودن، توان آزمون.

° آدرس الکترونیک مسئول مقاله: هادی علیزاده نوقابی، alizadehhadi@birjand.ac.ir
کد موضوع‌بندی ریاضی (۲۰۱۰): ۶۲G۰۵، ۶۲B۱۰.

۱ مقدمه

فرض کنید متغیر تصادفی X دارای تابع توزیع $F(x)$ با تابع چگالی مطلقاً پیوسته $f(x)$ باشد. شانون (۱۹۴۸) آنتروپی این متغیر تصادفی را به صورت

$$H(f) = - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \log(f(x)) dx, \quad (1)$$

تعریف کرد. با توجه به کاربردهای فراوان مفهوم آنتروپی در مباحث آماری، مساله برآورد آنتروپی بر مبنای نمونه تصادفی X_1, \dots, X_n توسط محققین زیادی از جمله واسیچک (۱۹۷۶)، ون ای اس (۱۹۹۲)، کوریا (۱۹۹۵)، ابراهیمی و همکاران (۱۹۹۴) و ویزورکوسکی و گورزگورسکی (۱۹۹۹) مورد بررسی قرار گرفته است. از میان تمام این برآوردها، برآوردگر واسیچک (۱۹۷۶) به واسطه سادگی در محاسبات بسیار مورد استفاده قرار می گیرد.

فرض کنید $X_{(1)}, \dots, X_{(n)}$ آماره های مرتب نظیر نمونه ای تصادفی به اندازه n از توزیع F باشند، در این صورت برآوردگر آنتروپی واسیچک (۱۹۷۶) به صورت

$$HV_{mn} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log\left(\frac{n}{2m}(X_{(i+m)} - X_{(i-m)})\right), \quad (2)$$

است، که در آن m یک عدد کوچکتر یا مساوی $\frac{n}{4}$ است. ضمناً، به ازای $i < 1$ $X_{(i)} = X_{(1)}$ و به ازای $i > n$ $X_{(i)} = X_{(n)}$ برآوردگر (۱۹۹۲) ون ای اس

$$HVE_{mn} = \frac{1}{n-m} \sum_{i=1}^{n-m} (\log(X_{(i+m)} - X_{(i)})) + \sum_{k=m}^n \frac{1}{k} \quad (3)$$

را برای آنتروپی معرفی نمود. وی نشان داد برآوردگر (۳) سازگار است و تحت برخی شرایط

$$n^{1/2}(HVE_{mn} + \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \log(f(x)) dx) \xrightarrow{D} N(0, \text{var}(\log(f(X_1)))) \quad (4)$$

ابراهیمی و همکاران (۱۹۹۴) برآوردگر خود را بر مبنای اصلاح ضرایب برآوردگر واسیچک (۱۹۷۶) در نقاط انتهایی c_i ها وقتی که $i \leq m$ و $i \geq n - m + 1$ ، به صورت

$$HE_{mn} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log\left(\frac{n}{c_i}(X_{(i+m)} - X_{(i-m)})\right) \quad (5)$$

معرفی کردند، که در آن

$$c_i = \begin{cases} m+i-1 & 1 \leq i \leq m \\ 2m & m+1 \leq i \leq n-m \\ m+n-1 & n-m+1 \leq i \leq n \end{cases} \quad (6)$$

و برای $i < 1$ ، $X_{(i)} = X_{(1)}$ و به ازای $i > n$ ، $X_{(i)} = X_{(n)}$. مطالعات شبیه‌سازی ابراهیمی و همکاران (۱۹۹۴) نشان می‌دهد که برآوردگر پیشنهادی آن‌ها اریبی و توان دوم خطای کمتری نسبت به برآوردگر واسیچک (۱۹۷۶) دارد. کوریا (۱۹۹۵) برآوردگر دیگری برای آنتروپی پیشنهاد داد که میانگین توان دوم خطای کمتری نسبت به برآوردگر واسیچک (۱۹۷۶) دارد. این برآوردگر به صورت

$$HC_{mn} = -\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log(b_i) \quad (7)$$

است، که در آن $b_i = \frac{\sum_{j=i-m}^{i+m} (X_{(j)} - \bar{X}_{(i)}) (\frac{j-i}{n})}{\sum_{j=i-m}^{i+m} (X_{(j)} - \bar{X}_{(i)})^2}$ و $\bar{X}_{(i)} = \frac{\sum_{j=i-m}^{i+m} X_{(j)}}{2m+1}$ و ویزورکوسکی و گورزگورزسکی (۱۹۹۹) برآوردگر آنتروپی

$$HW_{mn} = HV_{mn} - \log(n) + \log(2m) + c, \quad (8)$$

را پیشنهاد کردند، که در آن

$$c = -\left(1 - \frac{2m}{n}\right) \Psi(2m) + \Psi(n+1) - \frac{2}{n} \sum_{i=1}^m \Psi(i+m-1), \quad (9)$$

و $\Psi(x) = \frac{d \log \Gamma(x)}{dx} = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$ تعریف و در حالت کلی به صورت $\Psi(k) = \sum_{i=1}^{k-1} \left(\frac{1}{i}\right) - \gamma$ محاسبه می‌شود که در آن $\gamma = 0.57721566490 \dots$ نویسنده‌گان قبلی بعد از معرفی برآوردگرشان آن را با برخی از برآوردگرها مقایسه و عملکرد برآوردگر پیشنهادی‌شان را بررسی کردند. در این مقاله برآوردگرهایی به کمک روش‌های باز نمونه‌گیری معرفی و سپس به مقایسه آن‌ها پرداخته می‌شود. یک مطالعه کلی بین برآوردگرها و مقایسه‌ای جامع از لحاظ جذر میانگین توان دوم خطا و اریبی برای حجم نمونه‌های مختلف انجام و همچنین رفتار و عملکرد تمامی برآوردگرها برای داده‌های واقعی بررسی شده‌اند. برآوردگرهای آنتروپی در مسائل آماری کاربرد فراوان دارند. برای مثال در مبحث آزمون‌های نیکویی برازش از برآوردگرهای آنتروپی استفاده می‌کنند و آزمون‌های مبتنی بر آنتروپی می‌سازند. حبیبی‌راد و ارقامی (۱۳۸۶)

براساس برآوردگر آنتروپی واسیچک آزمونی برای تقارن یک توزیع معرفی و سپس توان آزمون خود را با سایر آزمون‌های تقارن مقایسه و نتیجه گرفتند که آزمون براساس آنتروپی از توان خوبی نسبت به سایر آزمون‌های موجود برخوردار است. علیزاده و علیزاده (۱۳۸۷) آزمون‌های نرمال بودن و نمایی بودن براساس آنتروپی را در نظر گرفتند، و به کمک شیه‌سازی نشان دادند که برای برخی از فرضیه‌های جانشین آزمون‌های مبتنی بر آنتروپی از توان خوبی برخوردارند. علیزاده و همکاران (۱۳۸۷) به بررسی برآوردگرهای مختلف آنتروپی پرداختند و سپس این برآوردگرها را برای آزمون نمایی بودن بکار بردند. آن‌ها از مقایسه توان این آزمون‌ها با توان سایر آزمون‌ها نتیجه گرفتند که آزمون‌های مبتنی بر آنتروپی از توان بالایی برخوردارند. زمان‌زاده و ارقامی (۱۳۸۷) و زمان‌زاده (۱۳۹۲) ابتدا برآوردگرهای اصلاح شده‌ای برای آنتروپی معرفی کردند و سپس براساس این برآوردگرها آزمون‌هایی برای توزیع‌های نرمال و نمایی ساختند و نتیجه گرفتند که آزمون‌های جدید در مقابل برخی فرضیه‌های جانشین، از توان بالاتری نسبت به آزمون‌های قبلی برخوردار هستند. عباس‌نژاد و شکوری (۱۳۸۷) و عباس‌نژاد و محمدی (۱۳۸۹) براساس برآوردی از اطلاع رنی به ترتیب آزمون‌هایی برای توزیع نمایی و تقارن یک توزیع ساختند و سپس به مقایسه توان آزمون‌های ساخته شده با سایر آزمون‌های قبلی پرداختند. آن‌ها نشان دادند که آزمون‌های مبتنی بر اطلاع رنی از توان بالاتری نسبت به آزمون‌های مبتنی بر آنتروپی برخوردار هستند. بعلاوه محققانی همچون یوسف‌زاده و ارقامی (۲۰۰۸)، علیزاده و ارقامی (۲۰۱۱)، حبیبی‌راد و همکاران (۲۰۱۱)، زمان‌زاده و ارقامی (۲۰۱۱)، بالاکریشنان و حبیبی‌راد (۲۰۰۷)، چو و کیم (۲۰۰۶)، استبان و همکاران (۲۰۰۱)، لیم و پارک (۲۰۰۷)، مودهولکر و تیان (۲۰۰۲)، پارک (۲۰۰۵)، ردرايگز (۲۰۰۹)، برات‌پور و حبیبی‌راد (۲۰۱۲) آزمون‌هایی بر اساس برآوردگرهای آنتروپی معرفی کردند. لذا برآوردگرهای آنتروپی از اهمیت ویژه‌ای برخوردارند که در اینجا به بررسی آن‌ها پرداخته می‌شود.

۲ روش‌های باز نمونه‌گیری

بوت‌استرپ و جک‌نایف دو روش باز نمونه‌گیری هستند که به طور مختصر به معرفی آن‌ها پرداخته می‌شود. تکنیک‌های به کار گرفته شده در این تعاریف به تحقیقات بردلی و گیل (۱۹۸۳) برمی‌گردد. بوت‌استرپ به روش‌های مونت‌کارلو اطلاق می‌شود که نمونه تصادفی اولیه را به عنوان چارچوب جامعه در نظر می‌گیرد و سپس نمونه‌های مونت کارلو را از خود نمونه اولیه با جایگزینی انتخاب می‌کند. در این روش هیچ فرض پارامتری در مورد جامعه‌ای که نمونه مورد نظر از آن تولید شده وجود ندارد. برای این‌کار یک توزیع یکنواخت

گسسته روی نمونه تصادفی در دسترس در نظر گرفته می‌شود. بنابراین به هر واحد در نمونه تصادفی، احتمال $1/n$ تخصیص داده می‌شود. حال از نمونه اولیه $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ یک نمونه تصادفی با جایگذاری $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ انتخاب می‌شود. در نمونه با جایگذاری انتخاب شده، ممکن است بعضی از x_i ها بیش از یک بار مشاهده شوند و بعضی نیز اصلاً مشاهده نشوند. حال فرض کنید B بار این کار تکرار شود و نمونه‌های $x^{*1}, x^{*2}, \dots, x^{*n}$ ساخته شوند. نمونه x^{*i} را یک نمونه بوت‌استرپ از x نامند. در بسیاری از مسائل آماری هدف یافتن برآوردی از پارامتر مجهول θ با استفاده از یک آماره و نمونه تصادفی x به صورت $\hat{\theta} = T(x)$ است. در مواردی که برآورد پیچیده و مشکل است، روش بوت‌استرپ می‌تواند برای برآورد پارامتر θ و حتی برآورد انحراف استاندارد و اریبی برآوردگر به کار گرفته شود. فرض کنید

$$\hat{\theta}^{*i} = T(x^{*i}), \quad i = 1, \dots, B.$$

در این صورت، $\hat{\theta}^{*i}$ ها را تکرارهای بوت‌استرپ از $\hat{\theta}$ می‌نامند. با استفاده از این تکرارهای بوت‌استرپ می‌توان یک توزیع تجربی از آماره $\hat{\theta} = T$ را بدست آورد. برای برآورد خطای استاندارد در روش بوت‌استرپ ابتدا تکرارهای بوت‌استرپ از $\hat{\theta}$ را بدست آورده و یک برآورد برای خطای استاندارد $\hat{\theta}$ ، با خطای استاندارد نمونه‌ای تکرارهای بوت‌استرپ به صورت

$$\widehat{SE}(\hat{\theta}) = \sqrt{\frac{1}{B-1} \sum_{i=1}^B (\hat{\theta}^{*i} - \bar{\theta}^*)^2},$$

بدست خواهد آمد، که در آن

$$\bar{\theta}^* = \frac{1}{B} \sum_{i=1}^B \hat{\theta}^{*i}.$$

بردلی و گیل (۱۹۸۳) نشان داده‌اند که در برآورد خطای استاندارد مقادیر B بهتر است بین 50 تا 200 باشد. برای محاسبه میزان اریبی یک برآوردگر، بعد از ساختن تکرارهای بوت‌استرپ برآورد میزان اریبی را می‌توان به صورت

$$\widehat{bias}(\theta) = \bar{\theta}^* - \hat{\theta} \quad (10)$$

محاسبه نمود، که در آن $\bar{\theta}^*$ متوسط تکرارهای بوت‌استرپ و $\hat{\theta}$ مقدار بدست آمده برآوردگر از روی نمونه تصادفی اولیه است. بردلی و گیل (۱۹۸۳) نشان داده‌اند که تعداد نمونه‌های بوت‌استرپ در برآورد میزان اریبی

می بایست بیشتر از تعداد نمونه ها در برآورد خطای استاندارد باشد. همچنین می توان میزان آریبی بدست آمده را از مقدار برآوردگر کم کرد (اریبی را تصحیح کرد) و به برآوردگر جدیدی با آریبی کمتر به شکل

$$\hat{\theta}_{boot} = \hat{\theta} - \widehat{bias}(\theta) = 2\hat{\theta} - \bar{\theta}^*,$$

رسید. البته ممکن است برآوردگر جدید $\hat{\theta}_{boot}$ نسبت به برآوردگر اولیه $\hat{\theta}$ دارای واریانس بیشتری باشد. لذا پیشنهاد می شود که انحراف استاندارد و آریبی هر دو با روش بوت استرپ برآورد شوند و اگر مقدار میزان آریبی نسبت به خطای استاندارد زیادتر بود، سپس اقدام به تصحیح آریبی کرد. در بسیاری از زمینه های آماری هدف ساختن یک مدل مناسب برای بیان ارتباط بین چند متغیر است. ولی متأسفانه در بسیاری از اوقات محققان بی تجربه مدلی بر اساس داده های یک مجموعه می سازند و مجدداً از داده های همان مجموعه استفاده می کنند تا اعتبار مدلشان را برآورد کنند. مشکل این کار این است که مدلی که بر پایه یک مجموعه از داده ها ساخته می شود معمولاً نسبت به آن مجموعه کمترین خطای ممکن را دارد.

هدف روش جک نایف همانند روش بوت استرپ، برآورد میزان آریبی و خطای استاندارد یک برآوردگر است. در این روش نیز هیچ فرض پارامتری در مورد توزیع جامعه وجود ندارد. فرض کنید هدف برآورد پارامتر θ و $\hat{\theta} = T(x_1, \dots, x_n)$ برآوردگری برای این پارامتر باشد. در روش جک نایف یکی از داده های x_i از نمونه اصلی خارج و نمونه جک نایف به صورت $x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n$ حاصل می شود. مقدار برآوردگر T با استفاده از i -امین نمونه جک نایف به صورت $\hat{\theta}_{-i} = T(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)$ محاسبه و i -امین تکرار جک نایف نامیده می شود. با تکرار این کار تا اینکه تمامی داده های نمونه یکبار از نمونه خارج شوند، دنباله ای از n تکرار جک نایف بدست خواهد آمد. برآورد آریبی آماره T با روش جک نایف به صورت

$$\widehat{bias}_{Jack}(\hat{\theta}) = (n-1)(\bar{\theta}_\circ - \hat{\theta}), \quad (11)$$

محاسبه می شود، که در آن

$$\bar{\theta}_\circ = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \hat{\theta}_{-i}.$$

همچنین خطای استاندارد برآورد شده با روش جک نایف به صورت

$$\widehat{SE}_{Jack}(\hat{\theta}) = \frac{n-1}{n} \sum_{i=1}^n (\hat{\theta}_{-i} - \bar{\theta}_\circ)^2$$

تعریف می‌شود، که در آن $\widehat{SE}_{Jack}(T)$ یک برآوردگر نااریب برای خطای استاندارد آماره T است. برآوردگر تصحیح شده جک‌نایف نیز به صورت

$$\hat{\theta}_{Jack} = \hat{\theta} - \widehat{bias}_{Jack}(\hat{\theta}) = n\hat{\theta} - (n-1)\bar{\hat{\theta}}_s$$

تعریف می‌شود، که $\hat{\theta}_{Jack}$ اریبی کمتری نسبت به $\hat{\theta}$ دارد. هدف این مقاله به‌کارگیری روش‌های بوت‌استرپ و جک‌نایف بر برآوردگرهای آنتروپی و مقایسه‌ای بین برآوردگرهای آنتروپی بدست آمده با استفاده از این روش‌ها از نظر اریبی و جذر میانگین توان دوم خطا است. در بخش ۳ برآوردگرهای آنتروپی به کمک روش‌های بوت‌استرپ و جک‌نایف محاسبه شده‌اند. در بخش ۴ برآوردگرهای آنتروپی به کمک شبیه‌سازی از نظر اریبی و جذر میانگین مربعات خطا با یکدیگر مقایسه می‌شوند. در بخش ۵ از برآوردگرهای پیشنهادی استفاده و آزمون‌هایی برای نرمال بودن توزیع جامعه معرفی شده‌اند. در پایان از کارهای انجام شده نتیجه‌گیری خواهد شد.

۳ برآوردگرهای آنتروپی به کمک بوت‌استرپ و جک‌نایف

با اعمال روش بوت‌استرپ بر تعریف (۱) برآورد آنتروپی به روش بوت‌استرپ به صورت

$$\widehat{H}(f)_{boot} = \widehat{H}(f) - \widehat{bias}(H(f)) = 2\widehat{H}(f) - \overline{\widehat{H}(f)}^*$$

تعریف می‌شود. برای برآورد خطای استاندارد ابتدا تکرارهای بوت‌استرپ از $\widehat{H}(f)$ را بدست آورده و یک برآورد برای خطای استاندارد $\widehat{H}(f)$ با خطای استاندارد نمونه‌ای تکرارهای بوت‌استرپ به صورت

$$\widehat{SE}(\widehat{H}(f)) = \sqrt{\frac{1}{B-1} \sum_{i=1}^B (\widehat{H}(f)^{*i} - \overline{\widehat{H}(f)}^*)^2}$$

بدست خواهد آمد، که در آن

$$\overline{\widehat{H}(f)}^* = \frac{1}{B} \sum_{i=1}^B \widehat{H}(f)^{*i}$$

بعد از ساختن تکرارهای بوت‌استرپ، برآورد میزان اریبی را می‌توان به صورت

$$\widehat{bias}(H(f)) = \overline{\widehat{H}(f)}^* - \widehat{H}(f). \quad (12)$$

محاسبه کرد. با اعمال روش جک نایف بر تعریف (۱) برآورد آنتروپی به روش جک نایف به صورت

$$\widehat{H(f)}_{Jack} = \widehat{H(f)} - \widehat{bias}_{Jack}(\widehat{H(f)}) = n\widehat{H(f)} - (n-1)\overline{\widehat{H(f)}}, \quad (13)$$

تعریف می شود. که در آن

$$\overline{\widehat{H(f)}} = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^n \widehat{H(f)}_{-i}.$$

برآورد اریبی و خطای استاندارد این برآوردگر به ترتیب به صورت

$$\widehat{bias}_{Jack}(\widehat{H(f)}) = (n-1)(\overline{\widehat{H(f)}} - \widehat{H(f)}) \quad (14)$$

$$\widehat{SE}_{Jack}(\widehat{H(f)}) = \frac{n-1}{n} \sum_{i=0}^n (\widehat{H(f)}_{-i} - \overline{\widehat{H(f)}})^2 \quad (15)$$

تعریف می شود. حال با جایگزین کردن پنج برآوردگر آنتروپی واسیچک (۱۹۷۶)، ون ای اس (۱۹۹۲)، کوریا (۱۹۹۵)، ویزورکوسکی و گورزگورزسکی (۱۹۹۹) و ابراهیمی و همکاران (۱۹۹۴) بجای $\widehat{H(f)}$ برآوردگرهای آنتروپی بر حسب بوت استرپ و جک نایف بدست می آیند.

واسیچک (۱۹۷۶)، بر اساس خاصیت ماکسیم آنتروپی توزیع نرمال، آزمونی را معرفی نمود. سپس آن را با دیگر آزمون ها مقایسه و مشاهده کرد که این آزمون برای برخی فرضیه های جانشین دارای توان بالاتری نسبت به دیگر آزمون ها است. دادویچ و وندرمولن (۱۹۸۱)، مودهولکر و تیان (۲۰۰۲) و چو و کیم (۲۰۰۶) برای برخی توزیع ها آزمون هایی را بر اساس خاصیت ماکسیم آنتروپی معرفی نمودند و نشان دادند که آزمون های مبتنی بر آنتروپی دارای توان نسبتا خوبی هستند. یوسف زاده و ارقامی (۲۰۰۸) ابتدا یک برآوردگر پیشنهادی برای تابع توزیع پیشنهاد و سپس به کمک آن آزمون های نیکویی برازش بر اساس آنتروپی را انجام دادند. علیزاده نوقابی (۲۰۱۰)، بر اساس برآوردگر پیشنهادی برای آنتروپی، آزمون هایی برای توزیع های نرمال، نمایی و یکنواخت ساخت. زمان زاده و ارقامی (۲۰۱۱) بر اساس برآوردگری پیشنهادی برای آنتروپی، آزمون هایی برای توزیع های نرمال و نمایی ساختند. برات پور و حبیبی راد (۲۰۱۲)، یک آماره آزمون بر اساس آنتروپی تجمعی ارائه کردند.

۴ مقایسه برآوردهای آنتروپی

در این بخش دقت برآوردهای آنتروپی معرفی شده برای توزیع‌های پیوسته نرمال استاندارد، نمایی با میانگین یک و یکنواخت (۰, ۱) از لحاظ اریبی و جذر میانگین توان دوم خطا با یکدیگر مقایسه می‌شود. برای این منظور از این توزیع‌ها نمونه‌ای به حجم n تولید کرده و آنتروپی را با استفاده از برآوردهای نام برده در بخش قبل محاسبه و مقادیر اریبی و جذر میانگین توان دوم خطای برآوردها به صورت

$$Bias(\widehat{H}(f)) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \widehat{H}(f)_{(i)} - H(f)$$

$$RMSE(\widehat{H}(f)) = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\widehat{H}(f)_{(i)} - H(f))^2}$$

محاسبه می‌شود، که در آن‌ها N تعداد دفعات شبیه‌سازی می‌باشد. $\widehat{H}(f)_i$ مقدار برآوردهای آنتروپی واسیچک (۱۹۷۶)، ون‌ای‌اس (۱۹۹۲)، کوریا (۱۹۹۵)، ابراهیمی و همکاران (۱۹۹۴) و ویزورکوسکی و گورزگورزسکی (۱۹۹۹) در نمونه شبیه‌سازی شده i ام و $H(f)$ مقدار آنتروپی جامعه است. مثلاً برای توزیع‌های نرمال استاندارد، نمایی با میانگین یک و یکنواخت (۰, ۱) مقدار آنتروپی به ترتیب برابر ۱، ۱/۴۱۹، و ۰ است. برای محاسبه برآوردهای آنتروپی، ابتدا بایستی مقدار m مشخص شود. شبیه‌سازی‌ها نشان می‌دهند که مقدار بهینه m ، که به ازای آن مقدار جذرمیانگین توان دوم خطا (یا اریبی)، می‌نیم شود، علاوه بر حجم نمونه، به توزیع واقعی جامعه تحت بررسی وابسته است، و چون در عمل، توزیع جامعه نامعلوم است، لذا نمی‌توان مقدار بهینه‌ای را برای m با فرض معلوم بودن حجم نمونه پیشنهاد داد و هنوز مساله انتخاب بهینه m به عنوان یک مساله باز، باقی‌مانده است. ویزورکوسکی و گورزگورزسکی (۱۹۹۹) پیشنهاد استفاده از رابطه $m = [\sqrt{n} + 0.5]$ برای انتخاب m هنگامی که n معلوم است، را ارائه کردند، که در آن $[\cdot]$ علامت جزء صحیح است. از مقدار پیشنهادی ویزورکوسکی و گورزگورزسکی (۱۹۹۹) برای مقایسه تمام برآوردهای آنتروپی استفاده شده است. لازم به ذکر است که اریبی برآوردهای بوت‌استرپ در رابطه (۱۱) و اریبی برآوردهای جک‌نایف در رابطه (۱۲) به طور کامل شرح داده شده است. در بخش بعد مقادیر بدست آمده در جدول‌های مربوطه آورده و همچنین نمودارهای مربوط به طور کامل رسم شده است. تعداد دفعات شبیه‌سازی ۱۰۰۰۰ بار و تعداد تکرارهای بوت‌استرپ ۱۰۰ بار است. نتایج در جدول‌های ۱ تا ۳ آورده شده است. با توجه به جدول ۱ ملاحظه می‌شود که برآوردهای HW_{nm} در توزیع نرمال استاندارد از لحاظ میانگین

توان دوم خطا عملکرد خوبی دارد. با اعمال روش جک‌نایف مشاهده می‌شود که برآوردگرهای HE_J ، HV_J و HW_J میانگین توان دوم خطای کمتری دارند. با اعمال روش بوت‌استرپ و محاسبه میانگین توان دوم خطای برآوردگرهای بوت‌استرپ مشاهده می‌شود که برآوردگر (HE_b) در توزیع نرمال استاندارد عملکرد خوبی دارد.

جدول ۱: مقادیر جذر میانگین توان دوم خطا و اریبی برآوردگرهای آنتروپی برای توزیع نرمال استاندارد.

جذر میانگین توان دوم خطا (اریبی)						برآوردگر
HE	HW	HC	HVE	HV	m n	
۰٫۴۰۵۹(-۰٫۳۰۵۴)	۰٫۳۰۱۹(-۰٫۱۴۰۵)	۰٫۴۶۸۱(-۰٫۳۸۳۲)	۰٫۳۶۵۲(-۰٫۲۳۴۱)	۰٫۶۲۲۰(۰٫۵۶۱۶)	۳ ۱۰	آنتروپی معمولی
۰٫۲۴۳۳(-۰٫۱۷۱۰)	۰٫۱۹۱۵(-۰٫۰۶۸۷)	۰٫۲۶۵۵(-۰٫۱۹۴۲)	۰٫۲۷۶۹(-۰٫۲۰۵۴)	۰٫۳۷۴۸(-۰٫۳۲۹۴)	۴ ۲۰	
۰٫۱۸۳۹(-۰٫۱۱۷۱)	۰٫۱۴۷۷(-۰٫۰۴۱۱)	۰٫۱۹۲۵(-۰٫۱۲۸۱)	۰٫۲۴۱۸(-۰٫۱۹۳۰)	۰٫۲۸۱۴(-۰٫۲۴۳)	۵ ۳۰	
۰٫۱۲۶۶(-۰٫۰۶۶۱)	۰٫۱۰۹۱(-۰٫۰۱۵۲)	۰٫۱۳۲۴(-۰٫۰۷۳۹)	۰٫۲۱۰۶(-۰٫۱۸۰۸)	۰٫۱۹۸۱(-۰٫۱۶۶۱)	۷ ۵۰	
۰٫۳۷۲۶(-۰٫۰۸۴۹)	۰٫۳۸۲۶(۰٫۰۰۱۶)	۰٫۳۸۴۹(۰٫۰۱۲۷)	۰٫۳۷۵۸(-۰٫۱۷۹۲)	۰٫۳۷۲۶(-۰٫۰۸۴۹)	۳ ۱۰	آنتروپی جک‌نایف
۰٫۲۱۹(-۰٫۰۴۵۰)	۰٫۲۱۵۲(۰٫۰۱۹۰)	۰٫۲۳۰۴(۰٫۰۳۳۲)	۰٫۲۴۴۹(-۰٫۱۲۳۷)	۰٫۲۱۹(-۰٫۰۴۵۰)	۴ ۲۰	
۰٫۱۷۰۹(-۰٫۰۳۲۰)	۰٫۱۶۸۹(۰٫۰۱۸۹)	۰٫۱۷۹۷(۰٫۰۳۳۷)	۰٫۱۹۴۸(-۰٫۱۰۷۴)	۰٫۱۷۰۹(-۰٫۰۳۲۰)	۵ ۳۰	
۰٫۱۲۴۶(-۰٫۰۱۶۶)	۰٫۱۲۵۰(-۰٫۰۱۹۵)	۰٫۱۳۳۳(-۰٫۰۳۲۶)	۰٫۱۵۰۲(-۰٫۰۹۳۲)	۰٫۱۲۴۶(-۰٫۰۱۶۶)	۷ ۵۰	
۰٫۲۸۷۵(-۰٫۰۵۶۶)	۰٫۳۰۰۴(۰٫۱۰۵۱)	۰٫۳۷۵۹(-۰٫۲۳۷۳)	۰٫۲۹۷۳(۰٫۱۸۴)	۰٫۴۲۳۷(-۰٫۳۱۶۳)	۳ ۱۰	آنتروپی بوت‌استرپ
۰٫۱۸۷۱(-۰٫۰۱۶۶)	۰٫۲۰۴۴(۰٫۰۸۵۲)	۰٫۲۲۶۳(-۰٫۱۱۹۸)	۰٫۱۹۱۴(-۰٫۰۱۳۴)	۰٫۲۵۵۵(-۰٫۱۷۵۲)	۴ ۲۰	
۰٫۱۴۸۶(۰٫۰۰۲۷)	۰٫۱۶۵۷(۰٫۰۷۳۳)	۰٫۱۷۲(-۰٫۰۷۹۱)	۰٫۱۵۵۵(-۰٫۰۴۷۲)	۰٫۱۹۶۶(-۰٫۱۲۸۷)	۵ ۳۰	
۰٫۱۱۴۷(۰٫۰۱۳۲)	۰٫۱۳۰۷(۰٫۰۶۴۱)	۰٫۱۲۴۷(-۰٫۰۴۲۷)	۰٫۱۴۰۰(-۰٫۰۸۷۷)	۰٫۱۴۳۲(-۰٫۰۸۶۸)	۷ ۵۰	

در توزیع نمایی با توجه به جدول ۲ ملاحظه می‌شود که در بین برآوردگرهای معمولی، برآوردگر آنتروپی HW میانگین توان دوم خطای کمتری دارد. با اعمال روش جک‌نایف مشاهده می‌شود که تقریباً برآوردگرها عملکرد یکسانی دارند. همچنین می‌توان دید که در بین برآوردگرهای بوت‌استرپ HE_b و HC_b عملکرد خوبی دارند.

با در نظر گرفتن نتایج بدست آمده از شبیه‌سازی میانگین توان دوم خطای برآوردگرهای آنتروپی برای توزیع یکنواخت (جدول ۳) مشاهده می‌شود برآوردگر HW در بین برآوردگرهای معمولی عملکرد نسبتاً خوبی دارد. با اعمال روش‌های جک‌نایف و بوت‌استرپ به ترتیب برآوردگرهای HW_J و HE_b از لحاظ میانگین توان دوم خطا عملکرد خوبی دارند.

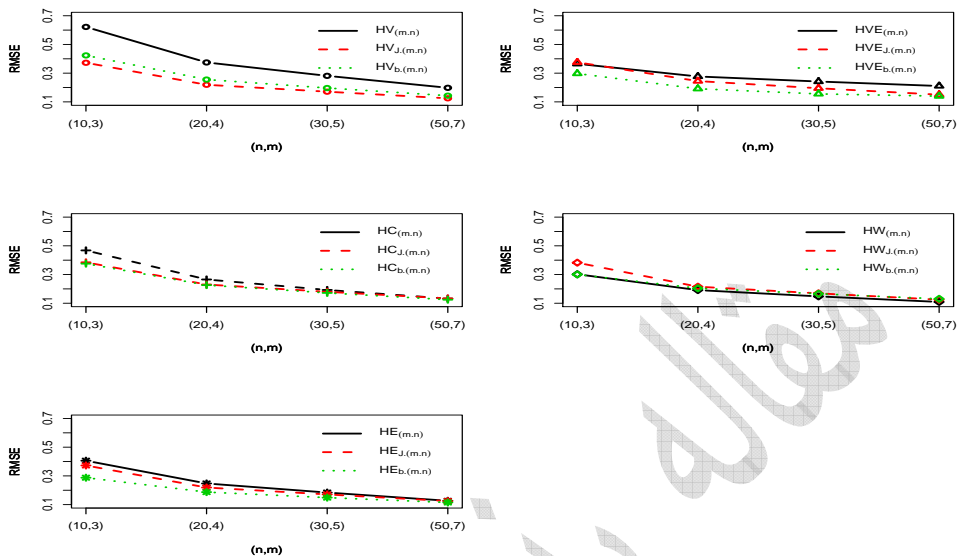
با توجه به شکل ۱، در توزیع نرمال استاندارد و از لحاظ جذر میانگین توان دوم خطا، برآوردگرهای آنتروپی ابراهیمی و همکاران (۱۹۹۴)، ویزورکوسکی و گورزگورزسکی (۱۹۹۹) و کوریا (۱۹۹۵) در حالت

جدول ۲: مقادیر جذر میانگین توان دوم خطا و اریبی برآوردگرهای آنتروپی برای توزیع نمایی با میانگین یک.

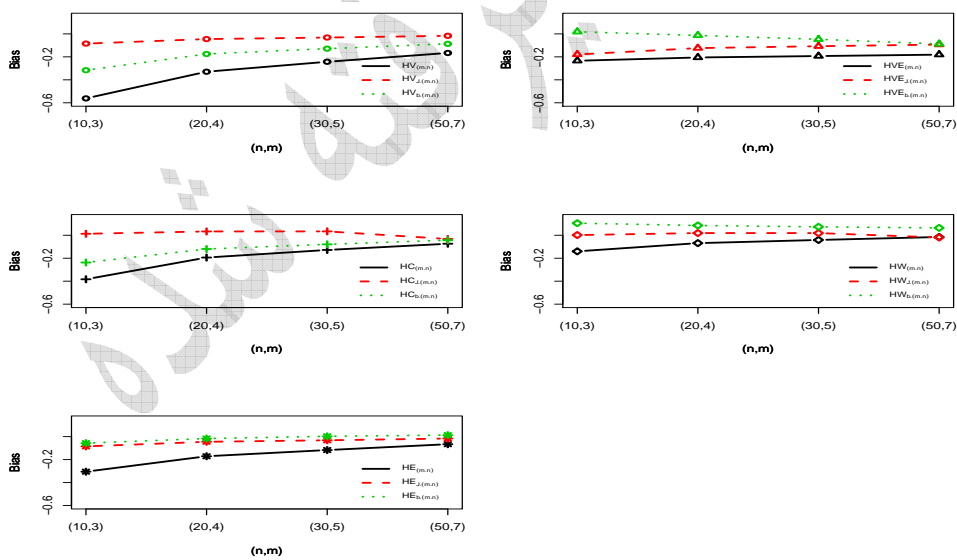
جذر میانگین توان دوم خطا (اریبی)						m	n	برآوردگر
HE	HW	HC	HVE	HV				
۰٫۴۰۳۲(-۰٫۱۸۱۹)	۰٫۳۶۰۲(-۰٫۰۱۶۵)	۰٫۴۳۷۶(-۰٫۲۴۳۳)	۰٫۳۹۱۳(-۰٫۱۱۴۸)	۰٫۵۶۶۹(-۰٫۴۳۸۱)	۳	۱۰	آنتروپی معمولی	
۰٫۲۶۰۹(-۰٫۰۹۸۶)	۰٫۲۴۱۶(۰٫۰۰۳۷)	۰٫۲۶۹۶(-۰٫۱۱۳۴)	۰٫۲۷۰۱(-۰٫۱۰۹۳)	۰٫۳۲۲۷(-۰٫۲۵۷۱)	۴	۲۰		
۰٫۲۰۳۰(-۰٫۰۶۵۴)	۰٫۱۹۲۶(۰٫۰۱۰۶)	۰٫۲۰۷(-۰٫۰۷۰۴)	۰٫۲۲۵۰(-۰٫۱۰۹۴)	۰٫۲۷۱۳(-۰٫۱۹۱۳)	۵	۳۰		
۰٫۱۵۱۶(-۰٫۰۳۰۶)	۰٫۱۴۹۸(۰٫۰۲۰۳)	۰٫۱۵۴۲(-۰٫۰۳۴۹)	۰٫۱۸۲۲(-۰٫۱۰۲۵)	۰٫۱۹۷۷(-۰٫۱۳۰۶)	۷	۵۰		
۰٫۴۴۳۰(-۰٫۰۹۴۵)	۰٫۴۳۲۹(-۰٫۰۰۷۹)	۰٫۴۵۰۱(-۰٫۰۰۳۴)	۰٫۴۳۷۵(-۰٫۱۱۹۸)	۰٫۴۴۳۰(-۰٫۰۹۴۵)	۳	۱۰	آنتروپی جکنایف	
۰٫۲۷۶۵(-۰٫۰۶۳۲)	۰٫۲۶۹۱(۰٫۰۰۰۸)	۰٫۲۷۹۱(۰٫۰۰۷۲)	۰٫۲۸۱۲(-۰٫۰۸۰۵)	۰٫۲۷۶۵(-۰٫۰۶۳۲)	۴	۲۰		
۰٫۲۱۷۹(-۰٫۰۵۱۱)	۰٫۲۱۱۸(۰٫۰۰۰۲)	۰٫۲۱۹۵(۰٫۰۰۹۳)	۰٫۲۲۳۷(-۰٫۰۷۳۲)	۰٫۲۱۷۹(-۰٫۰۵۱۱)	۵	۳۰		
۰٫۱۶۲۴(-۰٫۰۳۷۴)	۰٫۱۵۸۱(۰٫۰۰۰۱۳)	۰٫۱۶۲۵(۰٫۰۰۸۲)	۰٫۱۷۰۵(-۰٫۰۶۲۱)	۰٫۱۶۲۴(-۰٫۰۳۷۴)	۷	۵۰		
۰٫۳۷۹۲(۰٫۰۶۵۷)	۰٫۴۳۷۱(۰٫۲۲۷۱)	۰٫۳۹۶۴(-۰٫۰۹۵۱)	۰٫۴۱۸۸(۰٫۱۴۰۳)	۰٫۴۲۰۶(-۰٫۱۹۴۱)	۳	۱۰	آنتروپی بوتاسترپ	
۰٫۲۵۴۴(۰٫۰۵۱۶)	۰٫۲۹۲(۰٫۱۵۳۲)	۰٫۲۵۹۳(-۰٫۰۴۴۲)	۰٫۲۶۷۵(۰٫۰۸۶۹)	۰٫۲۷۱۱(-۰٫۱۰۷۳)	۴	۲۰		
۰٫۲۰۳۷(۰٫۰۴۵)	۰٫۲۳۱۹(۰٫۱۲۰۷)	۰٫۲۰۴۷(-۰٫۰۲۶۶)	۰٫۲۰۳۴(۰٫۰۴۰۰)	۰٫۲۱۴۴(-۰٫۰۸۱۵)	۵	۳۰		
۰٫۱۵۸۶(۰٫۰۴۲۹)	۰٫۱۷۹۳(۰٫۰۹۴۱)	۰٫۱۵۶۲(-۰٫۰۱۰۲)	۰٫۱۵۲۷(-۰٫۰۵۶۸)	۰٫۱۶۳۳(-۰٫۰۵۷۴)	۷	۵۰		

جدول ۳: مقادیر جذر میانگین توان دوم خطا و اریبی برآوردگرهای آنتروپی برای توزیع یکنواخت

جذر میانگین توان دوم خطا (اریبی)						m	n	برآوردگر
HE	HW	HC	HVE	HV				
۰٫۲۳۴۹(-۰٫۱۶۵۱)	۰٫۱۶۷۲(-۰٫۰۰۰۰۲)	۰٫۲۹۴۷(-۰٫۲۴۲۴)	۰٫۲۱۷(۰٫۰۰۳۹)	۰٫۴۵۳۲(-۰٫۴۲۱۳)	۳	۱۰	آنتروپی معمولی	
۰٫۱۳۲۸(-۰٫۱۰۱۸)	۰٫۰۸۵۲(۰٫۰۰۰۰۵)	۰٫۱۵۵۴(-۰٫۱۲۹۱)	۰٫۱۲۰۷(۰٫۰۰۰۳)	۰٫۲۷۳۹(-۰٫۲۶۰۳)	۴	۲۰		
۰٫۰۹۶۸(۰٫۰۷۶۱)	۰٫۰۵۹۸(-۰٫۰۰۰۰۱)	۰٫۱۱۱۲(-۰٫۰۹۲۶)	۰٫۰۸۷۴(-۰٫۰۰۰۰۲)	۰٫۲۱۰۷(-۰٫۲۰۲۰)	۵	۳۰		
۰٫۰۶۲۷(-۰٫۰۵۰۸)	۰٫۰۳۶۸(۰٫۰۰۰۰۱)	۰٫۰۷۵۲(-۰٫۰۶۵۱)	۰٫۰۵۸۱(۰٫۰۰۰۰۰)	۰٫۱۵۵۲(-۰٫۱۵۰۸)	۷	۵۰		
۰٫۲۸۷۷(-۰٫۰۹۰۸)	۰٫۲۷۳۱(-۰٫۰۰۰۴۲)	۰٫۲۸۷۸(-۰٫۰۰۰۷۵)	۰٫۲۹۱۴(-۰٫۰۰۰۳۶)	۰٫۲۸۷۷(-۰٫۰۹۰۸)	۳	۱۰	آنتروپی جکنایف	
۰٫۱۴۹۵(-۰٫۰۶۴۰)	۰٫۱۳۵۱(-۰٫۰۰۰۰۸)	۰٫۱۴۴۱(۰٫۰۰۰۵۰)	۰٫۱۶۶۸(-۰٫۰۰۰۰۶)	۰٫۱۴۹۵(-۰٫۰۶۴۸)	۴	۲۰		
۰٫۱۰۸۱(-۰٫۰۵۰۷)	۰٫۰۹۵۵(۰٫۰۰۰۰۲)	۰٫۱۰۲۸(۰٫۰۰۰۸۵)	۰٫۱۱۹۷(-۰٫۰۰۰۰۲)	۰٫۱۰۸۱(-۰٫۰۵۰۷)	۵	۳۰		
۰٫۰۶۹۴(-۰٫۰۳۵۵)	۰٫۰۵۹۷(۰٫۰۰۰۰۷)	۰٫۰۶۳۹(۰٫۰۰۰۸۷)	۰٫۰۷۷۴(۰٫۰۰۰۰۶)	۰٫۰۶۹۴(-۰٫۰۳۵۵)	۷	۵۰		
۰٫۱۸۱۲(۰٫۰۵۴۴)	۰٫۲۷۶۵(۰٫۲۱۵۵)	۰٫۲۲۲۵(-۰٫۱۲۸۷)	۰٫۳۵۴۳(۰٫۲۵۶۴)	۰٫۲۶۸۵(-۰٫۲۰۵۴)	۳	۱۰	آنتروپی بوتاسترپ	
۰٫۰۹۲۳(۰٫۰۲۹۶)	۰٫۱۵۷۸(۰٫۱۳۱۵)	۰٫۱۲۲۵(-۰٫۰۸۰۸)	۰٫۲۴۱۵(۰٫۲۰۲۶)	۰٫۱۵۶۱(-۰٫۱۲۹۲)	۴	۲۰		
۰٫۰۶۳۴(۰٫۰۱۷۴)	۰٫۱۱۳۱(۰٫۰۹۳۱)	۰٫۰۹۳۴(-۰٫۰۶۷۵)	۰٫۱۸۱۸(۰٫۱۵۶۱)	۰٫۱۲۴۷(-۰٫۱۰۸۷)	۵	۳۰		
۰٫۰۳۸۳(۰٫۰۰۸۱)	۰٫۰۶۹۸(۰٫۰۵۸۹)	۰٫۰۶۸۵(-۰٫۰۵۵۶)	۰٫۱۱۷۳(۰٫۱۰۰۰۱)	۰٫۰۹۹۳(-۰٫۰۹۲)	۷	۵۰		



(آ) جذر میانگین توان دوم خطا



(ب) اریبی

شکل ۱: برآوردگرهای آنتروپی، بوت استرپی آنتروپی و جک نایف آنتروپی در شبیه سازی از توزیع نرمال

استاندارد.

معمولی و همچنین اعمال روش‌های بوت‌استرپ و جک‌نایف برای حجم نمونه‌های بزرگ عملکرد یکسانی دارند و برآوردگر آنتروپی واسیچک (۱۹۷۶) و ون‌ای‌اس (۱۹۹۲) بترتیب با اعمال روش جک‌نایف و روش بوت‌استرپ عملکرد بهتری دارند.

با توجه به شکل ۲، در توزیع نمایی با میانگین یک و از لحاظ جذر میانگین توان دوم خطا، برآوردگر آنتروپی واسیچک (۱۹۷۶) با اعمال روش بوت‌استرپ عملکرد بهتری دارد. برآوردگرهای آنتروپی ابراهیمی و همکاران (۱۹۹۴) و کوریا (۱۹۹۵) در سه حالت معمولی، بوت‌استرپی و جک‌نایف برای حجم نمونه بزرگ عملکرد یکسانی دارند. برآوردگر آنتروپی ون‌ای‌اس (۱۹۹۲) با اعمال روش بوت‌استرپ برای حجم نمونه بزرگ عملکرد بهتری دارد.

با توجه به شکل ۳ در توزیع یکنواخت (۱، ۰) از لحاظ جذر میانگین توان دوم خطا برآوردگر آنتروپی واسیچک (۱۹۷۶) با اعمال روش جک‌نایف عملکرد بهتری دارد. برآوردگرهای آنتروپی کوریا (۱۹۹۵) و ابراهیمی و همکاران (۱۹۹۴) در سه حالت معمولی، جک‌نایف و بوت‌استرپ برای حجم نمونه بزرگ عملکرد یکسانی دارند.

با توجه به شکل‌های ۱، ۲ و ۳ در توزیع‌های نرمال استاندارد، نمایی با میانگین یک و یکنواخت (۱، ۰) و از لحاظ اریبی، برآوردگرهای آنتروپی کوریا (۱۹۹۵) و واسیچک (۱۹۷۶) با اعمال روش جک‌نایف و برآوردگرهای آنتروپی ون‌ای‌اس (۱۹۹۲)، ویزورکوسکی و گورزگورزسکی (۱۹۹۹) و ابراهیمی و همکاران (۱۹۹۴) با اعمال روش بوت‌استرپ عملکرد بهتری دارند.

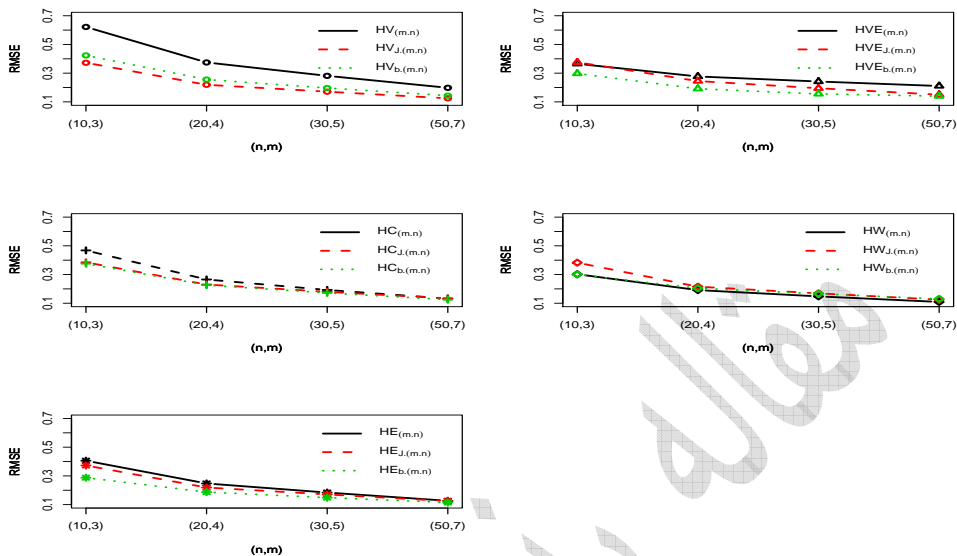
به‌طور کلی مشاهده می‌شود که در هر سه توزیع نرمال استاندارد، نمایی با میانگین یک و یکنواخت (۱، ۰)، برآوردگر HV در روش‌های بوت‌استرپ (HV_b) و جک‌نایف (HV_j) عملکرد بسیار خوبی دارد و همچنین مشاهده می‌شود که با افزایش حجم نمونه جذر میانگین توان دوم خطای برآوردگرها کاهش می‌یابد و میزان اریبی برآوردگرها به سمت صفر میل می‌کند.

۵ آزمون نرمال بودن توزیع جامعه براساس ماکسیمم آنتروپی

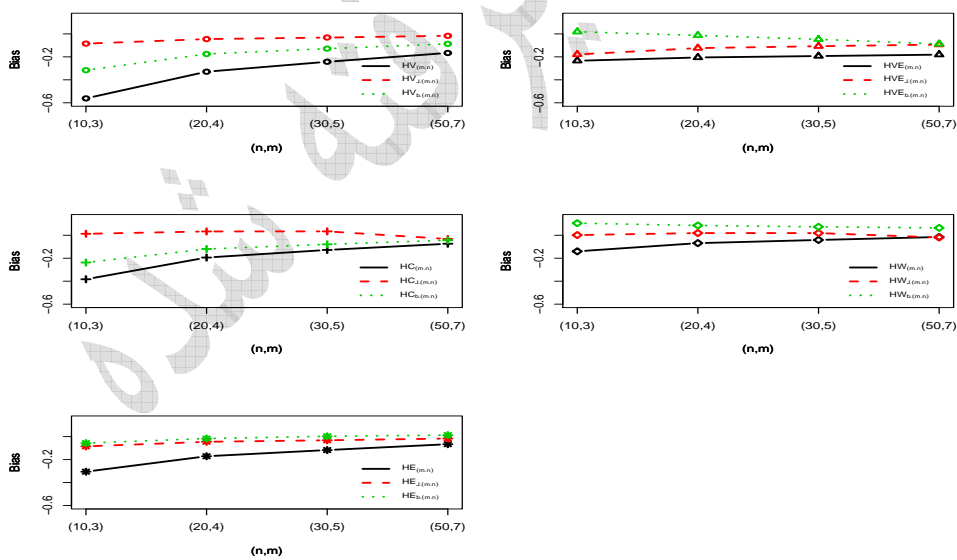
واسیچک (۱۹۷۶) آماره آزمونش برای توزیع نرمال را به‌صورت

$$TV_{nm} = \frac{\exp(HV_{nm})}{S},$$

معرفی کرد، که در آن HV_{nm} برآوردگر آنتروپی واسیچک و S انحراف معیار نمونه است. حال اگر بجای

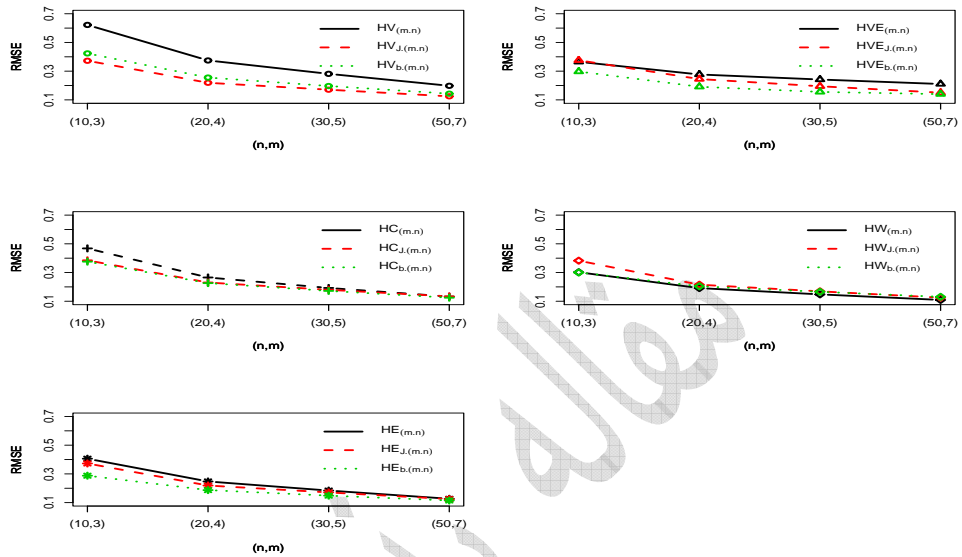


(آ) جذر میانگین توان دوم خطا

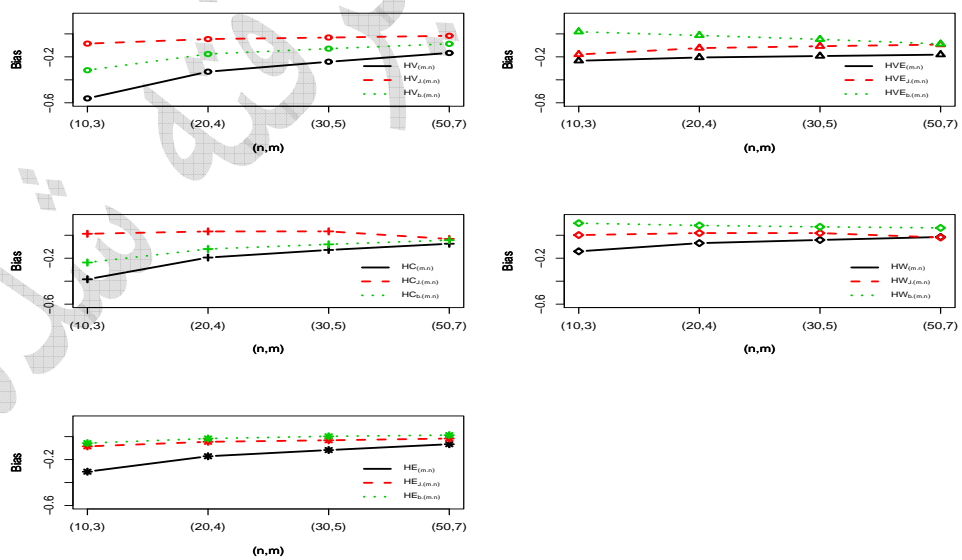


(ب) اریبی

شکل ۲: نمودار برآوردگرهای آنتروپی، بوت استرپی آنتروپی و جک نایف آنتروپی در شبیه سازی از توزیع نمایی با میانگین یک.



(آ) جذر میانگین توان دوم خطا



(ب) اریبی

شکل ۳: نمودار برآوردگرهای آنتروپی، بوت استرپی آنتروپی و جک نایف آنتروپی در شبیه سازی از توزیع یکنواخت

برآوردگر آنتروپی واسیچک از برآوردگرهای دیگر استفاده شود. آماره های آزمون مختلفی بدست می آیند. در زیر آماره های مختلف براساس برآوردگرهای مختلف معرفی شده اند.

۱. آماره آزمون بر اساس برآوردگر ون ای اس (۱۹۹۲):

$$TVE_{nm} = \frac{\exp(HVE_{nm})}{S}.$$

۲. آماره آزمون بر اساس برآوردگر ابراهیمی و همکاران (۱۹۹۴):

$$TE_{nm} = \frac{\exp(HE_{nm})}{S}.$$

۳. آماره آزمون بر اساس برآوردگر کوریا (۱۹۹۵):

$$TC_{nm} = \frac{\exp(HC_{nm})}{S}.$$

۴. آماره آزمون بر اساس برآوردگر ویزورکوسکی و گورزگورزسکی (۱۹۹۹):

$$TW_{nm} = \frac{\exp(HW_{nm})}{S}.$$

۵. آماره آزمون بر اساس برآوردگرهای معرفی شده به روش بوت استرپ و جک نایف نیز به همین صورت تعریف می شوند. برای نمونه آماره آزمون بر اساس برآوردگر واسیچک به روش بوت استرپ به صورت

$$TV_B = \frac{\exp(HV_B)}{S},$$

و آماره آزمون بر اساس برآوردگر واسیچک به روش جک نایف نیز به صورت

$$TV_J = \frac{\exp(HV_J)}{S},$$

است.

۱.۵ مقادیر بحرانی

با توجه به پیچیده بودن آماره های آزمون مبتنی بر آنتروپی، محققین نتوانسته اند تاکنون، توزیع دقیق آماره آزمون خود را تحت فرضیه صفر (نرمال بودن توزیع جامعه) به دست آورند و لذا برای محاسبه مقادیر بحرانی آماره

آزمون، به شبیه‌سازی روی آورده‌اند. در این جا، مقادیر بحرانی آماره آزمون‌های معرفی شده به کمک شبیه‌سازی به ازای مقادیر مختلف n و m در سطح $\alpha = 0.05$ محاسبه می‌شوند. از آنجا که مقادیر کوچک آماره آزمون فرضیه نرمال بودن را رد می‌کند چندان مرتبه α (C_α) آماره آزمون را بدست آورده‌ایم. چندان مرتبه α آماره آزمون T عددی است که در رابطه $P_{H_0}(T < C_\alpha) = \alpha$ صدق می‌کند.

برای محاسبه مقادیر بحرانی تعداد ۱۰۰۰۰ نمونه به حجم n از توزیع نرمال استاندارد تولید و چندان آماره آزمون محاسبه شده است. نحوه محاسبه نقاط بحرانی آماره‌های آزمون بر اساس روش‌های بوت‌استرپ و جک‌نایف مشابه روش ذکر شده در بالا است. این مقادیر در جدول‌های ۴ و ۵ آورده شده‌اند. توجه شود که آماره آزمون نسبت به تبدیلات مکانی-مقیاسی پایاست و لذا مقادیر بحرانی، به مقدار پارامترهای μ و σ^2 بستگی نخواهند داشت.

جدول ۴: نقاط بحرانی آزمون‌های نرمال بودن بر اساس آماره‌های آزمون بوت‌استرپ در سطح $\alpha = 0.05$.

آماره آزمون	n			
	۵۰	۴۰	۲۰	۱۰
TV_B	۳/۵۱۰۰	۳/۴۲۰۰	۳/۰۶۲۸	۲/۵۷۳۲
TVE_B	۳/۵۱۵۶	۳/۵۱۸۲	۳/۴۹۸۰	۳/۲۷۵۳
TC_B	۳/۶۴۳۰	۳/۵۵۵۶	۳/۱۹۴۳	۲/۷۴۹۹
TW_B	۴/۰۸۵۹	۴/۰۶۰۹	۳/۹۷۲۵	۳/۹۳۲۴
TE_B	۳/۸۸۲۸	۳/۸۱۸۳	۳/۵۹۲۸	۳/۳۳۰۰

۲.۵ توان آزمون‌ها

در این بخش توان آزمون‌های پیشنهادی محاسبه و با یکدیگر مقایسه شده‌اند. برای این منظور با استفاده از شبیه‌سازی مونت‌کارلو با $B = 10000$ تکرار، توان آزمون‌های نرمال بودن تحت ۲۱ توزیع جانشین مختلف به‌دست آورده شده‌اند. برای این کار، ابتدا تعداد ۱۰۰۰۰ نمونه به حجم‌های $n = 10, 20, 40, 50$ تحت هر یک از توزیع‌های جانشین تولید و سپس توان هر یک از آزمون‌ها از طریق، نسبت تعداد دفعاتی که آماره آزمون از مقدار بحرانی آن کمتر است به کل تعداد تکرارها، برآورد شده است.

جدول ۵: نقاط بحرانی آزمون های نرمال بودن بر اساس آماره های آزمون جک نایف در سطح $\alpha = 0.05$.

آماره آزمون	n			
	۵۰	۴۰	۲۰	۱۰
TV_J	۳,۶۷۲۸	۳,۵۸۲۰	۳,۱۹۸۵	۲,۴۹۵۸
TVE_J	۳,۳۹۱۹	۳,۲۹۸۴	۲,۹۲۶۱	۲,۴۱۷۱
TC_J	۳,۸۲۰۴	۳,۷۴۱۱	۳,۳۹۳۰	۲,۶۶۴۷
TW_J	۳,۸۰۸۱	۳,۷۳۶۷	۳,۴۰۹۹	۲,۷۲۱۴
TE_J	۳,۶۷۲۸	۳,۵۸۲۰	۳,۱۹۸۵	۲,۴۹۵۸

توزیع های جانشین تحت بررسی را می توان بر اساس شکل و تکیه گاه آن ها به چهار گروه مختلف تقسیم کرد. گروه اول، توزیع های متقارن با تکیه گاه $(-\infty, +\infty)$ ، گروه دوم، توزیع های نامتقارن با تکیه گاه $(-\infty, +\infty)$ ، گروه سوم، توزیع هایی با تکیه گاه $(0, +\infty)$ و گروه چهارم، توزیع هایی با تکیه گاه $(0, 1)$. استبان و همکاران (۲۰۰۱) این نوع تقسیم بندی را برای مقایسه توان برخی از آزمون های نرمال بودن، برای اولین بار به کار بردند. این توزیع ها عبارت اند از:

توزیع های متقارن با تکیه گاه $(-\infty, +\infty)$

توزیع t استیودنت با یک درجه آزادی (کوشی)، توزیع t استیودنت با سه درجه آزادی، توزیع نمایی دوگانه (لاپلاس)، توزیع لوژستیک.

توزیع های نامتقارن با تکیه گاه $(-\infty, +\infty)$

توزیع گامبل، توزیع نرمال چوله (SN) با پارامترهای شکل ۲، ۳، $\alpha = 2$ ، توزیع لاپلاس چوله (SL) با پارامترهای $\alpha = 1$ و $\beta = 2, 3$ (توزیع آمیخته حاصل از ترکیب توزیع نمایی با میانگین ۲، ۳ با قرینه توزیع نمایی با میانگین ۱). ($\alpha = 1$).

توزیع های با تکیه گاه $(0, \infty)$

توزیع نمایی با میانگین یک، توزیع گاما با پارامتر شکل 0.5 ، $\alpha = 0.5$ ، توزیع گاما با پارامتر شکل 2 ، $\alpha = 2$ ، توزیع لگ نرمال (LN) با پارامتر شکل 1 ، $\sigma = 1$ ، توزیع لگ نرمال (LN) با پارامتر شکل 2 ، $\sigma = 2$ ، توزیع وایبل با پارامتر شکل 0.5 ، $\alpha = 0.5$ ، توزیع وایبل با پارامتر شکل 2 ، $\alpha = 2$ ، توزیع خی دو با یک درجه آزادی، توزیع خی دو

با سه درجه آزادی، توزیع نمایی تعمیم‌یافته.

توزیع‌های با تکیه‌گاه (۱, ۰)

توزیع یکنواخت، توزیع بتا (۳, ۰/۵)، توزیع بتا (۱, ۰/۵)، توزیع بتا (۲, ۲).

نکته قابل توجه در این جا این است که توان آزمون‌های مبتنی بر مبنای آنتروپی، به مقدار پارامتر m بستگی دارد و مقدار بهینه m ، یعنی مقداری که به ازای آن توان آزمون ماکسیمم شود، علاوه بر حجم نمونه، به توزیع جانشین نیز وابسته است و چون توزیع جایگزین در عمل نامعلوم است، نمی‌توان مقداری برای m پیشنهاد داد که به ازای آن، توان آزمون برای تمام توزیع‌های جانشین ماکسیمم شود. این مطلب برای تمام آزمون‌های مبتنی بر آنتروپی صدق می‌کند. لذا محققین در این زمینه، برای حجم نمونه n ، مقداری از m $([\sqrt{n} + 0.5])$ پیشنهاد داده‌اند که آزمون مربوطه، توان نسبتاً خوبی به ازای تمام توزیع‌های جایگزین داشته باشد.

جدول ۶: توان آزمون‌های نرمال بودن بر اساس برآوردگرهای آنتروپی معمولی، جک‌نایف و بوت‌استرپ تحت

توزیع‌های متقارن با تکیه‌گاه $(-\infty, +\infty)$.

n	مدل‌های رقیب	TV_{mn}	TV_{Emn}	TC_{mn}	TW_{mn}	TE_{mn}	TV_j	TVE_j	TC_j	TW_j	TE_j	TV_B	TVE_B	TC_B	TW_B	TE_B
۱۰	۱	۰/۴۱۶۶	۰/۳۳۷۹	۰/۳۳۳۱	۰/۴۱۶۶	۰/۴۱۶۶	۰/۲۰۱۳	۰/۵۳۵۸	۰/۱۷۷۱	۰/۲۰۱۳	۰/۲۰۱۳	۰/۳۰۱۳	۰/۶۱۱۲	۰/۲۳۶۸	۰/۳۰۶۸	۰/۳۰۱۴
	۲	۰/۱۰۱۳	۰/۱۹۴۵	۰/۸۷۲	۰/۱۰۱۳	۰/۱۰۱۳	۰/۴۴۹	۰/۱۳۴۹	۰/۳۹۰	۰/۴۴۹	۰/۴۴۹	۰/۷۵۲	۰/۱۸۵۲	۰/۵۸۱	۰/۷۵۴	۰/۷۲۹
	logistic	۰/۸۷۰	۰/۴۶۶	۰/۵۱۹	۰/۵۱۹	۰/۵۱۹	۰/۴۱۸	۰/۶۷۱	۰/۴۱۳	۰/۴۱۸	۰/۴۱۸	۰/۲۸۷	۰/۷۲۴	۰/۴۶۲	۰/۳۹۲	۰/۳۸۱
۲۰	۱	۰/۵۰۷	۰/۱۸۵۵	۰/۶۱۷	۰/۵۰۷	۰/۵۰۷	۰/۲۹۰	۰/۱۱۱۲	۰/۲۶۹	۰/۲۹۰	۰/۲۹۰	۰/۵۲۸	۰/۱۶۸۲	۰/۴۵۱	۰/۵۳۳	۰/۵۱۳
	۲	۰/۸۸۷	۰/۸۹۵۸	۰/۶۰۷۰	۰/۸۸۷	۰/۸۸۷	۰/۶۴۵	۰/۷۹۳۷	۰/۱۲۳	۰/۶۴۵	۰/۶۴۵	۰/۵۵۷۲	۰/۸۸۶۵	۰/۴۵۷۱	۰/۵۵۷۲	۰/۵۵۹۲
	logistic	۰/۱۳۸۱	۰/۳۵۸۶	۰/۱۰۵۶	۰/۱۳۸۱	۰/۱۳۸۱	۰/۹۸۸	۰/۲۴۱۸	۰/۸۸۰	۰/۹۸۸	۰/۹۸۸	۰/۸۸۴	۰/۳۳۷۶	۰/۶۲۰	۰/۸۸۷	۰/۹۰۷
۳۰	۱	۰/۶۸۷	۰/۲۱۴۰	۰/۳۸۹	۰/۶۸۷	۰/۶۸۷	۰/۷۳۷	۰/۱۵۱۵	۰/۷۴۹	۰/۷۳۷	۰/۷۳۷	۰/۲۵۶	۰/۱۲۲۴	۰/۴۰۱	۰/۴۰۴	۰/۴۱۴
	۲	۰/۴۵۹	۰/۱۲۹۵	۰/۴۱۱	۰/۴۵۹	۰/۴۵۹	۰/۴۴۶	۰/۷۷۳	۰/۴۵۵	۰/۴۵۵	۰/۴۵۵	۰/۲۳۷	۰/۳۰۱۵	۰/۳۳۱	۰/۳۵۵	۰/۳۴۵
	logistic	۰/۳۸۹	۰/۲۸۹	۰/۳۸۹	۰/۳۸۹	۰/۳۸۹	۰/۳۵۶	۰/۷۷۳	۰/۴۵۵	۰/۴۵۵	۰/۴۵۵	۰/۲۳۷	۰/۳۰۱۵	۰/۳۳۱	۰/۳۵۵	۰/۳۴۵

توان آزمون‌های ساخته‌شده بر اساس برآوردگرهای آنتروپی را با یکدیگر در سطح خطای $\alpha = 0.05$ مقایسه می‌کنیم. نتیجه این مقایسه در جدول‌های ۶ تا ۹ آورده شده است و همچنین نتیجه نهایی را می‌توان در جدول ۱۰ مشاهده کرد.

بحث و نتیجه‌گیری

در این مقاله مسئله برآورد آنتروپی را به کمک روش‌های باز نمونه‌گیری جک‌نایف و بوت‌استرپ بررسی کردیم. برآوردگرهای آنتروپی بوت‌استرپی و جک‌نایف را از لحاظ اریبی و میانگین توان دوم خطا با برآوردگرهای قبلی مقایسه کردیم. ملاحظه شد که با اعمال روش‌های جک‌نایف و بوت‌استرپ می‌توان عملکرد برآوردگرهای

برآورد آنتروپی باروش های بوت استرپ و جک نایف

جدول ۷: توان آزمون های نرمال بودن بر اساس برآوردگرهای آنتروپی معمولی، جک نایف و بوت استرپ تحت توزیع هایی با تکیه گاه $(\infty, 0)$.

TE_B	TW_B	TC_B	TE_{EB}	TV_B	TE_J	TW_J	TC_J	TE_{EJ}	TV_J	TE_{mn}	TW_{mn}	TC_{mn}	$TE_{E_{mn}}$	TV_{mn}	مدلهای رقیب	n
۰.۷۲۶۹	۰.۷۲۵۴	۰.۶۶۴۶	۰.۵۵۵۶	۰.۷۲۳۶	۰.۶۶۱۸	۰.۶۶۱۸	۰.۶۳۵۱	۰.۵۹۵۹	۰.۶۶۱۸	۰.۷۸۱۰	۰.۷۸۱۰	۰.۷۵۸۲	۰.۶۲۳۵	۰.۷۸۱۰	Chi(1)	10
۰.۲۳۴۷	۰.۲۴۶۰	۰.۲۰۴۸	۰.۱۸۲۷	۰.۲۴۰۲	۰.۱۷۰۲	۰.۱۷۰۲	۰.۱۷۰۸	۰.۱۸۲۸	۰.۱۷۰۲	۰.۲۷۸۸	۰.۲۷۸۸	۰.۲۶۶۶	۰.۲۲۱۴	۰.۲۷۸۸	Chi(3)	10
۰.۵۱۷۴	۰.۵۲۶۳	۰.۴۶۸۴	۰.۳۵۷۱	۰.۵۲۰۴	۰.۳۸۶۲	۰.۳۸۶۲	۰.۳۶۸۰	۰.۴۲۵۰	۰.۳۸۶۲	۰.۵۹۹۶	۰.۵۹۹۶	۰.۵۸۰۲	۰.۵۱۳۰	۰.۵۹۹۶	LN(+, 1)	10
۰.۹۱۳۷	۰.۹۱۳۷	۰.۸۸۲۳	۰.۸۳۰۱	۰.۹۱۳۹	۰.۸۸۶۰	۰.۸۸۶۰	۰.۸۷۰۳	۰.۸۶۶۳	۰.۸۸۶۰	۰.۹۲۲۰	۰.۹۲۲۰	۰.۹۳۴۰	۰.۸۷۹۸	۰.۹۲۲۰	LN(+, 2)	10
۰.۷۳۱۴	۰.۷۳۹۰	۰.۶۶۲۲	۰.۵۷۴۴	۰.۷۳۵۱	۰.۶۶۰۵	۰.۶۶۰۵	۰.۶۳۰۹	۰.۶۰۳۴	۰.۶۶۰۵	۰.۷۸۶۲	۰.۷۸۶۲	۰.۷۶۰۴	۰.۶۲۴۷	۰.۷۸۶۲	Gamma(+, 5)	10
۰.۱۷۹۷	۰.۱۸۵۶	۱.۶۱۸	۱.۴۷۳	۰.۱۸۰۵	۰.۱۲۲۴	۰.۱۲۲۳	۰.۱۲۱۹	۰.۱۴۰۵	۰.۱۲۲۴	۰.۲۰۷۹	۰.۲۰۷۹	۰.۱۹۵۵	۰.۱۷۶۹	۰.۲۰۷۹	Gamma(2)	10
۰.۸۸۷۴	۰.۸۸۹۱	۰.۸۴۳۷	۰.۷۷۹۴	۰.۸۸۶۴	۰.۸۶۶۶	۰.۸۶۶۶	۰.۸۴۶۱	۰.۸۲۹۲	۰.۸۶۶۶	۰.۹۳۰۶	۰.۹۳۰۶	۰.۹۱۶۰	۰.۸۴۳۳	۰.۹۳۰۶	Weibull(+, 5)	10
۰.۷۶۴۴	۰.۷۸۳۱	۰.۷۰۷۵	۰.۶۰۶۰	۰.۷۸۰۶	۰.۶۹۴۴	۰.۶۹۴۴	۰.۶۷۱۶	۰.۶۴۸۲	۰.۶۹۴۴	۰.۷۹۰۰	۰.۷۹۰۰	۰.۷۶۷۷	۰.۶۰۶۰	۰.۷۹۰۰	Weibull(2)	10
۰.۳۸۹۷	۰.۳۹۹۲	۰.۳۴۶۶	۰.۲۸۶۵	۰.۳۹۹۹	۰.۲۸۹۵	۰.۲۸۹۵	۰.۲۸۱۲	۰.۲۷۷۳	۰.۲۸۹۵	۰.۴۴۸۵	۰.۴۴۸۵	۰.۴۳۲۰	۰.۳۳۱۱	۰.۴۴۸۵	Exp(1)	10
۰.۷۱۲۳	۰.۷۱۶۶	۰.۶۴۹۸	۰.۵۴۳۳	۰.۷۱۲۳	۰.۶۴۴۲	۰.۶۴۴۲	۰.۶۱۸۲	۰.۵۸۶۴	۰.۶۴۴۲	۰.۷۷۲۸	۰.۷۷۲۸	۰.۷۴۹۰	۰.۶۱۲۱	۰.۷۷۲۸	Gezp(+, 5)	10
۰.۹۸۲۲	۰.۹۸۲۳	۰.۹۷۰۳	۰.۹۰۵۸	۰.۹۸۳۳	۰.۹۷۷۹	۰.۹۷۷۹	۰.۹۶۸۳	۰.۹۲۹۸	۰.۹۷۷۹	۰.۹۹۳۶	۰.۹۹۳۶	۰.۹۹۰۳	۰.۹۴۳۱	۰.۹۹۳۶	Chi(1)	20
۰.۵۶۶۷	۰.۵۵۴۳	۰.۵۱۹۴	۰.۳۹۵۱	۰.۵۶۵۰	۰.۴۵۷۱	۰.۴۵۷۱	۰.۴۳۹۴	۰.۳۵۰۳	۰.۴۵۷۱	۰.۶۳۹۳	۰.۶۳۹۳	۰.۶۰۹۱	۰.۴۴۴۰	۰.۶۳۹۳	Chi(3)	20
۰.۸۹۱۰	۰.۸۹۱۵	۰.۸۶۳۹	۰.۷۹۹۱	۰.۸۹۱۱	۰.۸۳۳۹	۰.۸۳۳۹	۰.۸۱۳۳	۰.۷۵۹۴	۰.۸۳۳۹	۰.۹۲۵۷	۰.۹۲۵۷	۰.۹۱۵۶	۰.۸۴۹۱	۰.۹۲۵۷	LN(+, 1)	20
۰.۹۹۹۳	۰.۹۹۹۳	۰.۹۹۸۸	۰.۹۹۳۴	۰.۹۹۹۵	۰.۹۹۸۶	۰.۹۹۸۶	۰.۹۹۸۲	۰.۹۹۵۴	۰.۹۹۸۶	۰.۹۹۹۸	۰.۹۹۹۸	۰.۹۹۹۸	۰.۹۹۶۷	۰.۹۹۹۸	LN(+, 2)	20
۰.۸۸۴۷	۰.۸۸۳۳	۰.۸۷۰۶	۰.۸۱۳۳	۰.۸۸۲۲	۰.۸۷۸۰	۰.۸۷۸۰	۰.۸۶۷۸	۰.۸۲۶۸	۰.۸۷۸۰	۰.۹۹۱۳	۰.۹۹۱۳	۰.۹۸۹۲	۰.۸۴۲۲	۰.۹۹۱۳	Gamma(+, 5)	20
۰.۴۰۹۸	۰.۴۰۴۹	۰.۳۶۶۴	۰.۲۹۸۷	۰.۴۰۴۰	۰.۳۱۰۳	۰.۳۱۰۳	۰.۳۰۰۹	۰.۲۵۰۶	۰.۳۱۰۳	۰.۴۷۱۹	۰.۴۷۱۹	۰.۴۴۴۴	۰.۳۲۰۷	۰.۴۷۱۹	Gamma(2)	20
۰.۹۹۸۸	۰.۹۹۹۲	۰.۹۹۸۱	۰.۹۹۸۱	۰.۹۹۸۷	۰.۹۹۸۶	۰.۹۹۸۶	۰.۹۹۶۸	۰.۹۹۲۰	۰.۹۹۸۶	۰.۹۹۹۶	۰.۹۹۹۶	۰.۹۹۹۶	۰.۹۹۹۵	۰.۹۹۹۶	Weibull(+, 5)	20
۰.۱۲۶۹	۰.۱۲۶۸	۰.۱۱۷۵	۰.۰۷۲۵	۰.۱۲۶۷	۰.۱۰۵۲	۰.۱۰۵۲	۰.۱۰۸۱	۰.۰۷۹۳	۰.۱۰۵۲	۰.۱۳۸۴	۰.۱۳۸۴	۰.۱۳۶۷	۰.۰۷۷۵	۰.۱۳۸۴	Weibull(2)	20
۰.۸۰۲۳	۰.۷۹۸۹	۰.۷۶۰۴	۰.۵۸۷۴	۰.۷۹۹۵	۰.۷۲۰۳	۰.۷۲۰۳	۰.۶۹۷۲	۰.۵۶۹۸	۰.۷۲۰۳	۰.۸۵۲۴	۰.۸۵۲۴	۰.۸۲۲۴	۰.۶۳۸۲	۰.۸۵۲۴	Exp(1)	20
۰.۸۹۱۵	۰.۸۹۸۸	۰.۸۶۶۸	۰.۸۹۴۹	۰.۸۹۰۵	۰.۸۷۴۴	۰.۸۷۴۴	۰.۸۶۲۹	۰.۸۲۳۳	۰.۸۷۴۴	۰.۹۸۸۸	۰.۹۸۸۸	۰.۹۸۴۴	۰.۸۲۸۱	۰.۹۸۸۸	Gezp(+, 5)	20

جدول ۸: توان آزمون های نرمال بودن بر اساس برآوردگرهای آنتروپی معمولی، جک نایف و بوت استرپ تحت توزیع های نامتقارن با تکیه گاه $(-\infty, +\infty)$.

TE_B	TW_B	TC_B	TE_{EB}	TV_B	TE_J	TW_J	TC_J	TE_{EJ}	TV_J	TE_{mn}	TW_{mn}	TC_{mn}	$TE_{E_{mn}}$	TV_{mn}	مدلهای رقیب	n
۰.۹۹۲۲	۰.۹۹۹۴	۰.۸۶۷	۰.۱۱۰۰	۰.۹۹۵۵	۰.۶۷۰	۰.۶۷۰	۰.۶۶۶۵	۰.۹۰۷	۰.۶۷۰	۰.۱۰۷۹	۰.۱۰۷۹	۰.۱۰۱۱	۰.۱۲۱۰	۰.۱۰۷۹	Gumbel(+, 1)	10
۰.۹۳۸	۰.۱۰۲۷	۰.۸۲۸	۰.۱۰۸۵	۰.۹۸۲	۰.۶۸۸	۰.۶۸۸	۰.۶۸۴	۰.۹۰۸	۰.۶۸۸	۰.۱۱۰۰	۰.۱۰۹۹	۰.۱۰۳۸	۰.۱۲۲۷	۰.۱۰۹۹	Gumbel(+, 2)	10
۰.۸۹۲	۰.۹۱۰	۰.۷۷۸	۰.۹۵۳	۰.۸۷۹	۰.۶۷۲	۰.۶۷۲	۰.۶۷۳	۰.۹۰۵۱	۰.۶۷۲	۰.۱۰۷۹	۰.۱۰۷۹	۰.۱۰۱۱	۰.۱۲۱۰	۰.۱۰۷۹	Gumbel(+, 3)	10
۰.۶۱۰	۰.۶۵۲	۰.۵۹۶	۰.۶۲۸	۰.۶۲۰	۰.۵۰۳	۰.۵۰۳	۰.۴۸۸	۰.۶۱۴	۰.۵۰۳	۰.۵۵۶	۰.۵۵۶	۰.۵۵۶۷	۰.۶۲۹	۰.۵۵۶۰	SN(+, 1, 2)	10
۰.۷۷۶	۰.۸۲۵	۰.۷۵۳	۰.۷۴۱	۰.۸۱۲	۰.۶۱۸	۰.۶۱۸	۰.۶۲۳	۰.۷۰۸	۰.۶۱۸	۰.۷۴۰	۰.۷۴۰	۰.۷۱۵	۰.۷۴۴	۰.۷۴۰	SN(+, 1, 3)	10
۰.۹۹۹	۰.۱۰۲۷	۰.۸۳۶	۰.۱۸۳۳	۰.۹۹۲	۰.۶۰۴	۰.۶۰۳	۰.۵۹۲	۰.۱۴۱۱	۰.۶۰۴	۰.۱۳۳۷	۰.۱۳۳۷	۰.۱۱۸۹	۰.۲۰۸۱	۰.۱۳۳۷	SL(+, 1, 2)	10
۰.۱۷۱۳	۰.۱۶۹۸	۰.۱۴۹۹	۰.۲۰۹۳	۰.۱۶۹۷	۰.۹۷۲	۰.۹۷۲	۰.۹۶۳	۰.۱۸۰۲	۰.۹۷۲	۰.۲۱۰۶	۰.۲۱۰۵	۰.۱۹۱۴	۰.۲۴۶۷	۰.۲۱۰۵	SL(+, 1, 3)	10
۰.۱۶۸۱	۰.۱۶۵۶	۰.۱۴۷۲	۰.۱۹۲۵	۰.۱۶۶۴	۰.۱۳۳۸	۰.۱۳۳۸	۰.۱۳۱۳	۰.۱۴۵۳	۰.۱۳۳۸	۰.۲۰۰۵	۰.۲۰۰۵	۰.۱۸۱۷	۰.۲۱۲۸	۰.۲۰۰۵	Gumbel(+, 1)	20
۰.۱۶۵۸	۰.۱۶۵۲	۰.۱۴۴۹	۰.۱۹۲۶	۰.۱۶۶۹	۰.۱۴۹۶	۰.۱۴۹۶	۰.۱۴۸۶	۰.۱۳۷۵	۰.۱۴۹۶	۰.۲۰۰۲	۰.۲۰۰۲	۰.۱۸۲۹	۰.۲۰۶۸	۰.۲۰۰۲	Gumbel(+, 2)	20
۰.۱۷۱۳	۰.۱۶۳۷	۰.۱۴۸۹	۰.۱۸۷۲	۰.۱۷۱۰	۰.۱۴۹۹	۰.۱۴۹۹	۰.۱۴۲۵	۰.۱۴۸۱	۰.۱۴۹۹	۰.۲۰۶۱	۰.۲۰۶۱	۰.۱۸۵۰	۰.۲۰۱۱	۰.۲۰۶۱	Gumbel(+, 3)	20
۰.۷۳۹	۰.۷۲۱	۰.۶۷۵	۰.۷۲۵	۰.۷۲۲	۰.۶۴۰	۰.۶۴۰	۰.۶۴۶	۰.۶۷۴	۰.۶۴۰	۰.۷۴۴	۰.۷۴۴	۰.۷۴۴	۰.۷۴۸	۰.۷۴۴	SN(+, 1, 2)	20
۰.۱۱۵۴	۰.۱۱۵۳	۰.۱۰۷۰	۰.۱۰۵۰	۰.۱۱۶۱	۰.۸۹۱	۰.۸۹۱	۰.۹۱۰	۰.۸۰۹	۰.۸۹۱	۰.۱۱۷۹	۰.۱۱۷۹	۰.۱۱۳۴	۰.۱۰۱۴	۰.۱۱۷۹	SN(+, 1, 3)	20
۰.۱۵۴۶	۰.۱۵۰۷	۰.۱۱۹۹	۰.۲۵۹۵	۰.۱۵۴۶	۰.۱۴۶۹	۰.۱۴۶۹	۰.۱۴۲۵	۰.۲۲۶۲	۰.۱۴۶۹	۰.۲۰۴۷	۰.۲۰۴۷	۰.۱۶۸۳	۰.۳۸۹۱	۰.۲۰۴۷	SL(+, 1, 2)	20
۰.۳۱۰۲	۰.۳۰۵۷	۰.۲۶۰۱	۰.۲۴۳۷	۰.۳۰۵۹	۰.۲۴۹۰	۰.۲۴۹۰	۰.۲۳۳۸	۰.۳۰۵۶	۰.۲۴۹۰	۰.۳۷۴۶	۰.۳۷۴۶	۰.۳۳۴۴	۰.۴۵۴۳	۰.۳۷۴۶	SL(+, 1, 3)	20

جدول ۹: توان آزمون‌های نرمال بودن بر اساس برآوردگرهای آنتروپی معمولی، جک‌نایف و بوت‌استرپ تحت توزیع‌هایی با تکیه‌گاه (۱, ۰).

TE_B	TW_B	TC_B	TVE_B	TV_B	TE_J	TW_J	TC_J	TVE_J	TV_J	TE_{mn}	TW_{mn}	TC_{mn}	TVE_{mn}	TV_{mn}	ملاهای رقیب	n
۰.۱۷۷۳	۰.۱۸۶۸	۰.۱۷۱۴	۰.۲۹۷	۰.۱۸۲۱	۰.۱۷۲۴	۰.۱۷۰۳	۰.۲۸۶۳	۰.۱۷۲۴	۰.۱۴۰۲	۰.۲۵۲۱	۰.۱۴۰۲	۰.۲۸۴	۰.۲۸۴	۰.۱۴۰۲	Uniform	۱۰
۰.۶۳۳۸	۰.۶۴۷۵	۰.۵۷۸۲	۰.۳۳۹۴	۰.۶۳۹۷	۰.۵۶۸۹	۰.۵۶۸۹	۰.۵۴۷۴	۰.۶۷۷۳	۰.۵۶۸۹	۰.۶۸۶۶	۰.۶۶۱۲	۰.۶۸۶۶	۰.۶۶۱۲	۰.۴۹۱۹	Beta(۰.۵, ۳)	۱۰
۰.۴۴۲۵	۰.۴۴۹۵	۰.۳۹۲۱	۰.۱۶۹۷	۰.۴۳۸۸	۰.۴۴۴۴	۰.۴۴۴۴	۰.۴۲۶۳	۰.۲۸۵۳	۰.۴۴۴۴	۰.۴۴۴۴	۰.۴۴۴۴	۰.۴۴۴۴	۰.۴۴۴۴	۰.۲۰۰۸	Beta(۰.۵, ۱)	۱۰
۰.۸۱۵	۰.۸۸۱	۰.۸۴۱	۰.۳۳۱	۰.۸۶۰	۰.۸۷۳	۰.۸۷۳	۰.۸۵۳	۰.۸۷۳	۰.۸۷۳	۰.۶۶۸	۰.۶۶۸	۰.۶۶۸	۰.۶۶۸	۰.۲۷۶	Beta(۲, ۲)	۱۰
۰.۴۲۵۷	۰.۴۳۱۴	۰.۴۲۸۲	۰.۳۱۰	۰.۴۳۴	۰.۳۸۸۴	۰.۳۸۸۱	۰.۳۷۵۰	۰.۱۳۸۷	۰.۳۸۸۴	۰.۴۴۲۸	۰.۴۴۲۸	۰.۴۴۲۸	۰.۴۴۲۸	۰.۳۳۳	Uniform	۲۰
۰.۸۵۷۲	۰.۸۵۵۹	۰.۹۳۳۵	۰.۷۹۰۴	۰.۸۵۸۸	۰.۹۴۱۶	۰.۹۴۱۶	۰.۹۲۸۳	۰.۸۳۷۲	۰.۹۴۱۶	۰.۹۷۵۰	۰.۹۷۵۰	۰.۹۶۵۹	۰.۹۶۵۹	۰.۸۴۰۵	Beta(۰.۵, ۳)	۲۰
۰.۸۶۲۵	۰.۸۶۱۴	۰.۸۲۴۹	۰.۳۳۹۷	۰.۸۶۰۸	۰.۸۴۲۶	۰.۸۴۲۶	۰.۸۲۰۱	۰.۵۵۲۶	۰.۸۴۲۶	۰.۸۸۵۸	۰.۸۸۵۸	۰.۸۶۵۶	۰.۸۶۵۶	۰.۴۲۱۹	Beta(۰.۵, ۱)	۲۰
۰.۱۴۱۳	۰.۱۳۴۶	۰.۱۴۶۹	۰.۱۵۵	۰.۱۳۸۸	۰.۱۲۱۸	۰.۱۲۱۸	۰.۱۲۲۵	۰.۰۵۵۰	۰.۱۲۱۸	۰.۱۴۰۴	۰.۱۴۰۴	۰.۱۴۷۵	۰.۱۴۷۵	۰.۱۶۲	Beta(۲, ۲)	۲۰

جدول ۱۰: بهترین آزمون‌های نرمال بودن در گروه‌های مختلف

آزمون مبتنی بر	گروه	آزمون با عملکرد بهتر
ماکسیمم آنتروپی	اول	TVE_{mn}
	دوم	TVE_{mn}
	سوم	$TV_{mn}, TW_{mn}, TE_{mn}$
	چهارم	TW_{mn}
روش جک‌نایف	اول	TVE_J
	دوم	TVE_J
	سوم	TV_J, TW_J, TE_J
	چهارم	TV_J, TW_J, TE_J
روش بوت‌استرپ	اول	TVE_B
	دوم	TVE_B
	سوم	TV_B
	چهارم	TV_B

آنتروپی را بهبود بخشید. لذا در عمل استفاده از این روش‌ها را پیشنهاد می‌شود. سپس آزمون نرمال بودن توزیع جامعه را براساس برآوردگرهای بوت‌استرپ و جک‌نایف انجام دادیم و توان آزمون‌های مختلف را در مقابل فرضیه‌های جانشین با یکدیگر مقایسه نمودیم و مشاهده کردیم که در مقابل برخی از فرضیه‌های جانشین آزمون‌های پیشنهادی از توان خوبی برخوردار بودند و لذا در عمل می‌توانند بکار برده شوند.

تقدیر و تشکر

نویسندگان از پیشنهادات ارزنده داوران، هیئت تحریریه و ویراستار محترم مجله که باعث بهبود و ارائه بهتر این مقاله شد کمال تشکر را دارند.

مراجع

- حبیبی‌راد، آ. و ارقامی، ن. ر. (۱۳۸۶)، آزمون مقارن بودن توزیع بر اساس آنتروپی، مجله علوم آماری، ۱، ۱۰۹-۱۲۰.
- زمان‌زاده، ا. (۱۳۹۲)، آزمون نیکویی برازش توزیع نمایی بر مبنای برآوردگرهای جدید آنتروپی، مجله علوم آماری، ۷، ۶۱-۷۵.
- زمان‌زاده، ا. و ارقامی، ن. ر. (۱۳۸۷)، آزمون نیکویی برازش توزیع‌های نرمال و نمایی بر مبنای برآوردگرهای جدید آنتروپی، مجله علوم آماری، ۲، ۱۷۹-۲۰۰.
- عباس‌نژاد، م. و شکوری، م. (۱۳۸۷)، آزمون نیکویی برازش برای توزیع نمایی بر مبنای برآورد اطلاع رنی. مجله علوم آماری، ۴، ۲۰۱-۲۱۱.
- عباس‌نژاد، م. و محمدی، د. (۱۳۸۹)، آزمون تقارن توزیع بر اساس آنتروپی رنی. مجله علوم آماری، ۴، ۲۱-۳۳.
- علیزاده، ه. و ارقامی، ن. ر. و علیزاده، ر. (۱۳۸۷)، مقایسه برآوردگرهای مختلف آنتروپی و توان آزمون‌های نمایی بودن بر مبنای برآوردگرهای آنتروپی. مجله علوم آماری، ۲، ۲۱۳-۲۲۷.

علیزاده، ه. و علیزاده، ر. (۱۳۸۷)، مقایسه توان آزمونهای نیکویی برازش بر مبنای آنتروپی با سایر روشها. مجله علوم آماری، ۲، ۹۷-۱۱۳.

Alizadeh Noughabi, H. (2010), A New Estimator of Entropy and Its Application in Testing Normality, *Journal of Statistical Computation and Simulation*, **80**, 1151-1162.

Alizadeh Noughabi, H. and Arghami, N. R. (2011), Monte Carlo comparison of Five Exponentiality Tests Using Different Entropy Estimates, *Journal of Statistical Computation and Simulation*, **81**, 1579-1592.

Bradley, E. and Gail, G. (1983), A Leisurely Look at the Bootstrap, the Jackknife, and Cross-Validation, *The American Statistician*, **37**, 36-48.

Balakrishnan, N., Habibi Rad, A. and Arghami, N. R. (2007), Testing Exponentiality based on Kullback-Leibler information with Progressively Type-II Censored Data, *IEEE Transactions on Reliability*, **56**, 301-307.

Baratpour, S. and Habibi Rad, A. (2012), Testing Goodness of Fit for Exponential Distribution based on cumulative residual entropy, *Communications in Statistics-Theory and Methods*, **47**, 1387-1396.

Dudewicz, E. J. and Van der Meulen, E. C. (1981), Entropy-Based Tests of Uniformity, *Journal of American Statistical Association*, **76**, 967-974.

Choi, B. and Kim, K. (2006), Testing Goodness-of-Fit for Laplace Distribution Based on Maximum Entropy, *Statistics*, **40**, 517-531.

Correa, J. C., (1995), A New Estimator of Entropy. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, **24**, 2439-2449.

Chhikara, R. S. and Folks, J.L. (1977), The Inverse Gaussian Distribution as a Lifetime Model, *Technometrics*, **19**, 461-468.

- Ebrahimi, N., Pflughoeft, K. and Soofi, E. S. (1994), Two Measures of Sample Entropy. *Statistics and Probability Letters*, **20**, 225–234.
- Esteban, M. D., Castellanos, M. E., Morales, D. and Vajda, I. (2001), Monte Carlo Comparison of Four Normality Tests Using Different Entropy Estimates, *Communications in Statistics–Simulation and Computation*, **30**, 761-285.
- Habibi Rad, A., Yousefzadeh, F., and Balakrishnan, N. (2011), Goodness of-Fit Test Based on Kullback-Leibler Information for Progressively Type-II Censored Data, *IEEE Transactions on Reliability*, **60**, 570-579.
- Kagan, A. M., Linnik, Y. and Rao, C. R. (1973), Characterization Problems in Mathematical Statistics, John Wiley and Sons, New York.
- Lim, J., and Park, S. (2007), Censored Kullback-Leibler Information and Goodness of-Fit Test with Type II Censored Data, *Journal of Applied Statistics*, **34**, 1051-1064.
- Lee S., Vonta I., and Karagrigoriou, A. (2011), A Maximum Entropy Type Test of Fit. *Computational Statistics and Data Analysis*, **55**, 2635-2643.
- Mudholkar, G. S., Natarajan R., and Chaubey Y. P. (2001), A Goodness-of-fit Test for the Inverse Gaussian Distribution Using its Independence Characterization. *Sankhya: Ser B*, **63**, 362-374.
- Mudholkar, G. S. and Tian, L. (2002), An Entropy Characterization of the Inverse Gaussian Distribution and Related Goodness of Fit Test, *Journal of Statistical Planning and Inference*, **102**, 211-221.
- Park, S. (2005), Testing Exponentiality Based on The Kullback-Leibler Information with the Type II Censored Data, *IEEE Transactions on Reliability*, **54**, 22-26.

- Rodriguez, P. P., Vaquera-Huerta, H., and Villasenor-Alva, J. (2009), A Goodness of-Fit Test for the Gumbel Distribution Based on Kullback-Leibler Information, *Communications in Statistics: Theory and Methods*, **38**, 842-855.
- Shannon, C. E. (1948), A Mathematical Theory of Communications, *Bell System Technical Journal*, **27**, 379–423; 623–656.
- Vasicek, O. (1976), A Test for Normality Based on Sample Entropy, *Journal of the Royal Statistical Society, Ser. B*, **38**, 54-59.
- Van Es, B. (1992), Estimating Functionals Related to a Density by Class of Statistics Based on Spacings, *Scandinavian Journal of Statistics*, **19**, 61-72.
- Von Alven, W. H. (1964), Reliability Engineering by ARINC. Englewood Cliffs (NJ): Prentice-Hall.
- Wieczorkowski, R. and Grzegorzewsky, P. (1999), Entropy Estimators Improvements and Comparisons, *Communications in Statistics–Simulation and Computation*, **28**, 541–567.
- Yousefzadeh, F. and Arghami, N. R. (2008), Testing Exponentiality Based on Type II Censored Data and a New cdf Estimator, *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, **37**, 1479–1499.
- Zamanzade, E. and Arghami, N. R. (2011), Goodness of Fit Test Based on Correcting Moments of Modified Entropy Estimator, *Journal of Statistical Computation and Simulation*, **81**, 2077-2093.

Entropy estimation using Bootstrap and Jackknife methods and its application in testing normality

Pourkazemi, A. , Alizadeh Noughabi, H. and Jomhoori, S.

Department of Statistics, University of Birjand, Birjand, Iran.

Abstract: In this paper, the Bootstrap and Jackknife methods are stated and using these methods, entropy is estimated. Then the estimators based on Bootstrap and Jackknife are investigated in terms of bias and RMSE using simulation. The proposed estimators are compared with other entropy estimators by Monte Carlo simulation. Results show that the entropy estimators based on Bootstrap and Jackknife have a good performance as compared to the other estimators. Next, some tests of normality based on the proposed estimators are introduced and the power of these tests are compared with other tests.

Keywords: Entropy, Bootstrap, Jackknife, Testing normality, Test power

Mathematics Subject Classification (2010): 62B10, 62G05.