



تحلیل داده‌های فضایی با خانواده مفصل‌خی‌دو

روناک جمشیدی، صدیقه شمس

گروه آمار، دانشگاه الزهرا

چکیده: در این مقاله خانواده توابع مفصل‌خی‌دو، برای مدل‌سازی ساختار همبستگی میدان‌های تصادفی فضایی مانا و همسان‌گرد به کار رفته است. ساختار همبستگی این مفصل که تعمیم مفصل گاوسی است، برای مدل‌سازی بردارهای تصادفی در ابعاد بالا انعطاف‌پذیر بوده و بر خلاف مفصل گاوسی امکان مدل‌سازی ساختارهای همبستگی دمی نامتقارن را فراهم می‌آورد. به دلیل پیچیدگی‌های محاسباتی تابع چگالی مفصل‌خی‌دو در ابعاد بالا، برای برآورد پارامترهای آن از روش درست‌نمایی مرکب زوجی استفاده شده، که در آن تنها توابع چگالی دو متغیره به کار رفته است. هدف این مقاله بررسی ویژگی‌های خانواده مفصل‌خی‌دو، برآورد پارامترهای آن با روش درست‌نمایی مرکب زوجی و کاربرد آن در درون‌یابی فضایی است.

واژه‌های کلیدی: تابع مفصل‌خی‌دو، درست‌نمایی مرکب زوجی، درون‌یابی فضایی، میدان تصادفی همسان‌گرد.

۱ مقدمه

مفصل‌ها توابعی هستند که توزیع‌های چند متغیره را به توزیع‌های حاشیه‌ای یک متغیره پیوند می‌دهند. به طور کلی یک مفصل دو بعدی، تابعی دو متغیره مانند $\mathbf{I} = [0, 1] \rightarrow \mathbf{I}^2 = [0, 1] \times [0, 1]$ با ویژگی‌های زیر

* آدرس الکترونیک مسئول مقاله: نام نویسنده، ronak.jamshidi@gmail.com
 † کد موضوع‌بندی ریاضی (۲۰۱۰): 62H11.

است:

۱- برای هر u و v متعلق به \mathbf{I}

$$C(u, \bullet) = C(\bullet, v) = \bullet, \quad C(u, \mathbf{1}) = u, \quad C(\mathbf{1}, v) = v.$$

۲- اگر $u_1 \leq u_2$ و $v_1 \leq v_2$ ، آنگاه

$$C(u_2, v_2) - C(u_2, v_1) - C(u_1, v_2) + C(u_1, v_1) \geq \bullet.$$

قضیه ۱. (اسکلار، ۱۹۵۹): فرض کنید F تابع توزیع توأم d -بعدی با توابع توزیع حاشیه‌ای F_1, \dots, F_d باشد، در این صورت تابع مفصلی مانند C وجود دارد به طوری که برای هر x_1, \dots, x_d داریم:

$$F(x_1, \dots, x_d) = C(F_1(x_1), \dots, F_d(x_d)).$$

اگر F_1, \dots, F_d پیوسته باشند، آنگاه تابع مفصل C یکتاست. به علاوه، عکس قضیه اسکلار هم برقرار است، یعنی برای توابع توزیع حاشیه‌ای F_1, \dots, F_d و هر تابع مفصل C ، تابع توزیع d -بعدی F وجود دارد به طوری که رابطه

$$C(u_1, \dots, u_d) = F(F_1^{-1}(u_1), \dots, F_d^{-1}(u_d)), \quad (1)$$

برقرار است، که در آن $(u_1, \dots, u_d) \in [0, 1]^d$. اگر در رابطه (۱)، $F = \Phi_\Sigma$ و $\Sigma \in R^{d \times d}$ یک ماتریس همبستگی باشد، آنگاه تابع مفصل گاوسی d -بعدی با ماتریس همبستگی Σ به صورت

$$C_\Sigma^N(u_1, \dots, u_d) = \Phi_\Sigma\{\Phi^{-1}(u_1), \dots, \Phi^{-1}(u_d)\}, \quad (2)$$

حاصل می‌شود. ساختار همبستگی خانواده مفصل گاوسی برای مدل‌سازی بردارهای تصادفی در ابعاد بالا انعطاف‌پذیر است ولی این خانواده محدودیت‌هایی دارد که یکی از آن‌ها ویژگی متقارن شعاعی^۱ و یکسان بودن ضرایب وابستگی دمی‌های بالا و پایین است. هم‌چنین تمام حاشیه‌ای‌های دو متغیره مفصل گاوسی ساختار تبادل‌پذیر^۲ (متقارن) دارند. از این رو خانواده مفصل گاوسی قادر نیستند ساختارهای همبستگی نامتقارن را مدل‌سازی کنند. این موارد سبب شد ایده طرح خانواده مفصل خی‌دو^۳ مطرح شود، زیرا این خانواده

¹Radial symmetric

²Exchangeability

³Chi-square copula

محدودیت‌های ذکرشده مفصل گاوسی را ندارد و این امکان را فراهم می‌آورد تا بتوان مدلی را با ساختارهای همبستگی دمی نامتقارن ساخت. خانواده مفصل‌خی‌دو تعمیم خانواده مفصل گاوسی است، این مفصل‌ها ابتدا توسط باردوسی (۲۰۰۶) معرفی شده و بعدها توسط کازیانکا و پیلز (۲۰۱۰) و کواسی و همکاران (۲۰۱۵) برای مدل‌سازی داده‌های فضایی به کار گرفته شده است. ویژگی‌های این مفصل‌ها توسط کواسی و همکاران (۲۰۱۶) مورد مطالعه قرار گرفته است. هم‌چنین خانواده مفصل‌خی‌دو زیرکلاسی از مفصل V تبدیل‌یافته است که توسط باردوسی و لی (۲۰۰۸) بیان شده است. هدف اصلی این مقاله بررسی ویژگی‌های خانواده مفصل‌خی‌دو، برآورد پارامترهای آن با روش درست‌نمایی مرکب زوجی^۴ و کاربرد مفصل‌خی‌دو در درون‌یابی فضایی است. در بخش ۲ تابع مفصل‌خی‌دو دو متغیره معرفی و تقارن و عدم تقارن تابع مفصل‌خی‌دو و معیارهای وابستگی آن ارائه می‌شود. در بخش ۳ تابع مفصل‌خی‌دو چندمتغیره و شبیه‌سازی از آن بیان می‌شود، در بخش ۴ برآورد پارامترهای تابع مفصل‌خی‌دو با روش درست‌نمایی مرکب زوجی و کاربرد آن در درون‌یابی فضایی ارائه می‌شود. در بخش ۵ نیز به درون‌یابی فضایی متغیرهای کیفیت آب استان آذربایجان غربی با مفصل‌خی‌دو پرداخته می‌شود. در بخش آخر نیز بحث و نتیجه‌گیری ارائه می‌شود.

۲ تابع مفصل‌خی‌دو دو متغیره

فرض کنید زوج تصادفی (Z_1, Z_2) دارای توزیع نرمال استاندارد دو متغیره با ضریب همبستگی ρ باشد. ساختار همبستگی (X_1, X_2) ، که در آن $X_1 = (Z_1 + a_1)^2$ و $X_2 = (Z_2 + a_2)^2$ ، توسط مفصل‌خی‌دو دو متغیره با پارامتر غیرمرکزی $(a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ تبیین می‌شود. توزیع‌های حاشیه‌ای به صورت

$$G_{a_j}(x) = Pr(X_j \leq x) = \Phi(\sqrt{x} - a_j) + \Phi(\sqrt{x} + a_j) - 1, \quad x > 0, \quad j = 1, 2,$$

هستند و تابع مفصل‌خی‌دو دو متغیره نیز به صورت

$$C_{\rho, a_1, a_2}^X(u_1, u_2) = Pr\{G_{a_1}(X_1) \leq u_1, G_{a_2}(X_2) \leq u_2\},$$

⁴ Pairwise composite likelihood

تعریف می‌شود. اگر $h_a(u) = \text{sign}(u)\sqrt{G_a^{-1}(|u|)} - a$ برای هر $u \in [-1, 1]$ ، می‌توان نشان داد

$$C_{\rho, a_1, a_2}^X(u_1, u_2) = Pr\{|Z_1 + a_1| \leq \sqrt{G_{a_1}^{-1}(u_1)}, |Z_2 + a_2| \leq \sqrt{G_{a_2}^{-1}(u_2)}\}$$

$$= Pr\{h_{a_1}(-u_1) \leq Z_1 \leq h_{a_1}(u_1), h_{a_2}(-u_2) \leq Z_2 \leq h_{a_2}(u_2)\}.$$

اگر $\Xi = \{-1, +1\} \times \{-1, +1\}$ ، آن‌گاه

$$C_{\rho, a_1, a_2}^X(u_1, u_2) = \sum_{(\epsilon_1, \epsilon_2) \in \Xi} \epsilon_1 \epsilon_2 \Phi_\rho\{h_{a_1}(\epsilon_1 u_1), h_{a_2}(\epsilon_2 u_2)\}. \quad (3)$$

تابع چگالی مفصل خیدو نیز به صورت

$$c_{\rho, a_1, a_2}^X(u_1, u_2) = \dot{h}_{a_1}(u_1) \dot{h}_{a_2}(u_2) \sum_{(\epsilon_1, \epsilon_2) \in \Xi} \phi_\rho\{h_{a_1}(\epsilon_1 u_1), h_{a_2}(\epsilon_2 u_2)\},$$

حاصل می‌شود، که در آن $\dot{h}_a(u) = \frac{1}{[\phi\{h_a(u)\} + \phi\{h_a(-u)\}]}$ بر اساس قضیه اسکالر مفصل گاوسی دو متغیره در رابطه $\Phi_\rho(x_1, x_2) = C_\rho^N\{\Phi(x_1), \Phi(x_2)\}$ صدق می‌کند. بنابراین (3) را می‌توان به صورت

$$C_{\rho, a_1, a_2}^X(u_1, u_2) = \sum_{(\epsilon_1, \epsilon_2) \in \Xi} \epsilon_1 \epsilon_2 C_\rho^N\{\tilde{h}_{a_1}(\epsilon_1 u_1), \tilde{h}_{a_2}(\epsilon_2 u_2)\}, \quad (4)$$

بازنویسی کرد، که در آن $\tilde{h}_a(u) = \Phi\{h_a(u)\}$ در این حالت تابع چگالی مفصل خیدو به صورت

$$c_{\rho, a_1, a_2}^X(u_1, u_2) = \sum_{(\epsilon_1, \epsilon_2) \in \Xi} \dot{\tilde{h}}_{a_1}(\epsilon_1 u_1) \dot{\tilde{h}}_{a_2}(\epsilon_2 u_2) c_\rho^N\{\tilde{h}_{a_1}(\epsilon_1 u_1), \tilde{h}_{a_2}(\epsilon_2 u_2)\},$$

حاصل می‌شود، که در آن $\dot{\tilde{h}}_a(u) = \frac{\phi\{h_a(u)\}}{\phi\{h_a(u)\} + \phi\{h_a(-u)\}} = \{1 + \exp(\gamma a \sqrt{G_a^{-1}(u)})\}^{-1}$ با توجه به رابطه

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \tilde{h}_a(u) = \begin{cases} \cdot & -1 \leq u < \cdot \\ u & \cdot \leq u \leq 1 \end{cases}$$

در پیوست ۱، اگر $a_1, a_2 \rightarrow \infty$ آن‌گاه همه جمع‌وندها در (4) حذف می‌شوند بجز وقتی که $\epsilon_1 = \epsilon_2 = +1$. در نتیجه

$$\lim_{a_1, a_2 \rightarrow \infty} C_{\rho, a_1, a_2}^X(u_1, u_2) = C_\rho^N(u_1, u_2).$$

با توجه به رابطه $\bar{h}_\rho(u) = (1+u)/2$ به ازای هر $u \in [-1, 1]$ ، اگر در رابطه (۴)، $a_1 = a_2 = 0$ ، آن‌گاه تابع مفصل‌خیز دو متغیره مرکزی شده به صورت

$$C_\rho^X(u_1, u_2) = C_\rho^N\left(\frac{1+u_1}{2}, \frac{1+u_2}{2}\right) - C_\rho^N\left(\frac{1+u_1}{2}, \frac{1-u_2}{2}\right) - C_\rho^N\left(\frac{1-u_1}{2}, \frac{1+u_2}{2}\right) + C_\rho^N\left(\frac{1-u_1}{2}, \frac{1-u_2}{2}\right), \quad (5)$$

حاصل می‌شود. چون مفصل‌گوسی دارای ویژگی متقارن شعاعی است،

$$C_\rho^N(u_1, u_2) = u_1 + u_2 - 1 + C_\rho^N(1 - u_1, 1 - u_2), \quad (u_1, u_2) \in [0, 1]^2.$$

از این رو، می‌توان رابطه (۵) را به صورت

$$C_\rho^X(u_1, u_2) = 2\left\{C_\rho^N\left(\frac{1+u_1}{2}, \frac{1+u_2}{2}\right) - C_\rho^N\left(\frac{1+u_1}{2}, \frac{1-u_2}{2}\right)\right\} - u_2, \quad (6)$$

بازنویسی کرد. در اینصورت تابع چگالی مفصل‌خیز دو متغیره مرکزی شده عبارتست از

$$c_\rho^X(u_1, u_2) = \frac{1}{2}\left\{c_\rho^N\left(\frac{1+u_1}{2}, \frac{1+u_2}{2}\right) + c_\rho^N\left(\frac{1+u_1}{2}, \frac{1-u_2}{2}\right)\right\}.$$

تقارن و عدم تقارن تابع مفصل‌خیز دو

تابع مفصل‌خیز دو متغیره C متقارن (تبادل‌پذیر) است، اگر

$$C(u_1, u_2) = C(u_2, u_1) \quad (u_1, u_2) \in [0, 1]^2.$$

در تابع مفصل‌خیز دو متغیره C متقارن است. تابع چگالی مفصل‌خیز دو متغیره $C_{\rho, a, a}^X$ در شکل ۱ به ازای $\rho = 0.75$ و $\rho = -0.75$ با $a = \{0, 0.5, 1.5, \infty\}$ نمایش داده شده است. در مقابل مفصل‌خیز دو نامتقارن است، اگر $|a_1| \neq |a_2|$. نوع دیگری از تقارن وجود دارد که متقارن شعاعی نامیده می‌شود. در این حالت مفصل‌خیز C دارای ویژگی متقارن شعاعی است، اگر

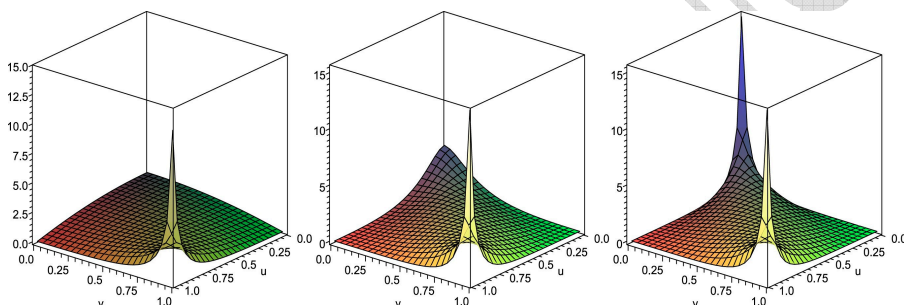
$$C_\rho^N(u_1, u_2) = u_1 + u_2 - 1 + C_\rho^N(1 - u_1, 1 - u_2) \quad \forall (u_1, u_2) \in [0, 1]^2.$$

مفصلی که متقارن شعاعی نباشد، ضرایب وابستگی دم‌های بالا و پایین آن یکسان نیستند. در حالت کلی مفصل‌خیز دو متغیره C_{ρ, a_1, a_2}^X دارای ویژگی متقارن شعاعی نیست، جز وقتی که $a_1 = \pm a_2 \rightarrow \pm\infty$ ، چون در

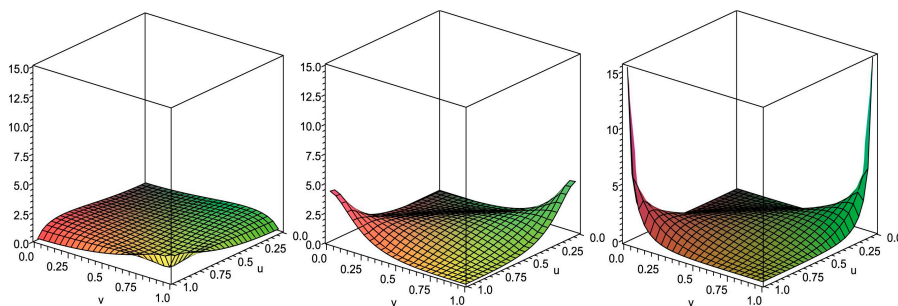
این حالت مفصل خیدو به مفصل گاوسی تبدیل می‌شود. در مفصل خیدو دو متغیره $C_{\rho,a,a}^X$ با $a \in (0, \infty)$ ، ضریب وابستگی دم بالا سنگین‌تر از ضریب وابستگی دم پایین است، یعنی با فرض $(U_1, U_2) \sim C_{\rho,a,a}^X$ به ازای هر $(u_1, u_2) \in (0, 1/2)^2$ رابطه

$$Pr(U_1 > 1 - u_1, U_2 > 1 - u_2) > Pr(U_1 < u_1, U_2 < u_2).$$

برقرار است، که در این صورت $\lambda_U > \lambda_L$ ، یعنی می‌توان عدم تقارن دمی را با این مفصل به درستی نمایش داد. این ویژگی را می‌توان در شکل ۱ مشاهده کرد.



(آ) $\rho = 0.75$ $a=0$ (چپ) $a=1.5$ (وسط) $a \rightarrow \infty$ (راست)



(ب) $\rho = -0.75$ $a=0.5$ (چپ) $a=1.5$ (وسط) $a \rightarrow \infty$ (راست)

شکل ۱: تابع چگالی مفصل خیدو متقارن $C_{\rho,a,a}^X$ به ازای $\rho = 0.75$ و $\rho = -0.75$ و $a = 0, 0.5$ (چپ)، $a = 1/5$ (وسط)، $a \rightarrow \infty$ (راست).

معیار وابستگی τ کندال تابع مفصل خی دو

در مفصل خی دو، τ کندال به صورت

$$\tau(C_{\rho, a_1, a_2}^X) = \tau(C_{\rho}^N) \{ \mathcal{F}\Phi_{\rho}(\sqrt{2}a_1, \sqrt{2}a_2) - \mathcal{F}\Phi(\sqrt{2}a_1) - \mathcal{F}\Phi(\sqrt{2}a_2) + 1 \}, \quad (7)$$

تعریف می شود که در آن $\tau(C_{\rho}^N) = (\frac{\rho}{\pi}) \arcsin(\rho)$ معیار وابستگی τ کندال مفصل گاوسی است. اگر $a_1 = a_2 = a$ یا $a_1 = -a_2 = a$ باشد، مفصل خی دو متقارن حاصل می شود که τ کندال آن به صورت

$$\tau(C_{\rho, a, a}^X) = \tau(C_{\rho}^N) \{ \mathcal{F}\Phi_{\rho}(\sqrt{2}a, \sqrt{2}a) - \mathcal{F}\Phi(\sqrt{2}a) + 1 \}, \quad (8)$$

است. اگر در رابطه (۷)، $a = 0$ باشد، آنگاه τ کندال مفصل خی دو مرکزی شده به صورت $\tau(C_{\rho}^X) = \tau(C_{\rho}^N)$ حاصل می شود. $\tau(C_{\rho}^N)^2 = \{ \frac{\rho}{\pi} \arcsin(\rho) \}^2$

۳ تابع مفصل خی دو چندمتغیره و شبیه سازی از آن

در این بخش تابع چگالی مفصل خی دو چند متغیره در حالت خاص وقتی که مفصل خی دو متقارن است بررسی می شود. فرض کنید (Z_1, \dots, Z_n) دارای توزیع نرمال چندمتغیره استاندارد و $C_{\Sigma, a}^X$ مفصل خی دو چند متغیره با پارامتر غیرمرکزی $a > 0$ و به عنوان ساختار همبستگی (X_1, \dots, X_n) است، به طوری که $X_j = (Z_j + a)^2$ و $j \in \{1, \dots, n\}$. با فرض آنکه $\Sigma \in M$ ، به طوری که M مجموعه ماتریس های همبستگی است و پارامترهای غیرمرکزی، مثبت و برابر هستند. برای $u = (u_1, \dots, u_n) \in [0, 1]^n$ داریم

$$\begin{aligned} C_{\Sigma, a}^X(u) &= Pr\{G_a((Z_j + a)^2) \leq u_j, j \in \{1, \dots, n\}\} \\ &= Pr\{h_a(-u_j) \leq Z_j \leq h_a(u_j), j \in \{1, \dots, n\}\} \\ &= \sum_{\epsilon \in \Xi} \left(\prod_{j=1}^n \epsilon_j \right) \Phi_{\Sigma} \{h_a(\epsilon_1 u_1), \dots, h_a(\epsilon_n u_n)\}, \end{aligned}$$

که در آن $\Xi = \{-1, +1\}^n$ و $\epsilon = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_n)$. تابع چگالی مفصل خی دو چند متغیره نیز به صورت

$$c_{\Sigma, a}^X(u) = \prod_{j=1}^n h'_a(u_j) \sum_{\epsilon \in \Xi} \phi_{\Sigma} \{h_a(\epsilon_1 u_1), \dots, h_a(\epsilon_n u_n)\},$$

حاصل می‌شود. با توجه به رابطه بین تابع مفصل گاوسی C_{Σ}^N و Φ_{Σ} خواهیم داشت:

$$C_{\Sigma,a}^X(u) = \sum_{\epsilon \in \Xi} \left(\prod_{j=1}^n \epsilon_j \right) C_{\Sigma}^N \{ \tilde{h}_a(\epsilon_1 u_1), \dots, \tilde{h}_a(\epsilon_n u_n) \}. \quad (9)$$

مشابه حالت دو متغیره، مفصل گاوسی چند متغیره نیز عضوی از خانواده مفصل خی‌دو چند متغیره است، وقتی که $a \rightarrow \infty$. طبق رابطه

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \tilde{h}_a(u) = \begin{cases} \cdot & -1 \leq u < \cdot \\ u & \cdot \leq u \leq 1 \end{cases}$$

همه جمع‌وندها در رابطه (۹) حذف می‌شوند به جز وقتی $\epsilon = (1, \dots, 1)$ که خواهیم داشت:

$$\lim_{a \rightarrow \infty} C_{\Sigma,a}^X(u) = C_{\Sigma}^N(u).$$

اگر $\Sigma_n = I_n$ ماتریس همانی n -بعدی باشد، آنگاه مفصل استقلال چند متغیره حاصل می‌شود. با توجه به $C_{I_n}^N = \Pi$ و با استفاده از (۹) و رابطه $\tilde{h}_a(u) - \tilde{h}_a(-u) = u$ برای هر $u \in [0, 1]$ در پیوست ۲، خواهیم داشت:

$$C_{I_n,a}^X(u) = \prod_{j=1}^n \{ \tilde{h}_a(u_j) - \tilde{h}_a(-u_j) \} = \prod_{j=1}^n u_j = \Pi(u).$$

اگر $\Sigma_{j,j} \rightarrow 1$ به ازای هر $j, j' \in \{1, \dots, n\}$ ، در این حالت مفصل گاوسی به کران بالای فرشه-هافدینگ چند متغیره یعنی $u_j = \min_{j \in \{1, \dots, n\}} u_j$ تبدیل می‌شود. به طور تقریباً حتمی اگر $Z_1 = \dots = Z_n$ ، با استفاده از رابطه $\tilde{h}_a(u) - \tilde{h}_a(-u) = u$ ، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} C_{\Sigma,a}^X(u) &= \max\{ \cdot, \min_{j \in \{1, \dots, n\}} \tilde{h}_a(u_j) - \max_{j \in \{1, \dots, n\}} \tilde{h}_a(-u_j) \} \\ &= \tilde{h}_a\{M(u)\} - \tilde{h}_a\{-M(u)\} \\ &= M(u). \end{aligned}$$

۱.۳ شبیه‌سازی از مفصل خی‌دو چندمتغیره

در شبیه‌سازی از مفصل خی‌دو، هدف تولید یک نمونه تصادفی (X_1, \dots, X_d) با توزیع‌های حاشیه‌ای F_1, \dots, F_d و مفصل $C_{\Sigma,a}^X$ با $\Sigma \in M$ و $a \geq 0$ است. بدین منظور ابتدا نمونه تصادفی

$(Z_1, \dots, Z_d) \sim \Phi_\Sigma$ تولید شده و برای هر $j \in \{1, \dots, n\}$ j تعریف می‌شود:

$$U_j = G_a\{(Z_j + a)^2\} = \text{sign}(Z_j + a)\{\Phi(Z_j + \sqrt{2}a) + \Phi(Z_j) - 1\}.$$

اگر $X_j = F_j^{-1}(U_j)$ طبق قضیه اسکالر

$$Pr(X_1 \leq x_1, \dots, X_d \leq x_d) = C_{\Sigma, a}^X\{F_1(x_1), \dots, F_d(x_d)\}.$$

به عنوان مثال، یک نمونه تصادفی به اندازه $n = 1000$ از مفصل‌خی‌دو با $a = \{0, 1, \infty\}$ و $\tau_{12} = 0/4$ و $\tau_{13} = 0/6$ و $\tau_{23} = 0/8$ تولید و نمودار پراکنش آن در شکل ۲ نمایش داده شده است.

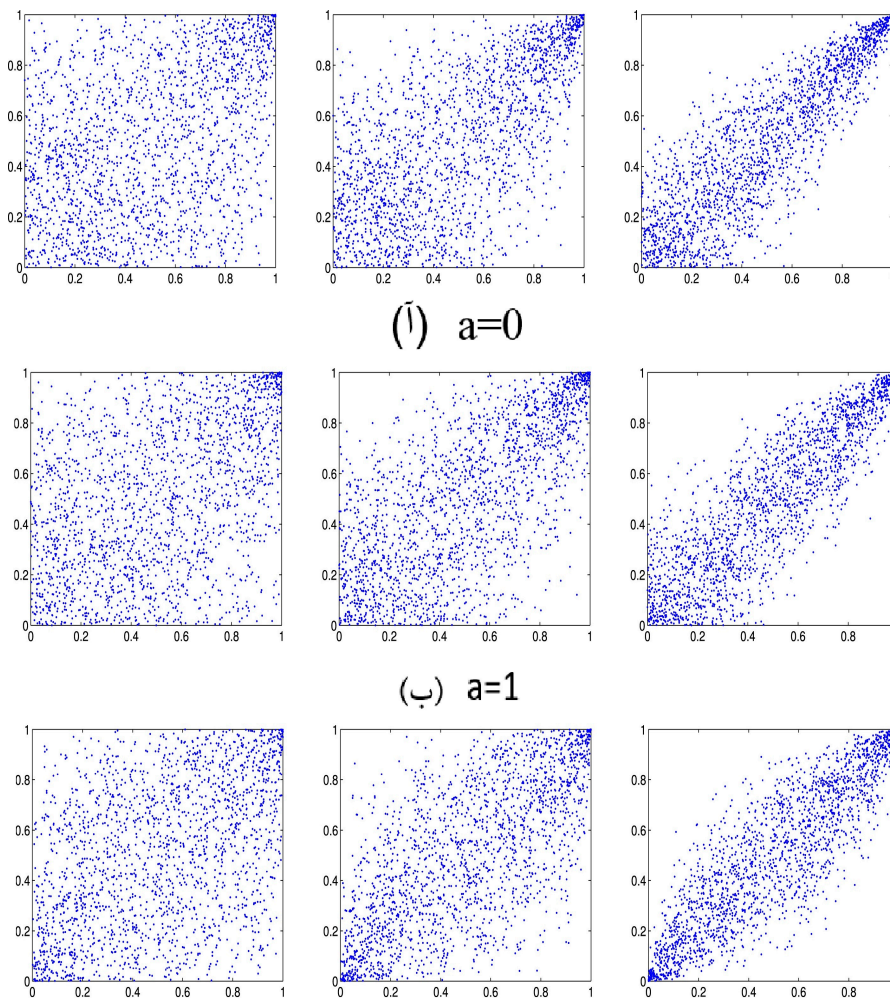
۴ برآورد درست‌نمایی مرکب زوجی تابع مفصل‌خی‌دو

برای مدل‌سازی ساختار همبستگی داده‌های فضایی نیاز به خانواده‌ای از توابع مفصل‌فضایی است. در کازانکا و پیلز (۲۰۱۰) بیان می‌شود، همبستگی هر دو نقطه از فضا که دارای فاصله h از یکدیگر هستند را می‌توان به وسیله یک تابع مفصل‌فضایی دو متغیره به صورت

$$C_h(u, v) = P[F_Z(Z(s)) < u, F_Z(Z(s+h)) < v] = C(F_Z(Z(s)), F_Z(Z(s+h))),$$

بیان کرد. باید توجه داشت که هر تابع مفصلی برای تعیین ساختار همبستگی داده‌های فضایی مناسب نیست. توابع مفصل‌فضایی دارای ویژگی‌هایی هستند، یکی از این ویژگی‌ها آن است که این توابع تحت جایگشت دلخواه π پایا هستند، به عبارت دیگر $C_h(u_{\pi(1)}, \dots, u_{\pi(n)}) = C_h(u_1, \dots, u_n)$. در حالت $n = 2$ بر اساس این ویژگی مفصل‌فضایی دو متغیره متقارن است. به عبارت دیگر، به ازای $i < j \in \{1, \dots, n\}$ ساختار همبستگی (Z_i, Z_j) با ساختار همبستگی (Z_j, Z_i) یکسان است. ویژگی دیگر توابع مفصل‌فضایی این است که اولاً با قرار گرفتن در خارج از دامنه همبستگی فضایی رابطه $C_h(u, v) \rightarrow \Pi(u, v) = uv$ برقرار است که بیان می‌کند در فواصل زیاد مشاهدات از یکدیگر مستقل هستند. ثانیاً در فواصل کم مشاهدات به یکدیگر وابسته‌اند، در این حالت رابطه $C_h(u, v) \rightarrow M(u, v) = \min(u, v)$ ، $\|h\| \rightarrow 0$ برقرار است. در مدل‌سازی و تحلیل داده‌های فضایی بر اساس فرض مانایی^۵ برای همه مکان‌های s_1, \dots, s_n و تأخیر h توزیع توأم $Z(s_1), \dots, Z(s_n)$ همانند توزیع توأم $Z(s_1 + h), \dots, Z(s_n + h)$ است. بر اساس فرض

⁵Stationary



(ا) $a=0$

(ب) $a=1$

(پ) $a \rightarrow \infty$

شکل ۲: نمودار پراکنش (U_1, U_2) چپ و (U_1, U_3) وسط و (U_2, U_3) راست، وقتی که (U_1, U_2, U_3) دارای مفصل خرد است با $a \in \{0, 1, \infty\}$ ، $\tau_{13} = 0/6$ ، $\tau_{23} = 0/8$ ، $\tau_{12} = 0/4$ ، $n = 1000$.

همسان‌گردی^۶ توزیع میدان در تمام جهات یکسان است و ساختار همبستگی بین دو مکان فقط تابعی از فاصله بین دو مکان است. به بیان دیگر، توزیع (Z_i, Z_j) تنها به فاصله اقلیدسی $\|s_i - s_j\|$ ، بین مکان‌های s_j و s_i بستگی دارد. در ادامه این بخش برآورد پارامترهای تابع مفصل خرد فضایی با روش درست‌نمایی مرکب زوجی بررسی می‌شود. چون تابع چگالی مفصل خرد در ابعاد بالا دارای پیچیدگی‌های محاسباتی است، از این رو

⁶Isotropic

برای برآورد پارامترهای آن از روش درستنمایی مرکب زوجی استفاده می‌شود که در آن تنها توابع چگالی دو متغیره به کار می‌رود. این روش یک حالت خاص روش درستنمایی مرکب^۷ است (وارین و همکاران، ۲۰۱۱). بدین منظور فرض کنید تابع مفصل $Z = (Z_1, \dots, Z_n)$ در حالت کلی به صورت $C = C_{\Sigma_{\theta, g}, a}$ باشد که در آن a پارامتر غیرمرکزی تابع مفصل $\Sigma_{\theta, g} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ یک ماتریس همبستگی است که عناصر قطر فرعی آن به صورت $(\Sigma_{\theta, g})_{ij} = g(\frac{\delta_{ij}}{\theta})$ هستند. همبستگی بین دو مکان با یک تابع پیوند $g: \mathbb{R}^+ \rightarrow [0, 1]$ کنترل می‌شود که یک تابع کاهشی روی بازه $[0, \infty)$ است و در رابطه $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$ صدق می‌کند. ماتریس همبستگی $\Sigma_{\theta, g}$ معین مثبت است و تابع پیوند g در رابطه $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n r_i r_j g(\|s_i - s_j\|) > 0$ صدق می‌کند به گونه‌ای که r_1, \dots, r_n اعداد حقیقی هستند (کرسی، ۱۹۹۳). پارامتر دامنه $\theta > 0$ نیز نشان‌دهنده میزان کاهش همبستگی با افزایش فاصله است. برای برآورد پارامترهای θ و a از تابع لگاریتم درستنمایی مرکب زوجی استفاده می‌شود که به صورت $L(\theta, a) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \ln c_{g(\frac{\delta_{ij}}{\theta})} \{F_n(Z_i), F_n(Z_j)\}$ تعریف می‌شود و در آن $F_n(z) = (n+1)^{-1} \sum_{i=1}^n \mathbb{I}(Z_i \leq z)$ تابع توزیع تجربی است. ایده استفاده از F_n به جای F_Z از این واقعیت ناشی می‌شود که از یک رویکرد نیم‌پارامتری استفاده شده که در آن تابع توزیع حاشیه‌ای کاملاً نامعلوم است. برآوردگر ماکسیمم درستنمایی مرکب زوجی برای (θ, a) به صورت $(\hat{\theta}^{Pair}, \hat{a}^{Pair}) = \underset{(\theta, a) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+}{\operatorname{argmax}} L(\theta, a)$ تعریف می‌شود. در آمار فضایی مزیت دیگر استفاده از روش درستنمایی مرکب زوجی به جای درستنمایی کامل آن است که امکان حذف زوج‌هایی که خیلی دور از هم قرار دارند وجود دارد. زیرا این زوج‌ها اطلاعات بسیار کمی درباره پارامتر وابستگی نامعلوم بیان می‌کنند. بر این اساس نوت و ریدن (۱۹۹۹) رویکرد دیگری را مطرح کردند. در این رویکرد فرض بر آن است تا $\xi \in (0, 1]$ درصد داده شده از مجموعه $n(n-1)/2$ از فاصله‌های δ_{ij} باشد، به گونه‌ای که $i < j \in \{1, \dots, n\}$ و D_ξ به عنوان ماکسیمم فاصله تعریف می‌شود. بنابراین در این حالت تابع لگاریتم درستنمایی مرکب زوجی مقید به صورت

$$L^\xi(\theta, a) = \sum_{\substack{1 \leq i < j \leq n \\ \delta_{ij} \leq D_\xi}} \ln c_{g(\frac{\delta_{ij}}{\theta})} \{F_n(Z_i), F_n(Z_j)\}, \quad (10)$$

تعریف می‌شود و برآوردگر ماکسیمم درستنمایی مرکب زوجی مقید نیز عبارت است از

$$(\hat{\theta}^\xi, \hat{a}^\xi) = \underset{(\theta, a) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+}{\operatorname{argmax}} L^\xi(\theta, a). \quad (11)$$

⁷Composite likelihood

درون‌یابی فضایی: هدف مدل‌سازی فضایی، درون‌یابی یا پیش‌گویی در مکان‌هایی است که فاقد داده هستند. روش‌های درون‌یابی معمولاً بر اساس این فرض که میدان تصادفی گاوسی باشد، یعنی برای هر $m \geq 1$ توزیع توأم $Z(s_1), \dots, Z(s_m)$ نرمال چندمتغیره است انجام می‌شود. اما این فرض‌ها ممکن است برای بعضی از مجموعه داده‌های فضایی صادق نباشد. بنابراین در این بخش یک روش درون‌یابی فضایی ارائه می‌شود که دارای انعطاف‌پذیری بیشتری است. این روش درون‌یابی امکان استفاده از مدل‌های مفصل فضایی را برای بیان ساختار همبستگی فراهم می‌آورد. از سوی دیگر چون این روش درون‌یابی مبتنی بر رتبه مشاهدات است، از این رو هیچ فرضی درباره توزیع‌های حاشیه‌ای مورد نیاز نیست و در آن از روش درون‌یابی مرکب زوجی استفاده می‌شود. هدف اصلی پیش‌گویی مقدار نامعلوم میدان تصادفی Z در مکان $s \in S$ است. بدین منظور، فاصله اقلیدسی $\delta_{.i} = \delta_i$ بین دو مکان s و s_i به ازای هر $i \in \{1, \dots, n\}$ تعریف می‌شود. فرض می‌شود توزیع حاشیه‌ای F_Z و تابع چگالی f_Z معلوم باشند، در این صورت برای هر $i \in \{1, \dots, n\}$ تابع چگالی شرطی Z به شرط $Z_i = z$ به صورت $f_{Z_i|Z_i}(z_., z) = c_{g(\frac{\delta_{.i}}{\theta})} \{F_Z(z_.), F_Z(z)\} f_Z(z_.)$ تعریف می‌شود. با در نظر گرفتن تابع زیان درجه دوم، پیش‌گویی بهینه از میانگین کردن میانگین توان دوم خطای پیش‌گو حاصل می‌شود که همان میانگین شرطی $\hat{Z}(s.) = \mathbb{E}\{Z. | Z_i = z\} = E_Z \{Z. c_{g(\frac{\delta_{.i}}{\theta})} \{F_Z(z_.), F_Z(z)\}\}$ خواهد بود. اگر F_Z نامعلوم باشد، به جای آن از تابع توزیع تجربی استفاده می‌شود. یک مقدار پیش‌گویی مبتنی بر رتبه برای Z بر اساس مشاهدات Z در مکان‌های s_i به صورت

$$\hat{Z}^{(i)} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n Z_j c_{g(\frac{\delta_{.i}}{\theta})} \{F_n(Z_j), F_n(Z_i)\} = \sum_{j=1}^n \omega_j^{(i)} Z_j,$$

است، به طوری که در آن $\omega_j^{(i)} = \frac{c_{g(\frac{\delta_{.i}}{\theta})} \{F_n(Z_j), F_n(Z_i)\}}{n}$ از طرفی برای این که مجموع وزن‌ها یک شود، می‌توان از نسخه کمی تعدیل یافته

$$\hat{Z}^{(i)} = \sum_{j=1}^n \tilde{\omega}_j^{(i)} Z_j, \quad (12)$$

استفاده کرد، که در آن $\tilde{\omega}_j^{(i)} = \frac{\omega_j^{(i)}}{\omega_1^{(i)} + \dots + \omega_n^{(i)}}$ از این رو، پیش‌گویی‌ها همواره بین حداقل و حداکثر مقادیر مشاهده شده قرار می‌گیرند. از آن‌جا که مشاهدات خیلی دور از s اطلاعات کمی را درباره Z ارائه می‌کنند، از این رو برای درون‌یابی فضایی همه مشاهدات مورد استفاده قرار نمی‌گیرند و یک همسایگی حول s انتخاب

می‌شود. فرض کنید $m < n$ تعداد مشاهداتی است که در همسایگی s با شعاع D قرار می‌گیرند، مقدار پیش‌گویی Z بر اساس مشاهداتی که در همسایگی آن قرار دارند به صورت

$$\hat{Z}^{(m)} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n \hat{Z}^{(i)} \mathbb{I}(\delta_{\cdot i} \leq D), \quad (13)$$

بیان می‌شود. یک روش رایج درون‌یابی به نام کریگیدن ساده وجود دارد. در این روش به فرض‌های توزیعی خاصی نیاز نیست و در آن فقط توابع خطی از z_1, \dots, z_n برای پیش‌گویی Z در نظر گرفته می‌شود. در

این روش فرض می‌شود μ_Z میانگین میدان تصادفی، معلوم باشد و $\tilde{\Lambda} = \begin{pmatrix} 1 & \tilde{\gamma} \\ \tilde{\gamma} & \tilde{\Sigma} \end{pmatrix}$ ماتریس همبستگی

(Z_{\cdot}, Z) و $\tilde{\gamma} = g(\frac{\delta_{\cdot i}}{\theta})$ برای هر $i \in \{1, \dots, m\}$ بردار همبستگی بین s و m نقطه همسایگی و $\tilde{\Sigma}$

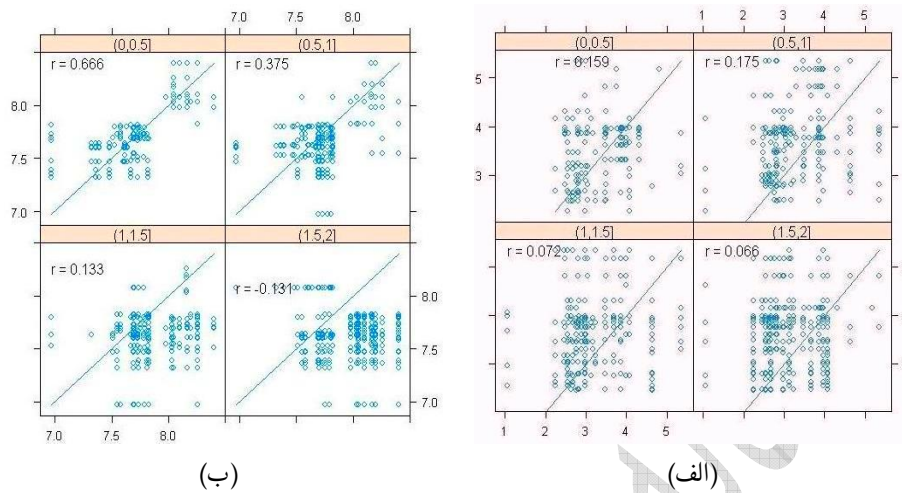
ماتریس همبستگی m نقطه همسایگی است. پیش‌گویی کریگیدن ساده به صورت

$$\hat{Z}^{Krig} = \mu_Z + \tilde{\gamma} \tilde{\Sigma}^{-1} (Z - \mu_Z \mathbf{1}), \quad (14)$$

است (کوآسی و همکاران، ۲۰۱۶).

۵ درون‌یابی فضایی متغیرهای کیفیت آب استان آذربایجان غربی

برای بررسی کیفیت آب‌های سطحی استان آذربایجان غربی، ۴۲ ایستگاه آب‌سنجی در سال ۱۳۹۰ در نظر گرفته شده و مقادیر متغیرهای کیفیت آب از جمله، HCO_3 (بی‌کربنات) و PH (اسیدیته) اندازه‌گیری شده است. به منظور بررسی مانایی میدان‌های تصادفی فضایی، نمودار H -پراکنش هر یک از متغیرهای PH و HCO_3 در شکل ۳ رسم شده است. همان‌طور که ملاحظه می‌شود میدان تصادفی HCO_3 اطراف نیمساز به طور متقارن پراکنده شده‌اند، بنابراین مانایی در مشاهدات HCO_3 برقرار است. ولی مشاهدات مربوط به PH به طور نامتقارن در اطراف نیمساز پراکنده شده‌اند، بنابراین مانایی برقرار نیست و این می‌تواند دلیلی بر وجود روند در داده‌های PH باشد. علاوه بر این، شکل‌های ۴ و ۵ نیز بیان‌گر آن هستند که متغیر HCO_3 در برابر طول و عرض جغرافیایی فاقد روند و متغیر PH در برابر طول جغرافیایی دارای روند افزایشی است، در حالی که در برابر عرض جغرافیایی روند خاصی را نشان نمی‌دهد. برای مدل‌سازی روند متغیر PH در برابر طول جغرافیایی، از رابطه رگرسیون خطی ساده $\mu(s) = \mu(x) = -2/2910 + 0/2197x$ استفاده شده که در آن x طول جغرافیایی است. داده‌های روندزوده نیز به صورت $\delta(s) = Z(s) - \mu(s)$ محاسبه شده‌اند،

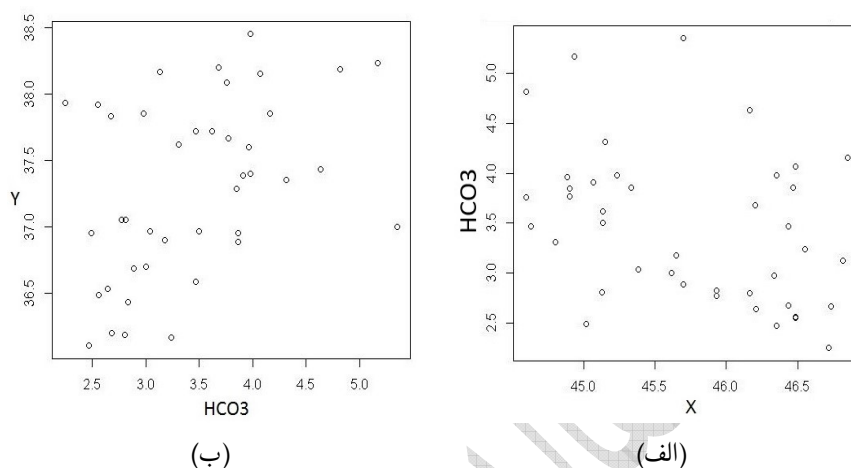


شکل ۳: نمودار H -پراکنش متغیر الف- PH و ب- HCO_3

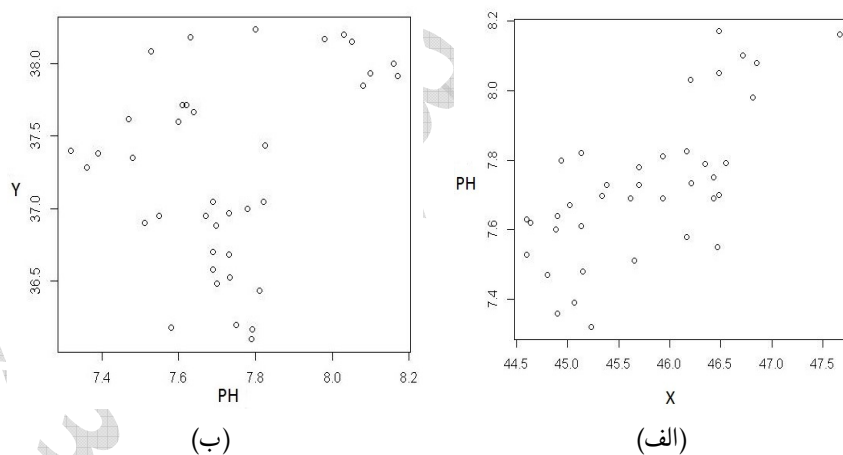
در این رابطه δ داده‌های روندزوده و μ معادله روند است. نمودار H -پراکنش داده‌های PH روندزوده نیز در شکل ۶ رسم شده است. نمودار رویه تغییرنگار مشاهدات روندزوده PH و HCO_3 با نرم‌افزار GS^+ در شکل‌های الف و ب رسم شده است. همان‌طور که ملاحظه می‌شود نمودار رویه تغییرنگار مشاهدات PH و HCO_3 روندزوده در جهت‌های مختلف به طور تقریبی یکسان است و این خود تایید بر برقراری فرض همسان‌گردی مشاهدات میدان تصادفی است. برای تحلیل متغیرهای کیفیت آب از رویکرد نیم‌پارامتری استفاده و تابع توزیع تجربی $F_n(z) = \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^n \mathbb{I}(Z_i \leq z)$ به عنوان تابع توزیع حاشیه‌ای آن‌ها انتخاب شده است. برای بررسی ساختار همبستگی فضایی داده‌های مورد مطالعه دو تابع مفصل گاوسی و خی‌دو با تابع پیوند نمایی $g(\frac{\delta_{ij}}{\theta}) = e^{-\frac{\delta_{ij}}{\theta}}$ و تابع پیوند گاوسی $g(\frac{\delta_{ij}}{\theta}) = e^{-\frac{\delta_{ij}^2}{\theta}}$ در نظر گرفته شده است. برآورد مقادیر پارامترهای (a, θ) با استفاده از روش درستنمایی مرکب زوجی و بر اساس رابطه (۱۱) با $\xi = 0.1$ ، یعنی بر اساس ۱۰٪ نزدیک‌ترین زوجها انجام گرفته است. اریبی و انحراف معیار برآوردگرها نیز با استفاده از $B = 100$ نمونه بوت استرپ پارامتری به صورت

$$\text{bias}(\hat{\theta}) = \frac{1}{B} \sum_{b=1}^{B=100} \theta_b^* - \hat{\theta}, \quad \text{sd}(\hat{\theta}) = \sqrt{\frac{1}{B-1} \sum_{b=1}^{B=100} (\theta_b^* - \frac{1}{B} \sum_{b=1}^{B=100} \theta_b^*)^2}$$

برآورد شده، که در آن‌ها θ_b^* و $\hat{\theta}$ به ترتیب برآورد پارامترها در هر کدام از B نمونه بوت استرپ و برآورد پارامتر مجهول در نمونه اصلی است. دامنه مؤثر هر یک از توابع مفصل از رابطه $\tau(C_{g(\frac{D}{\theta})}) = 0.2$ محاسبه و نتایج



شکل ۴: نمودار پراکنش مقادیر HCO_3^- در برابر طول جغرافیایی الف، عرض جغرافیایی ب.

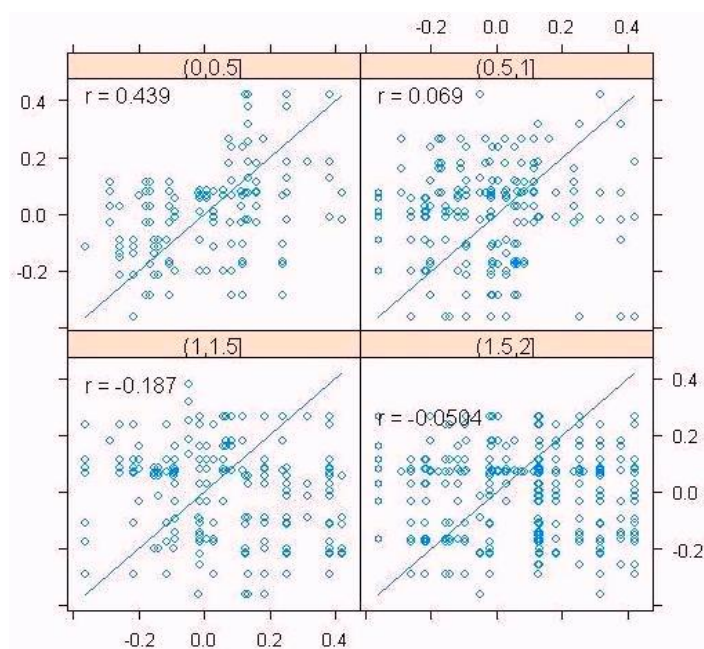


شکل ۵: نمودار پراکنش مقادیر PH در برابر طول جغرافیایی الف، عرض جغرافیایی ب.

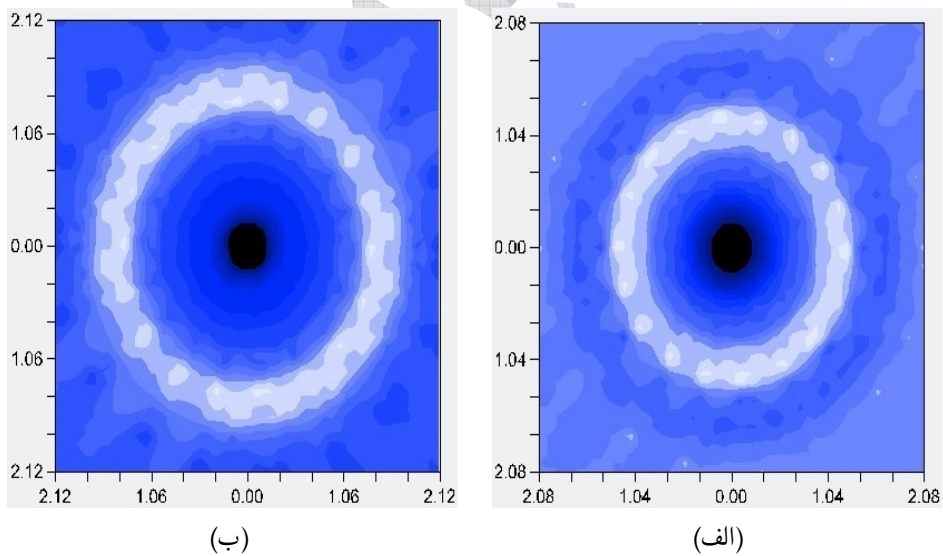
در جدول ۱ ارائه شده است. برای بررسی دقت روش درون‌یابی فضایی زوجی در تحلیل متغیرهای کیفیت آب، از دو معیار اعتبارسنجی متقابل میانگین توان دوم خطای پیش‌گو^۸ و ریشه میانگین توان دوم خطای پیش‌گو^۹

^۸Cross Validation Mean Square Prediction Errors

^۹Cross Validation Root Mean Square Prediction Errors



شکل ۶: نمودار H -پراکنش متغیر PH روندزده.



شکل ۷: رویه تغییرنگار متغیر الف- PH - ب- HCO_3

جدول ۱: برآورد پارامترهای مفصل‌های گاوسی و خی‌دو با توابع پیوند نمایی و گاوسی و انحراف معیار (پرانتر اول) و اریبی (پرانتر دوم)

متغیر	مفصل	تابع پیوند	$\hat{\theta}$	\hat{a}	دامنه مؤثر
HCO_3	گاوسی	نمایی	$0/086(0/077)(0/034)$	-	۰/۱
	گاوسی	گاوسی	$0/084(0/059)(0/049)$	-	۰/۰۹
خی‌دو	نمایی	نمایی	$1/293(0/142)(0/084)$	$3/089(0/028)(-0/094)$	۱/۵۲
	گاوسی	گاوسی	$0/517(0/074)(0/012)$	$3/088(0/049)(-0/117)$	۰/۵۶
PH	گاوسی	نمایی	$0/393(0/137)(0/061)$	-	۰/۴۶
	گاوسی	گاوسی	$0/226(0/083)(0/036)$	-	۰/۲۴
خی‌دو	نمایی	نمایی	$2/021(0/141)(0/071)$	$3/196(0/018)(-0/189)$	۲/۳۷
	گاوسی	گاوسی	$0/635(0/102)(0/056)$	$3/089(0/407)(-0/323)$	۰/۷۴

استفاده شده است که به ترتیب به صورت

$$CVMSPE = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (Z(s_i) - \hat{Z}_{-i}(s_i))^2$$

$$CVRMSPE = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (Z(s_i) - \hat{Z}_{-i}(s_i))^2}$$

تعریف می‌شوند. این دو معیار برای بررسی دقت پیش‌گویی مقادیر متغیرهای کیفیت آب در ایستگاه‌های آب‌سنجی و بر اساس روش درون‌یابی فضایی زوجی محاسبه شده‌اند، که در آن‌ها $\hat{Z}_{-i}(s_i)$ پیش‌گویی $Z(s_i)$ بدون استفاده از مشاهده موقعیت i ام است. نتایج مربوط به معیارهای اعتبارسنجی متقابل متغیرهای کیفیت آب ایستگاه‌های آب‌سنجی در جدول ۲ ارائه شده است. همان‌طور که ملاحظه می‌شود با توجه به معیارهای $CVMSPE$ و $CVRMSPE$ مدل مناسب برای تحلیل فضایی هر دو متغیر HCO_3 و PH روندزودده مدل مفصل‌خی‌دو با تابع پیوند نمایی است. دامنه مؤثر برای متغیر HCO_3 مقدار $D = 1/52$ و برای متغیر PH مقدار $D = 2/37$ برآورد شده که نشان می‌دهد برای متغیر HCO_3 حدود $59/46\%$ همه زوج‌ها فاصله‌ای کمتر از $1/52$ دارند (مقدار τ کندال آن‌ها بیش‌تر از $0/2$) و این بیان‌گر سطح همبستگی نسبتاً بالایی

جدول ۲: معیارهای اعتبارسنجی $CVRMSPE$ و $CVMSPE$

CVRMSPE	CVMSPE	تابع پیوند	مفصل	متغیر
۰/۹۶۰	۰/۹۲۲	نمایی	گوسی	HCO_3
۰/۹۷۶	۰/۹۵۴	گوسی		
۰/۸۴۵	۰/۷۱۴	نمایی	خیدو	HCO_3
۰/۸۵۰	۰/۷۲۳	گوسی		
۰/۲۸۱	۰/۰۷۹	نمایی	گوسی	PH
۰/۲۷۹	۰/۰۷۸	گوسی		
۰/۲۶۸	۰/۰۷۲	نمایی	خیدو	PH
۰/۲۸۸	۰/۰۸۳	گوسی		

در داده‌های متغیر HCO_3 است و برای متغیر PH روندزوده نیز تنها ۴٪ همه زوج‌ها دارای فاصله‌ای بیشتر از $2/37$ هستند (مقدار τ کندال آن‌ها کمتر از $0/2$) که آن نیز بیان‌گر سطح همبستگی بالا در داده‌های PH روندزوده می‌باشد. هم‌چنین در ایستگاه آب‌سنجی جدید پی‌قلعه با مختصات معلوم $(37, 45/033) = s.$ که مقادیر متغیرهای HCO_3 و PH در اختیار نبوده است، پیش‌گویی با روش درون‌یابی فضایی زوجی بر اساس روابط (۱۲) و (۱۳) انجام گرفته است. با روش کریگیدن نیز پیش‌گویی متغیرها برای ایستگاه پی‌قلعه از رابطه (۱۴) محاسبه شده و واریانس پیش‌گویی کریگیدن نیز از رابطه $1 - \hat{\gamma}^T \hat{\Sigma}^{-1} \hat{\gamma}$ حاصل شده است. نتایج پیش‌گویی کریگیدن و پیش‌گویی مبتنی بر تابع مفصل خیدو با تابع پیوند نمایی در ایستگاه پی‌قلعه در جدول ۳ ارائه شده است.

بحث و نتیجه‌گیری

خانواده‌توابع مفصل خیدو امکان مدل‌سازی ساختارهای همبستگی دمی نامتقارن را فراهم می‌آورند. ساختار همبستگی این مفصل به‌گونه‌ای است که در ابعاد بالا می‌تواند شکل‌های مختلف وابستگی مثبت را نمایش دهد

جدول ۳: پیش‌گوهای کریگیدن و مبتنی بر تابع مفصل‌خی‌دو با تابع پیوند نمایی برای متغیرهای HCO_3 و PH روندزودوده در ایستگاه پی‌قلعه.

متغیر	موقعیت جدید	پیش‌گوی کریگیدن	$MSPE$	پیش‌گویی مبتنی بر مفصل‌خی‌دو	$MSPE$
HCO_3	پی‌قلعه	۲/۸۲۶	۰/۶۸۱	۳/۶۸۳	۰/۲۱۹
PH	پی‌قلعه	۷/۴۶۹	۰/۲۰۸	۷/۷۷۲	۰/۰۵۱

که یکی از حالت‌های خاص آن مفصل‌گاوسی است. از طرفی چون پارامترهای این توابع مفصل از طریق یک تابع همبستگی بیان می‌شوند، بنابراین می‌توانند در بسیاری از زمینه‌های کاربردی از جمله آمار فضایی به کار گرفته شوند. چون بیش‌تر روش‌های درون‌یابی فضایی از جمله روش کریگیدن بر اساس این فرض که میدان تصادفی گاوسی باشد انجام می‌شود و تحقق این فرض در عمل معمولاً دشوار است، از این رو مدل‌سازی ساختارهای همبستگی فضایی با استفاده از توابع مفصل انعطاف‌پذیری بیش‌تری را فراهم می‌آورد. برای بررسی ساختار همبستگی فضایی یکی از دلایلی که روی تابع مفصل متمرکز می‌شویم آن است که می‌توان سطح وابستگی در میدان‌های تصادفی فضایی را با اندازه‌های ناپارامتری مانند دامنه مؤثر، کمی نمود. در این مقاله ساختار همبستگی فضایی متغیرهای کیفیت آب و ارزیابی روش درون‌یابی فضایی زوجی مورد بررسی قرار گرفت و نتایج حاصل از روش مبتنی بر تابع مفصل و روش کریگیدن بیان شده و برای برآورد پارامترها و درون‌یابی فضایی از یک رویکرد استنباطی زوجی نیم‌پارامتری مبتنی بر رتبه مشاهدات استفاده شده است.

پیوست ۱: به ازای هر $u \in [-1, 1]$

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \tilde{h}_a(u) = \begin{cases} \cdot & -1 \leq u < \cdot \\ u & \cdot \leq u \leq 1 \end{cases}$$

برهان. فرض می‌شود $Z \sim N(0, 1)$ ، در این صورت می‌توان نوشت

$$\tilde{h}_a(u) = \Phi\{h_a(u)\} = Pr\{Z + a \leq \text{sign}(u)\sqrt{G_a^{-1}(|u|)}\}.$$

اگر $a \rightarrow \infty$ ، آن‌گاه با احتمال یک $Z + a > 0$ است. بنابراین وقتی $u \in [-1, 0)$ ، آن‌گاه $\tilde{h}_a(u)$ منجر

به صفر می‌شود و اگر $u \in [0, 1]$ ، آن‌گاه $\tilde{h}_a(u) = Pr\{(Z + a)^2 \leq G_a^{-1}(u)\}$

پیوست ۲: به ازای هر $u \in [0, 1]$ ، $\tilde{h}_a(u) - \tilde{h}_a(-u) = u$ ، فرض می‌شود $Z \sim N(0, 1)$ در این صورت می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} \tilde{h}_a(u) - \tilde{h}_a(-u) &= \Phi\{h_a(u)\} - \Phi\{h_a(-u)\} \\ &= Pr\{h_a(-u) \leq Z \leq h_a(u)\} \\ &= Pr\{-\sqrt{G_a^{-1}(u)} - a \leq Z \leq \sqrt{G_a^{-1}(u)} - a\} \\ &= Pr\{(Z + a)^2 \leq G_a^{-1}(u)\} = u \end{aligned}$$

تقدیر و تشکر

نویسندگان از پیشنهادات و نظرات ارزنده داوران و ویراستار محترم مجله که موجب ارائه بهتر مقاله شد، تقدیر و تشکر می‌نمایند.

مراجع

- [۱] جمشیدی، ر.، (۱۳۹۶)، تحلیل داده‌های فضایی با تابع مفصل خیدو چندمتغیره، پایان‌نامه کارشناسی ارشد، گروه آمار، دانشگاه الزهرا تهران.
- [2] Bardossy, A. (2006), Copula-based Geostatistical Models for Groundwater Quality Parameters, *Water Resources Research*, **42**, 1-12.
- [3] Bardossy, A. and Li, J. (2008), Geostatistical Interpolation Using Copulas, *Water Resources Research*, **44**, 1-15.
- [4] Cressie, N. (1993), *Statistics for Spatial Data*, Revised Edition, John Wiley, New York.

- [5] Kazianka, H. and Pilz, J. (2010), Copula-based Geostatistical Modeling of Continuous and Discrete Data Including Covariates, *Stochastic Environmental Research and Risk Assessment*, **24**, 661–673.
- [6] Nelsen, R. B. (2006), *An Introduction to Copulas*, 2nd Ed., Springer, New York.
- [7] Nott, D. J. and Ryden, T. (1999), Pairwise Likelihood Methods for Inference in Image Models, *Biometrika*, **86**, 661–676.
- [8] Quessy, J. F. and Rivest, L. P. and Toupin, M. H. (2015), Semi-Parametric Pairwise Inference Methods in Spatial Models based on Copulas, *Spatial Statistics*, **14**, 472–490.
- [9] Quessy, J. F. and Rivest, L. P. and Toupin, M. H. (2016), On the Family of Multivariate Chi-Square Copulas, *Journal of Multivariate Analysis*, **52**, 40–60.
- [10] Sklar, A. (1959), Fonctions de Repartition an Dimensions et Leurs Marges, Publications Institut de Statistique de Universite de Paris, **8**, 229–231.
- [11] Varin, C. and Reid, N. and Firth, D. (2011), An Overview of Composite Likelihood Methods, *Statistica Sinica*, **21**, 5–42.

Analysis of Spatial Data with Chi-Square Copula

Jamshidi, R. and Shams, S.

Department of Statistics, Alzahra University, Tehran, Iran.

Abstract: In this paper, a family of copula functions called chi-square copula family is used for modeling the dependency structure of stationary and isotropic spatial random fields. The dependence structure of this copula is such that, it generalizes the Gaussian copula and flexible for modeling for high-dimensional random vectors and unlike Gaussian copula it allows for modeling of tail asymmetric dependence structures. Since the density function of chi-square copula in high dimension has computational complexity, therefore to estimate its parameters, a composite pairwise likelihood method is used in which only bivariate density functions are used. The purpose of this paper is to investigate the properties of the chi-square copula family, estimating its parameters with the composite pairwise likelihood and its application in spatial interpolation.

Keywords: Chi-square copula, Composite pairwise likelihood, Isotropic spatial random field, Spatial interpolation.

Mathematics Subject Classification (2010): 62H11.