برخی از ویژگی‌های سیستم‌های k از n قابل تعمیر

مجید چهکندی

گروه آمار، دانشگاه بیرجند

چکیده: عملکرد یک سیستم تنها به نحوهٔ طراحی آن بستگی ندارد. بلکه برنامه‌ای که برای تعمیر و نگهداری آن در نظر گرفته می‌شود نیز در بهبود عملکرد آن تاثیر بسزایی خواهد داشت. بنابراین یکی از مباحث مهم در قابلیت اعتماد، بحث تعمیر و نگهداری سیستم‌ها است. در این مقاله یک سیستم k از n قابل تعمیر در نظر گرفته می‌شود که در زمان صفر شروع به کار می‌کند. وقتی سیستم خراب می‌شود تحت تعمیر مینیمال قرار می‌گیرد و دوباره شروع به کار می‌کند. با استفاده از رابطه بین مفاهیم تعمیر مینیمال و مقادیر رکوردی، تابع قابلیت اعتماد، تابع نرخ خطر، تابع میانگین مانده عمر و برخی از ویژگی‌های قابلیت اعتماد این سیستم به‌دست می‌آید. همچنین به کمک برخی از ترتیب‌های تصادفی شناخته شده، طول عمر و مانده عمر دو سیستم k از n قابل تعمیر مقایسه می‌شوند. در پایان با توجه به نوع اطلاعات موجود درباره طول عمر سیستم‌های k از n، فواصل پیش‌بینی ناپارامتری برای طول عمر سیستم قابل تعمیر مورد نظر به‌دست خواهد آمد.

واژه‌های کلیدی: ترتیب‌های تصادفی، تعمیر مینیمال، مقادیر رکوردی، سیستم k از n.

°آدرس الکترونیک مسئول مقاله: مجید چهکندی ma.chahkandi@yahoo.com, mchahkandi@birjand.ac.ir

°کد موضوع‌بندی ریاضی (۲۰۱۰): $62G30$، $62N05$.

۱ مقدمه

سیستم‌هایی که شکست می‌خورند به دو نوع سیستم‌های قابل تعمیر و سیستم‌های غیر قابل تعمیر دسته‌بندی می‌شوند. غیرقابل تعمیر بودن سیستم‌ها لزوماً به این معنی نیست که نمی‌توان مولفه یا سیستم مورد نظر را تعمیر کرد، بلکه ممکن است فرآیند تعمیر به لحاظ اقتصادی مقرون به صرفه نباشد، بنابراین این سیستم‌ها تعمیر نمی‌شوند. به عنوان مثال، وقتی در یک نیروگاه یک پمپ هیدرولیک خراب می‌شود آن را جایگزین می‌کنند. در این مثال پمپ هیدرولیک نمونه‌ای از یک سیستم غیرقابل تعمیر و نیروگاه مورد نظر نمونه‌ای از یک سیستم قابل تعمیر است. تعویض تسمه دینام یا تسمه تایم یک اتومبیل نیز مثال‌هایی از این دست هستند. پس از آن‌که یک سیستم قابل تعمیر دچار خرابی می‌شود الگوهای مختلفی که برای تعمیر سیستم در نظر گرفته می‌شود اثرات مختلفی بر قابلیت اعتماد سیستم خواهند داشت. چنانچه سیستم مورد نظر پس از شکست طوری تعمیر شود که قابلیت اعتماد (تابع نرخ شکست) آن به حالت اولیه آن یعنی زمان شروع به کار برگردد، یک تعمیر کامل خواهیم داشت که اصطلاحاً می‌گویند سیستم به خوبی یک سیستم نو[1] شده است. چنانچه تعمیر به گونه‌ای باشد که قابلیت اعتماد (تابع نرخ شکست) سیستم مشابه وضعیتی باشد که سیستم دقیقاً قبل از شکست داشته در این صورت یک تعمیر مینیمال وجود خواهد داشت که اصطلاحاً به بدی کهنه[2] نامیده می‌شود. تعمیر مینیمال عموماً برای سیستم‌هایی مورد استفاده قرار می‌گیرد که از قطعات متعددی تشکیل شده‌اند که گران قیمت هستند و جایگزینی این سیستم‌ها (تعمیر کامل) مقرون به صرفه نیست و بهتر است که تعمیر شوند. به عنوان مثال، تعمیر مینیمال یک اتومبیل، یک هواپیما، یک کامپیوتر یا هر سیستم پیچیده قابل تعمیر دیگر معمولاً از تعمیر کامل آن مقرون به صرفه‌تر است. زمان‌های شکست سیستم‌های قابل تعمیری که در هنگام شکست تحت تعمیر کامل قرار گرفته‌اند با فرایند تجدید و چنانچه تحت تعمیر مینیمال قرار گرفته باشند با فرایند پواسون ناهمگن مدل می‌کنند. روش‌های دیگری از مدل‌های تعمیر نیز وجود دارند که نه به صورت تعمیر کامل هستند و نه به صورت تعمیر مینیمال. این کلاس از مدل‌ها به مدل‌های تعمیر ناقص معروفند. در این مدل‌ها پس از تعمیر، قابلیت اعتماد سیستم نه به صفر برمی‌گردد و نه مشابه حالت قبل از شکست می‌شود، بلکه بسته به نوع تعمیر اندازه‌ای کاهش می‌یابد. برای جزئیات بیشتر درباره این مدل‌ها و سیستم‌های قابل تعمیر به برون و پروشان (۱۹۸۳)، کیجیما (۱۹۸۹)، تادج و همکاران (۲۰۱۱) و اسدی (۱۳۹۲) مراجعه شود.

[1] Good-as-new

[2] Bad-as-old

در این مقاله به مطالعه برخی از ویژگی‌های قابلیت اعتماد سیستم k از n قابل تعمیری پرداخته می‌شود که پس از هر شکست تحت تعمیر مینیمال قرار می‌گیرد. مطالعه طول عمر یک سیستم تعمیر پذیر که در هر خرابی تحت تعمیر مینیمال قرار می‌گیرد مورد توجه بسیاری از محققین قرار گرفته‌است. اما در این مقاله ارتباطی بین طول عمر یک سیستم k از n قابل تعمیر و مقادیر k-رکورد برقرار می‌شود که قبل از این کمتر مورد توجه قرار گرفته‌است. مطالعه طول عمر سیستم k از n قابل تعمیر از این دیدگاه باعث خواهد شد تا نتایج جدیدی در ارتباط با ویژگی‌های سنی طول عمر و مانده عمر سیستم مورد نظر به‌دست آید و بتوان طول عمر سیستم را نیز پیش‌بینی نمود. برای این منظور ابتدا در بخش ۲ تعاریف و مفاهیم مورد نیاز از جمله مفهوم رکورد، k-رکورد و تعمیر مینیمال مطرح می‌شوند. سپس در بخش ۳ برخی از ویژگی‌های قابلیت اعتماد سیستم k از n قابل تعمیر بررسی می‌شود و نمایشی برای میانگین مانده عمر این سیستم به‌دست می‌آید. همچنین در قالب یک مثال ویژگی‌های مانده عمر سیستم قابل تعمیر مورد نظر بررسی می‌شود. در بخش ۴ طول عمر و مانده عمر دو سیستم از دیدگاه تصادفی مقایسه خواهد شد. در بخش ۵ فواصل پیش‌بینی مختلفی برای طول عمر سیستم k از n قابل تعمیر به‌دست می‌آید. در انتها نیز به بحث و نتیجه‌گیری پرداخته می‌شود.

۲ تعاریف و مفاهیم

سیستم‌های k از n معمولاً به دو شکل سیستم‌های k از n: F و k از n: G تعریف می‌شوند. در سیستم‌های k از n: F سیستم زمانی از کار می‌افتد که حداقل k مولفه آن از کار بیفتد و یک سیستم k از n: G زمانی کار می‌کند که حداقل k مولفه آن کار کند. در این مقاله منظور از سیستم‌های k از n همان سیستم‌های k از n: F است. بنابراین طول عمر یک سیستم k از n: F متشکل از مولفه‌هایی با طول عمر $X_1, \ldots, X_n$ همان kامین آماره ترتیبی از نمونه یعنی $X_{k:n}$ خواهد بود (بولند و پروشان، ۱۹۸۳؛ رایس، ۱۹۸۷).

تعریف ۱. فرض کنید $\{X_i, i \geq 1\}$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی باشد. مشاهده X_j یک رکورد بالا (پایین) نامیده می‌شود، هرگاه مقدار آن از همه مشاهدات قبلی بیشتر (کمتر) باشد، یعنی $X_j > (<) X_i$، به ازای هر $i < j$.

تابع بقاء nامین رکورد بالا برای $n \geq 1$ که با نماد R_n نمایش داده می‌شود به صورت

$$\bar{F}_{R_n}(x) = \bar{F}(x) \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(-\log \bar{F}(x))^i}{i!}, \qquad (1)$$

به‌دست می‌آید، که در آن $R_1 = X_1$ (آرنولد و همکاران، ۱۹۹۸).

تعریف ۲. (آرنولد و همکاران، ۱۹۹۸) دنباله متغیرهای تصادفی $\{X_n, n \geq 1\}$ را در نظر بگیرید. فرض کنید $T_{0,k} = k$ ، $R_{0,k} = X_{1:k}$ و برای $n \geq 1$

$$T_{n,k} = \min\{j : j > T_{n-1,k}, X_j > X_{T_{n-1,k}-k+1:T_{n-1,k}}\},$$

توجه شود که $X_{i:m}$، iامین آماره ترتیبی در نمونه‌ای به حجم m است. در این صورت دنباله k-رکوردهای بالا به صورت $R_{n,k} = X_{T_{n,k}-k+1:T_{n,k}};\ n \geq 1$ تعریف می‌شود.

به طور مشابه می‌توان دنباله k-رکوردهای پایین را نیز تعریف نمود. توجه داریم که برای k برابر با یک، k-رکورد همان رکورد معمولی است. برای سادگی کار از این پس برای $n \geq 1$، nامین k-رکورد بالا با نماد $R_{n,k}$ نمایش داده می‌شود. در این‌صورت تابع بقای $R_{n,k}$ به صورت

$$P(R_{n,k} > t) = (\bar{F}(t))^k \sum_{h=0}^{n-1} \frac{(-k \log \bar{F}(t))^h}{h!}, \qquad (۲)$$

بیان می‌شود.

برای بیان مفهوم تعمیر مینیمال، سیستمی را در نظر بگیرید که در زمان صفر شروع به کار می‌کند. اگر سیستم خراب شود، آنگاه تعمیر مینیمال روی آن انجام می‌شود. چنانچه سیستمی تحت تعمیر مینیمال قرار گیرد و به وضعیت فعال بازگردد آنگاه تابع نرخ خطر آن وضعیتی مشابه آنچه که بلافاصله قبل از شکست داشته را خواهد داشت. یعنی پس از تعمیر وضعیت سیستم از نظر سالخوردگی مشابه یک سیستم نو نیست بلکه مشابه حالتی است که بلافاصله قبل از این‌که از کار بیفتد داشته‌است. به عنوان مثال چنانچه سیستم در زمان t_0 از کار بیفتد و $r(t_0)$ مقدار تابع نرخ خطر در زمان t_0 باشد در این‌صورت پس از تعمیر مینیمال $r(t_0)$ بدون تغییر باقی خواهد ماند. این ویژگی در تعریف تعمیر مینیمال که توسط ناکاگاوا و کوادا (۱۹۸۳) ارائه شد نیز مشهود است.

فرض کنید $0 = Y_0 \leq Y_1 \leq \ldots \leq Y_n \ldots$ زمان‌های خرابی یک سیستم را نشان دهند. همچنین فاصله زمانی بین دو خرابی را به صورت $\{X_n = Y_n - Y_{n-1};\ n \geq 1\}$ در نظر بگیرید. اگر $F(t) = P(X_1 \leq t)$، آنگاه سیستم در زمان‌های شکست $\{Y_i;\ i \geq 1\}$ تحت تعمیر مینیمال قرار گرفته است اگر و تنها اگر

$$P(X_n \leq x | X_1 + \ldots + X_{n-1} = t) = \frac{F(t+x) - F(t)}{\bar{F}(t)}; \quad n = 2, 3, \ldots, \qquad (۳)$$

برای هر $t \geq 0$ و $x > 0$، به طوریکه $F(t) < 1$.

قضیه ۱. (ناکاگاوا، ۲۰۰۵) فرض کنید $G_n(x) = P(Y_n \leq x)$ تابع توزیع زمان nامین تعمیر مینیمال یک سیستم با طول عمر اولیه $F(t)$ باشد، آنگاه

$$G_n(x) = 1 - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(H(x))^j}{j!} e^{-H(x)}, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{۴}$$

که در آن $H(x) = -\log \bar{F}(x)$.

چنانچه تابع توزیع زمان رخ‌داد nامین تعمیر مینیمال (یا به عبارتی طول عمر سیستمی که $n-1$ تعمیر مینیمال بر روی آن انجام شده است) با تابع توزیع nامین رکورد بالا مقایسه شود ملاحظه می‌شود که این دو توزیع یکسان هستند (آرنولد و همکاران، ۱۹۹۸؛ احمدی و ارقامی، ۲۰۰۱). توزیع‌های طول عمر بر اساس رفتار تابع نرخ خطر آن‌ها به کلاس‌هایی از سالخوردگی تقسیم می‌شوند (بارلو و پروشان، ۱۹۸۱). در این مقاله از نمادهای زیر را برای رده‌های مختلف توزیع‌های طول عمر استفاده خواهد شد. نماد IFR (DFR) برای متغیر طول عمری که تابع نرخ خطر آن صعودی (نزولی) است، نماد $IFRA$ $(DFRA)$ برای متغیر طول عمری که تابع نرخ خطر تجمعی آن صعودی (نزولی) است، نماد NBU (NWU) برای متغیر طول عمری که تابع بقاء آن برای هر $t \geq 0$ و $x \geq 0$ دارای ویژگی $\bar{F}(x+t) \leq (\geq) \bar{F}(t)\bar{F}(x)$ است، نماد $NBUE$ برای متغیر طول عمری که برای هر $t \geq 0$ تابع بقاء آن در ویژگی $\int_t^\infty \bar{F}(x)dx \leqslant \mu \bar{F}(t)$ صدق می کند، که در آن μ میانگین توزیع است و نماد $IMRL$ $(DMRL)$ برای متغیر طول عمری که میانگین مانده عمر آن صعودی (نزولی) است.

۳ ویژگی‌های قابلیت اعتماد سیستم

سیستم k از n قابل تعمیری را در نظر بگیرید که از مولفه‌هایی با طول عمر مستقل $X_1, \ldots, X_n$ با توزیع مشترک F تشکیل شده‌است. این سیستم در زمان صفر شروع به کار می‌کند و در هر خرابی تحت تعمیر مینیمال قرار گیرد تا دوباره به وضعیت فعال بازگردد. فرض کنید زمانی که صرف تعمیر سیستم می‌شود قابل اغماض و متغیر تصادفی $T_{k:n}(i)$ بیانگر طول عمر این سیستم پس از $(i-1)$امین تعمیر مینیمال باشد. در این‌صورت

با استفاده از (۴) تابع توزیع طول عمر این سیستم به صورت

$$P(T_{k:n}(i) > t) = \bar{F}_{k:n}(t) \sum_{j=0}^{i-1} \frac{(-\log \bar{F}_{k:n}(t))^j}{j!}, \tag{۵}$$

به دست می‌آید، که در آن

$$\bar{F}_{k:n}(t) = \sum_{i=0}^{k-1} \binom{n}{i} (F(t))^i (\bar{F}(t))^{n-i}.$$

تابع بقاء kامین آماره ترتیبی است (دیوید و ناگاراجا، ۲۰۰۳).

فرع ۱. در حالت $k = 1$ و $k = n$ یعنی برای یک سیستم سری k مولفه‌ای قابل تعمیر رابطه (۵) به صورت

$$P(T_{1:k}(i) > t) = (\bar{F}(t))^k \sum_{h=0}^{i-1} \frac{(-k \log \bar{F}(t))^h}{h!}, \tag{۶}$$

ساده می‌شود، که همان تابع بقاء iامین k-رکورد بالاست. بنابراین مطالعه طول عمر یک سیستم سری k مولفه‌ای قابل تعمیر که در هر شکست تحت تعمیر مینیمال قرار می‌گیرد مشابه مطالعه توزیع k- رکورد بالاست.

لم ۱. فرض کنید $r_{T_{k:n}(i)}(t)$ تابع نرخ خطر یک سیستم k از n قابل تعمیر و $r_{k:n}(t)$ تابع نرخ خطر kامین آماره ترتیبی باشند. در این‌صورت رابطه

$$r_{T_{k:n}(i)}(t) = g(-\log \bar{F}_{k:n}(t)) r_{k:n}(t), \tag{۷}$$

بین این دو تابع نرخ خطر برقرار است، که در آن $g(x) = \frac{x^{i-1}/(i-1)!}{\sum_{j=0}^{i-1} x^j/j!}$.

برهان. با مشتق گیری از طرفین رابطه (۵) تابع چگالی متغیر تصادفی $T_{k:n}(i)$ به صورت

$$f_{T_{k:n}(i)}(t) = \frac{f_{k:n}(t)(-\log \bar{F}_{k:n}(t))^{i-1}}{(i-1)!}. \tag{۸}$$

به دست می‌آید. با تقسیم طرفین رابطه (۸) بر (۵) نتیجه مطلوب به دست می‌آید.

در قضیه بعد شرایطی بررسی می‌شود که تحت آن طول عمر سیستم k از n قابل تعمیر مورد نظر دارای ویژگی IFR، $IFRA$، $DMRL$ ، NBU یا $NBUE$ است.

قضیه ۲. سیستم k از n قابل تعمیر با طول عمر $T_{k:n}(i)$ که از مولفه‌هایی با طول عمر مستقل $X_1, \ldots, X_n$ و هم‌توزیع با تابع توزیع F ساخته شده است را در نظر بگیرید.

الف) اگر F یک توزیع $IFR(IFRA)$ باشد، آنگاه توزیع طول عمر $T_{k:n}(i)$ نیز برای $1 \leq k \leq n$ و $i \geq 1$ دارای ویژگی $IFR(IFRA)$ خواهد بود.

ب) اگر F یک توزیع با ویژگی $NBUE$ و یا $DMRL$ باشد، آنگاه توزیع طول عمر یک سیستم موازی قابل تعمیر، یعنی $T_{n:n}(i)$، نیز برای $i \geq 1$ این ویژگی را حفظ خواهد کرد.

ج) اگر F یک توزیع با ویژگی IFR، $IFRA$ یا NBU باشد، آنگاه توزیع طول عمر یک سیستم سری قابل تعمیر، یعنی $T_{1:n}(i)$، نیز دارای همان ویژگی است.

برهان. فرض کنید F_1 و F_2 دو تابع توزیع به ترتیب با توابع نرخ خطر $r_1(t)$ و $r_2(t)$ باشند به طوری‌که $r_2(t) = g(t) r_1(t)$. بلاک وهمکاران (۱۹۸۵) ثابت کردند که اگر $g(t)$ تابعی صعودی و $0 \leqslant g(t) \leqslant 1$ آنگاه ویژگی IFR، $IFRA$، NBU یا $DMRL$ بودن F_1 توسط F_2 نیز حفظ می‌شود. ابتدا نشان داده می‌شود که $g(t)$ در رابطه (۷) تابعی صعودی است که برد آن در بازه بسته صفر و یک قرار دارد. اما مشتق

$$\frac{d}{dt} g(t) = \left\{ \frac{t^{i-2}}{(i-2)!} + \sum_{j=1}^{i-1} \frac{t^{i+j-2}}{(i-2)!(j-1)!} \left[\frac{1}{j} - \frac{1}{i-1}\right] \right\} \Big/ \left(\sum_{j=0}^{i-1} t^j / j!\right)^2$$

تابعی مثبت است، زیرا t نامنفی و $j \leq i-1$ است. از طرفی توجه شود که عبارت صورت کسر تابع $g(t)$ یکی از جملات نامنفی موجود در مخرج کسر است، بنابراین صورت کسر در تابع $g(t)$ از مخرج کسر کوچکتر است و لذا $0 \leqslant g(t) \leqslant 1$. از طرفی تاکاهاشی (۱۹۸۸) و ابوعموه و ال-نوئی (۱۹۸۶) نشان دادند که ویژگی IFR یا $IFRA$ بودن توزیع F بوسیله k امین آماره ترتیبی و ویژگی $NBUE$ یا $DMRL$ بودن F نیز توسط nامین آماره ترتیبی آن حفظ می‌شود. بنابراین اثبات نتایج قسمت الف) و ب) قضیه نتیجه می‌شود. برای اثبات قسمت ج) تنها کافی است به این نکته توجه شود که $r_{1:n}(t) = nr(t)$ که $r(t)$ همان تابع نرخ خطر توزیع F است. از طرفی در قضیه بلاک و همکاران (۱۹۸۵) حتی اگر تابع $g(t)$ از یک تجاوز کند بازهم قضیه برای حفظ ویژگی‌های IFR، $IFRA$ و NBU برقرار است (ناگاراجا، ۱۹۹۰).

با استفاده از رابطه (۷) و قضیه بلاک و همکاران (۱۹۸۵) به راحتی می‌توان نتیجه زیر را به‌دست آورد.

فرع ۲. چنانچه طول عمر سیستم k از n، یعنی $X_{k:n}$، متعلق به هر یک از خانواده توزیع‌های IFR، $IFRA$، NBU یا $DMRL$ (DFR، $DFRA$، NWU یا $IMRL$) باشد، آنگاه پس از iامین تعمیر مینیمال که $i \geq 1$ بازهم توزیع طول عمر سیستم، یعنی $T_{k:n}(i)$، متعلق به همان خانواده است.

کمپس (۱۹۹۵) نشان داد که اگر k-رکورد iام دارای ویژگی IFR باشد آنگاه k-رکورد $(i+1)$ام نیز

این ویژگی را حفظ می‌کند. این بدان معنی است که ویژگی IFR بودن یک سیستم سری قابل تعمیر پس از هر تعمیر مینیمال حفظ می‌شود. در قضیه بعد این ویژگی به یک سیستم k از n قابل تعمیر تعمیم داده می‌شود.

قضیه ۳. اگر متغیر طول عمر $T_{k:n}(i)$ دارای ویژگی IFR، $IFRA$ یا NBU باشد آن‌گاه $T_{k:n}(i+1)$ نیز متعلق به همان خانواده است.

برهان. نسبت تابع نرخ خطر دو سیستم عبارت است از

$$\frac{r_{T_{k:n}(i+1)}(t)}{r_{T_{k:n}(i)}(t)}=\frac{\sum\limits_{\ell=0}^{i-1}\left(-\log\left(\bar{F}_{k:n}(t)\right)^{\ell+1}\middle/\ell!\right.}{\sum\limits_{j=0}^{i}\left(-\log\left(\bar{F}_{k:n}(t)\right)^{j}\middle/j!\right.}. \tag{۹}$$

چون $h(x)=\frac{\sum_{j=0}^{i-1}x^{j+1}/j!}{\sum_{j=0}^{i}x^{j}/j!}$ تابعی صعودی نسبت به x است (لم ۱.۲، کوچار، ۱۹۹۰) و نیز $r_{T_{k:n}(i+1)}(t)=$ $h(-\log(\bar{F}_{k:n}(t))r_{T_{k:n}(i)}(t)$ با استفاده از نتایج بلاک و همکاران (۱۹۸۵) برهان کامل می‌شود.

یکی از متغیرهای بسیار مهم و کاربردی در قابلیت اعتماد، متغیر مانده عمر است. مطالعه مانده عمر سیستم k از n قابل تعمیر نیز می‌تواند حائز اهمیت باشد. متغیر مانده عمر را می توان به اشکال مختلفی تعریف کرد. در این جا فرض می‌شود سیستم k از n قابل تعمیر مورد نظر در زمان t پس از $(j-1)$امین تعمیر هنوز زنده است و علاقه‌مند به مطالعه مانده عمر سیستم هستیم. بنابراین متغیر مانده عمر به ازای $1\le j<i$ به صورت $(T_{k:n}(i)-t|T_{k:n}(j)>t)$ تعریف می‌شود. برای به دست آوردن تابع بقاء مانده عمر از نتایج خالدی و شجاعی (۲۰۰۷) و اسدی و راقب (۲۰۱۰) استفاده می‌شود. برای این منظور فرض کنید $F_V(t)=F_{k:n}(t)$. در این‌صورت با مقایسه روابط (۱) و (۵) ملاحظه می‌شود که توزیع متغیر تصادفی $T_{k:n}(i)$ معادل با توزیع iامین رکورد استخراجی از جامعه ای با توزیع $F_V(t)$ است، یعنی $T_{k:n}(i)\stackrel{st}{=}R_i^V$. بنابراین

$$P(T_{k:n}(i)-t\geqslant x|T_{k:n}(j)>t)=\sum_{\ell=0}^{j-1}p_{F_V}(\ell)P(Y_{i-\ell}\geqslant-\ln\bar{F}_V(x|t)), \tag{۱۰}$$

که در آن $\bar{F}_V(x|t)=\frac{\bar{F}_V(x+t)}{\bar{F}_V(t)}$، $p_{F_V}(\ell)=\frac{\bar{F}_V(t)(-\ln\bar{F}_V(t))^{\ell}/\ell!}{\sum_{s=0}^{j-1}\bar{F}_V(t)(-\ln\bar{F}_V(t))^{s}/s!}$ و $Y_{i-\ell}$ متغیر تصادفی گاما با پارامترهای شکل $i-\ell$ و مقیاس یک است. در واقع رابطه (۱۰) را می‌توان به صورت

$$P(T_{k:n}(i)-t\geqslant x|T_{k:n}(j)>t)=\sum_{\ell=0}^{j-1}p_{F_{k:n}}(\ell)P(Y_{i-\ell}\geqslant-\ln\bar{F}_{k:n}(x|t)), \tag{۱۱}$$

بازنویسی کرد، که در آن $\bar{F}_{k:n}(x|t)$ تابع بقاء متغیر مانده عمر یک سیستم k از n است که از مولفه‌های مستقل و هم توزیع F تشکیل شده‌است و $p_{F_{k:n}}(\ell) = P(W = \ell | W \leqslant j - ۱)$ که W متغیر تصادفی پواسون با پارامتر $-\ln(\bar{F}_{k:n}(t))$ است. با استفاده از رابطه (۱۰) و تعمیم نتایج اسدی و راقب (۲۰۱۰) تابع میانگین مانده عمر سیستم k از n قابل تعمیر نیز به صورت

$$\begin{aligned} m^{i,j}_{k:n}(t) &= E(T_{k:n}(i) - t | T_{k:n}(j) > t) \\ &= \sum_{\ell=۰}^{j-۱} p_{F_{k:n}}(\ell) m^{i-\ell}_{k:n}(t), \end{aligned} \tag{۱۲}$$

به‌دست می‌آید، که در آن

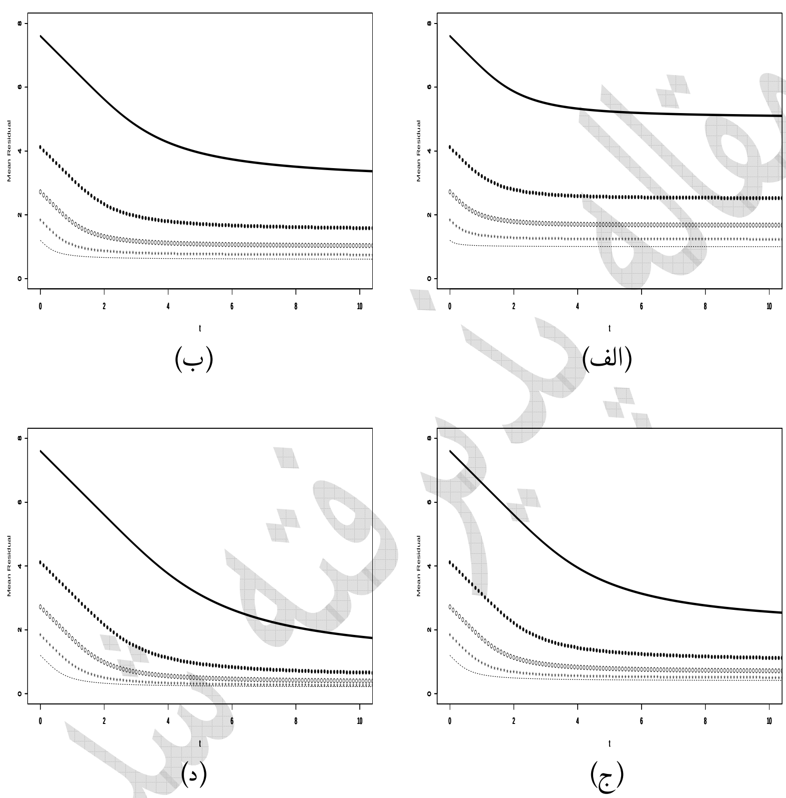
$$\begin{aligned} m^{i}_{k:n}(t) &= E(T_{k:n}(i) - t | T_{k:n}(۱) > t) \\ &= \sum_{s=۰}^{i-۱} \int_{۰}^{\infty} \frac{\bar{F}_{k:n}(x|t)(-\ln \bar{F}_{k:n}(x|t))^{s}}{s!} dx \\ &= \int_{۰}^{\infty} P(W_t(x) \leqslant i - ۱) dx, \end{aligned} \tag{۱۳}$$

و $W_t(x)$ متغیر تصادفی پواسون با پارامتر $-\ln \bar{F}_{k:n}(x|t)$ است.

تذکر ۱. در حالت خاص $k = ۱$، $n = ۱$، $i = n + ۱$ و $j = m + ۱$ مقدار $m^{i,j}_{k:n}(t)$ برابر با مقدار $\psi^{m}_{n}(t)$ است که توسط اسدی و راقب (۲۰۱۰) به‌دست آمده‌است. فرض کنید مولفه‌های سازنده سیستم k از n از توزیع یکسان نمایی با پارامتر λ تشکیل شده باشند در این‌صورت برای سیستم سری n مولفه‌ای یعنی زمانی‌که $k = ۱$ داریم $m^{i}_{۱:n}(t) = E(T_{۱:n}(i) - t | T_{۱:n}(۱) > t) = \frac{i}{n\lambda}$. چنانچه n نیز برابر یک باشد $m^{i}_{۱:۱}(t) = \psi_{i-۱}(t)$.

مثال ۱. سیستم k از ۵ را در نظر بگیرید که مولفه‌های سازنده آن مستقل و هم توزیع از توزیع نمایی با پارامتر یک هستند. به دلیل پیچیدگی محاسبات تابع میانگین مانده عمر این سیستم برای حالت‌های مختلف با استفاده از نرم افزار R محاسبه شده‌است. شکل ۱ نمودار تابع میانگین مانده عمر این سیستم یعنی $m^{۶,m}_{k:۵}(t) = E(T_{k:۵}(۶) - t | T_{k:۵}(m) > t)$ را به ازای $k = ۱, ۲, ۳, ۴, ۵$ و $m = ۱, ۳, ۴, ۵$ نشان می‌دهد. در هر نمودار از پایین به بالا به ترتیب منحنی اول مربوط به $k = ۱$ (نقطه چین) است و با افزایش k خط منحنی تیره‌تر می‌شود تا اینکه بالاترین منحنی در هر نمودار مربوط به $k = ۵$ (خط

مشکی) است. مطابق انتظار میانگین مانده عمر تابعی نزولی از t است و با افزایش k نیز افزایش می‌یابد. همان‌طور که ملاحظه می‌شود $m^{۶,m}_{k:۵}(t)$ تابعی نزولی از m به ازای هر k و t است. به عنوان مثال داریم $m^{۶,۱}_{۵:۵}(۲) = ۶/۲۶۶۴, m^{۶,۳}_{۵:۵}(۲) = ۵/۶۸۰۴, m^{۶,۴}_{۵:۵}(۲) = ۵/۶۱۹۶, m^{۶,۵}_{۵:۵}(۲) = ۵/۶۰۵۷$.



شکل ۱: میانگین مانده عمر سیستم k از n قابل تعمیر در مثال ۱، الف: $m = ۱$، ب: $m = ۳$، ج: $m = ۴$ و د: $m = ۵$.

۴ مقایسه تصادفی طول عمر دو سیستم k از n قابل تعمیر

در این بخش برخی ترتیب‌های تصادفی معروف (شیکد و شانتیکومار، ۲۰۰۷) برای مقایسه طول عمر دو سیستم k از n قابل تعمیر مورد استفاده قرار می‌گیرد. برای مقایسه تصادفی طول عمر سیستم‌های k از n به

برمال‌زن و همکاران (۱۳۹۴)، دینگ و همکاران (۲۰۱۳) و رضاپور و علامت‌ساز (۲۰۱۴) مراجعه شود.

قضیه ۴. فرض کنید $T^X_{k:n}(i)$ طول عمر سیستم k از n قابل تعمیر متشکل از واحدهای $X_1, \dots, X_1$ پس از $(i-1)$امین تعمیر مینیمال باشد. در این‌صورت

الف) $T_{k:n}(i) \leq_{\ell r} T_{k:n}(i+1)$

ب) $T_{k_1:n_1}(i) \leq_{hr} T_{k_2:n_2}(i)$ برای $n_1 - k_1 \geq n_2 - k_2$.

برهان. الف) کافی است ثابت شود نسبت $\frac{f_{T_{k:n}(i+1)}(t)}{f_{T_{k:n}(i)}(t)}$ تابعی صعودی از t است. اما توجه کنید که

$$\frac{f_{T_{k:n}(i+1)}(t)}{f_{T_{k:n}(i)}(t)} = \frac{-\log \bar{F}_{k:n}(t)}{i}.$$

چون $\bar{F}_{k:n}(t)$ تابعی نزولی از t است اثبات کامل می‌شود.

ب) با استفاده از نتایج راقب و امین (۱۹۹۶) می‌دانیم که $X_{i:n} \leq_{\ell r} X_{j:m}$ برای $n-i \geq m-j$. بنابراین $r_{k_1:n_1}(t) \geqslant r_{k_2:n_2}(t)$ همین طور $\bar{F}_{k_1:n_1}(t) \leqslant \bar{F}_{k_2:n_2}(t)$. حال با در نظر گرفتن رابطه (۷) و صعودی بودن تابع $g(\cdot)$ نتیجه می‌شود که $r_{T_{k_1:n_1}(i)}(t) \geqslant r_{T_{k_2:n_2}(i)}(t)$ لذا اثبات کامل می‌شود.

قضیه ۵. فرض کنید $T^X_{k:n}(i)$ طول عمر سیستم k از n قابل تعمیر متشکل از واحدهای $X_1, \dots, X_n$ با توزیع مشترک F و $T^Y_{k:n}(i)$ طول عمر سیستم k از n قابل تعمیر متشکل از واحدهای $Y_1, \dots, Y_n$ با توزیع مشترک G پس از $(i-1)$امین تعمیر مینیمال باشند. در اینصورت

الف) اگر $X \leq_{st} Y$ آن‌گاه $T^X_{k:n}(i) \leqslant_{st} T^Y_{k:n}(i)$.

ب) اگر $X \leq_{hr} Y$ آن‌گاه $T^X_{k:n}(i) \leqslant_{hr} T^Y_{k:n}(i)$.

ج) اگر $X \leq_{disp} Y$ و $F_{k_1:n_1}$ یا $G_{k_2:n_2}$ دارای خاصیت DFR باشد، آنگاه $T^X_{k_1:n_1}(i) \leqslant_{disp} T^Y_{k_2:n_2}(i)$ برای $k_1 \leq k_2$ و $n_1 - k_1 \geq n_2 - k_2$.

برهان. برای اثبات قسمت‌های الف) و ب) کافی است توجه شود که اگر $X \leq_{st} (\leq_{hr}) Y$ آن‌گاه $X_{k:n} \leq_{st} (\leq_{hr}) Y_{k:n}$ (کوچار، ۲۰۱۲). از طرفی احمدی و ارقامی (۲۰۰۱) نشان دادند ترتیب تصادفی معمولی و نرخ خطر بین دو جامعه به رکوردهای استخراجی از دو جامعه نیز منتقل می‌شود. بنابراین اثبات کامل می‌شود.

ج) با استفاده از نتایج کوچار (۲۰۱۲)، فرضیات قسمت ج) در قضیه نتیجه می دهد که $X_{k_1:n_1} \leq_{disp} Y_{k_2:n_2}$. از طرفی خالدی (۲۰۰۵) نشان داد که تحت فرضیاتی که F یا G دارای خاصیت DFR باشد و X

در ترتیب پراکندگی از Y کمتر باشد آنگاه ترتیب پراکندگی توسط رکوردهای استخراجی از دو جامعه نیز حفظ می‌شود. بنابراین اثبات کامل است.

قضیه ۶. فرض کنید $T^X_{k:n}(i)$ و $T^Y_{k:n}(i)$ به ترتیب طول عمر سیستم‌های k از n قابل تعمیر متشکل از واحدهای $X_1,\dots,X_n$ با توزیع مشترک F و واحدهای $Y_1,\dots,Y_n$ با توزیع مشترک G پس از $(i-1)$امین تعمیر مینیمال باشند. اگر $X \leq_{hr} Y$ آنگاه

$$(T^X_{k:n}(i)-t \geqslant x|T^X_{k:n}(j)>t) \leqslant_{st} (T^Y_{k:n}(i)-t \geqslant x|T^Y_{k:n}(j)>t).$$

برهان. چون $X \leq_{hr} Y$، با استفاده از نتایج کوچار (۲۰۱۲) این ترتیب به آماره‌های ترتیبی متناظر از دو جامعه نیز منتقل می‌شود، یعنی $X_{k:n} \leq_{hr} Y_{k:n}$. از طرفی شیکد و شانتیکومار (۲۰۰۷) نشان دادند که ترتیب نرخ خطر بین دو متغیر تصادفی، ترتیب تصادفی معمولی بین مانده عمر دو متغیر تصادفی را نتیجه می‌دهد پس $\bar{F}^X_{k:n}(x|t) \leqslant \bar{F}^Y_{k:n}(x|t)$. حال فرض کنید W_1 دارای توزیع پواسون با پارامتر $-\ln(\bar{F}^X_{k:n}(x|t))$ و W_2 دارای توزیع پواسون با پارامتر $-\ln(\bar{F}^Y_{k:n}(x|t))$ باشد. در این صورت با استفاده از نتایج خالدی و شجاعی (۲۰۰۷) نتیجه می‌شود که $(W_1|W_1 \leqslant j-1) \leqslant_{\ell r} (W_2|W_2 \leqslant j-1)$ برای $j \geq 1$ یا به عبارت دیگر $p_{F^X_{k:n}}(\ell) \leqslant_{st} p_{F^Y_{k:n}}(\ell)$. از طرفی داریم

$$\begin{aligned}
P(T^X_{k:n}(i)-t \geqslant x|T^X_{k:n}(j)>t) &= \sum_{\ell=0}^{j-1} p_{F^X_{k:n}}(\ell) P(Y_{i-\ell} \geqslant -\ln \bar{F}^X_{k:n}(x|t)) \\
&\leq \sum_{\ell=0}^{j-1} p_{F^X_{k:n}}(\ell) P(Y_{i-\ell} \geqslant -\ln \bar{F}^Y_{k:n}(x|t)) \\
&\leq \sum_{\ell=0}^{j-1} p_{F^Y_{k:n}}(\ell) P(Y_{i-\ell} \geqslant -\ln \bar{F}^Y_{k:n}(x|t)) \\
&= P(T^Y_{k:n}(i)-t \geqslant x|T^Y_{k:n}(j)>t), \qquad (۱۴)
\end{aligned}$$

که در آن نامساوی اول با استفاده از نزولی بودن تابع بقاء و اینکه $-\ln(\bar{F}^X_{k:n}(x|t)) \geq -\ln \bar{F}^Y_{k:n}(x|t))$ به‌دست می‌آید. نامساوی دوم نیز با استفاده از نزولی بودن $P(Y_{i-\ell} \geq y)$ نسبت به ℓ و استفاده از نتایج شیکد و شانتیکومار (۲۰۰۷) به‌دست می‌آید.

۵ پیش بینی طول عمر سیستم

فرض کنید $X_1, \ldots, X_n$ متغیرهای تصادفی مستقل و هم‌توزیع از جامعه X با توزیع مشترک F باشند. سیستم k از n قابل تعمیری را در نظر بگیرید که از مولفه‌هایی با طول عمر $Y_1, \ldots, Y_n$ که مستقل از جامعه X هستند و دارای توزیع یکسان F هستند، تشکیل شده است. طول عمر سیستم k از n قابل تعمیر پس از $(i-1)$امین تعمیر مینیمال نیز با $T^Y_{k:n}(i)$ نمایش داده می‌شود. حال بر اساس اطلاعاتی که از نمونه استخراجی از جامعه X در دسترس داریم ضریب پیش‌بینی بازه پیش‌بینی برای $T^Y_{k:n}(i)$ در حالت‌های مختلف به‌دست خواهد آمد.

حالت اول: فرض کنید $T_{k:n}(i)$ و $T_{k:n}(j)$ طول عمر سیستم‌های k از n قابل تعمیر متشکل از مولفه‌هایی با طول عمر $X_1, \ldots, X_n$ باشند. در این صورت بازه $(T_{k:n}(i), T_{k:n}(j))$ یک بازه پیش‌بینی برای $T^Y_{k:n}(\ell)$ با ضریب پیش‌بینی $\alpha_1(i,j,\ell;k,n)$ است که به صورت

$$\begin{aligned}
\alpha_1(i,j,\ell;k,n) &= P(T_{k:n}(i) \leqslant T^Y_{k:n}(\ell) \leqslant T_{k:n}(j)) \\
&= \sum_{s=i}^{j-1} \int_0^\infty \frac{\left(-\log \bar{F}_{k:n}(t)\right)^{s+\ell-1}}{s!(\ell-1)!} \bar{F}_{k:n}(t) f_{k:n}(t)dt \\
&= \sum_{s=i}^{j-1} \int_0^\infty \frac{e^{-2t} t^{s+\ell-1}}{s!(\ell-1)!} dt \\
&= \sum_{s=i}^{j-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{s+\ell} \binom{s+\ell-1}{s} \\
&= \frac{1}{2} \sum_{s=i}^{j-1} P(Z=s),
\end{aligned}$$

به‌دست می‌آید، که در آن $Z \sim B(s+\ell-1, \frac{1}{2})$.

همان‌طور که ملاحظه می‌شود ضریب پیش‌بینی بازه مورد نظر به ثابت k و توزیع F بستگی ندارد. راقب (۲۰۰۶) نیز برای رکورد ℓام استخراجی از جامعه Y یک بازه پیش‌بینی بر حسب رکوردهای iام و jام استخراجی از جامعه X به‌دست آورد که ضریب پیش بینی آن برابر با $\alpha_1(i,j,\ell;k,n)$ است.

برای در نظر گرفتن حالت‌های بیشتر می‌توان بازه پیش‌بینی را برای یک سیستم سری قابل تعمیر نیز به‌دست آورد. فرض کنید نیاز است طول عمر یک سیستم سری k مولفه‌ای قابل تعمیر از جامعه Y بر اساس سیستم‌های سری r مولفه‌ای قابل تعمیر از جامعه X پیش‌بینی شود. در این‌صورت $(T_{1:r}(i), T_{1:r}(j))$ یک

بازه پیش‌بینی برای $T^{Y}_{1:k}(m)$ است که ضریب پیش‌بینی آن به صورت

$$\begin{aligned}\alpha_2(i,j,m;k,r) &= P(T_{1:r}(i) \leqslant T^{Y}_{1:k}(m) \leqslant T_{1:r}(j)) \\ &= \int_0^\infty [P(T_{1:r}(i) \leqslant t) - P(T_{1:r}(j) \leqslant t)] f_{T^{Y}_{1:k}(m)}(t)dt \\ &= \sum_{s=i}^{j-1} \frac{k^m r^s}{s!(m-1)!} \int_0^\infty (-\log u)^{s+m-1} u^{r+k-1} du \\ &= \sum_{s=i}^{j-1} \binom{s+m-1}{s} (\frac{k}{r+k})^s (\frac{r}{r+k})^m \\ &= \frac{r}{r+k} \sum_{s=i}^{j-1} P(Z=s),\end{aligned}$$

به‌دست می‌آید، که در آن $Z \sim B(s+m-1, \frac{k}{k+r})$ است.

همان‌طور که در جدول ۱ ملاحظه می‌شود $\alpha_2(i,j,m;k,r)$ تابعی نزولی از i و صعودی نسبت به j است. با بزرگ شدن مقادیر m یا k مقادیر بزرگ‌تر برای i وj، فواصلی با ضریب پیش‌بینی بالاتر را نتیجه خواهند داد. لازم به ذکر است که در سطر اول این جدول تنها کافی است $k=r$ باشد و هر مقدار دلخواهی که در نظر گرفته شود مقادیر مربوط به ضرایب پیش‌بینی تفاوتی نخواهند کرد.

حالت دوم: گاهی ممکن است اطلاعات موجود درباره جامعه X تنها آماره‌های ترتیبی آن باشند. در این‌صورت نیز می‌توان برای طول عمر سیستم قابل تعمیر فاصله پیش‌بینی به دست آورد. به دلیل پیچیده بودن محاسبات برای سیستم k از n قابل تعمیر، در اینجا بازه پیش‌بینی برای سیستم سری قابل تعمیر براساس طول عمر سیستم‌های i از n و j از n مشاهده شده از جامعه X مد نظر قرار می‌گیرد. فرض کنید $X_{1:n}, \ldots, X_{n:n}$ آماره‌های ترتیبی مشاهده شده از جامعه X باشند. در این صورت $(X_{i:n}, X_{j:n})$، $i>j$ یک بازه پیش‌بینی

برای $T^{Y}_{1:n}(i)$ است که ضریب پیش‌بینی آن به صورت

$$\begin{aligned}
\alpha_3(i,j;m,k) &= P(X_{i:n} \leqslant T^{Y}_{1:k}(m) \leqslant X_{j:n}) \\
&= \sum_{s=i}^{j-1} \int_{0}^{\infty} \binom{n}{s} (F(t))^{s} (\bar{F}(t))^{n-s} \frac{k^{m} (\bar{F}(t))^{k-1} (-\log \bar{F}(t))^{m-1}}{(m-1)!} f(t)dt \\
&= \sum_{s=i}^{j-1} \sum_{h=0}^{s} \binom{n}{s} \binom{s}{h} (-1)^{h} \int_{0}^{\infty} \frac{k^{m} (\bar{F}(t))^{n+k+h-s-1} (-\log \bar{F}(t))^{m-1}}{(m-1)!} f(t)dt \\
&= \sum_{s=i}^{j-1} \sum_{h=0}^{s} \frac{k^{m} \binom{n}{s} \binom{s}{h} (-1)^{h}}{(n+h+k-s)^{m}},
\end{aligned}$$

به‌دست می‌آید، که به توزیع مولفه‌های سیستم بستگی ندارد.

تذکر ۲. در تمام حالت‌هایی که فواصل پیش‌بینی برای طول عمر سیستم قابل تعمیر به‌دست آمد، می‌توان فاصله پیش‌بینی با کوتاهترین طول را نیز به ازای یک ضریب پیش‌بینی مشخص به‌دست آورد (چهکندی و احمدی، ۲۰۱۳؛ چهکندی و همکاران، ۲۰۱۴).

علاوه بر بازه‌های پیش‌بینی، بازه‌های تحمل نیز از اهمیت خاصی برخوردارند. برای مطالعه بیشتر در این زمینه به میرمصطفائی و همکاران (۲۰۱۶ و ۲۰۱۷) و وحیدیان و نقی‌زاده قمی (۱۳۹۶) مراجعه شود.

بحث و نتیجه‌گیری

با استفاده از ارتباط بین مفهوم رکورد و تعمیر مینیمال می‌توان ویژگی‌های قابلیت اعتماد سیستم‌های قابل تعمیری که تحت تعمیر مینیمال قرار گرفته‌اند را بررسی نمود. در این مقاله از این ارتباط بهره برده و سیستم قابل تعمیر k از nای در نظر گرفته‌شد که پس از هر خرابی تحت تعمیر مینیمال قرار می‌گیرد. سپس رابطه‌ای بین تابع نرخ خطر سیستم و تابع نرخ خطر توزیع پایه مولفه‌های سیستم تعیین و نشان داده شد چنانچه توزیع طول عمر مولفه‌های سیستم داری ویژگی IFR یا $IFRA$ باشد، آن‌گاه توزیع طول عمر سیستم قابل تعمیر نیز دارای همان ویژگی خواهد بود. در ادامه با استفاده از مفهوم ترتیب‌های تصادفی، طول عمر دو سیستم k از n قابل تعمیر مقایسه و اثبات شد که ترتیب تصادفی معمولی و نرخ خطر بین توزیع پایه مولفه‌های دو سیستم به توزیع طول عمر دو سیستم نیز منتقل می‌شود. پس از بررسی برخی از ویژگی‌های میانگین مانده عمر سیستم مورد نظر، بازه‌های پیش‌بینی ناپارامتری برای طول عمر سیستم k از n قابل تعمیر نیز به‌دست آمد. بازه

پیش‌بینی برای طول عمر یک سیستم k از n قابل تعمیر بر اساس طول عمر سیستم‌های i از n و j از n که در بخش ۵ تحت عنوان حالت دوم تنها برای سیستم سری مورد بررسی قرار گرفت، نیز می‌تواند موضوع مورد بحث برای پژوهش‌های آتی باشد. با استفاده از مفهوم بردار علامت که توسط سامانیگو (۱۹۸۵) معرفی شد، می‌توان نتایج این مقاله را به سیستم منسجم در حالت کلی تعمیم داد.

تقدیر و تشکر

نویسنده از داوران و ویراستار محترم مجله به خاطر دقت نظر و صرف وقت در مطالعه مقاله و ارائه پیشنهادات ارزشمند کمال تشکر و قدردانی را دارد.

مراجع

[۱] اسدی، م. (۱۳۹۲)، آشنایی با نظریه قابلیت اعتماد، تهران، مرکز نشر دانشگاهی.

[۲] برمال زن، ق.، حیدری، ع.، معصومی‌فرد، خ. (۱۳۹۴)، مقایسه تصادفی سیستم‌های سری و موازی در مدل مقیاس، مجله علوم آماری ایران، **۹**، ۲۰۶-۱۸۹.

[۳] وحیدیان، م.، نقی‌زاده قمی، م. (۱۳۹۶)، محاسبه سطح دقت حدود تحمل برای طول عمر سیستم‌های k از n، مجله علوم آماری ایران، **۱۱**، ۳۵۵-۳۴۵.

[4] Abouammoh, A. M. and Ahmed, A. N. (1988), The New Better Than Used Failure Rate Class of Distribution, *Advances in Applied Pobability*, **20**, 237-240.

[5] Abouammoh, A. and El-Neweihi, (1986), Closure of the NBUE and DMRL Classes Under Formation of Parallel Systems, *Statistics and Pobability Letters*, **4**, 223-225.

[6] Ahmadi, J. and Arghami, N. R. (2001), Some Univariate Stochastic Orders on Record Values, *Communications in Statistics Theory and Methods*, **30**, 69-74.

جدول ۱: مقادیر $\alpha_{2}(i,j;m,r,k)$ برای مقایر مختلف i و j

k	r	m	i	j: ۴	۵	۶	۷	۱۰
۷	۷	۳	۱	۰٫۵۳۱	۰٫۶۴۸	۰٫۷۳۰	۰٫۸۲۰	۰٫۸۵۵
			۲	۰٫۳۴۳	۰٫۴۶۰	۰٫۵۴۲	۰٫۵۹۷	۰٫۶۶۸
			۳	۰٫۱۵۶	۰٫۲۷۳	۰٫۳۵۵	۰٫۴۱۰	۰٫۴۸۰
		۵	۱	۰٫۳۳۲	۰٫۴۶۸	۰٫۵۹۱	۰٫۶۹۴	۰٫۸۷۸
			۲	۰٫۲۵۳	۰٫۳۹۰	۰٫۵۱۳	۰٫۶۱۶	۰٫۸۰۰
			۳	۰٫۱۳۶	۰٫۲۷۳	۰٫۳۹۴	۰٫۴۹۹	۰٫۶۸۳
۵	۷	۳	۱	۰٫۵۹۸	۰٫۶۸۸	۰٫۷۴۰	۰٫۷۶۹	۰٫۷۹۷
			۲	۰٫۳۵۰	۰٫۴۴۰	۰٫۴۹۲	۰٫۵۲۱	۰٫۵۴۹
			۳	۰٫۱۴۳	۰٫۲۳۳	۰٫۲۸۵	۰٫۳۱۴	۰٫۳۴۲
		۵	۱	۰٫۴۸۷	۰٫۶۳۰	۰٫۷۳۴	۰٫۸۱۱	۰٫۹۰۸
			۲	۰٫۳۴۶	۰٫۴۸۹	۰٫۵۹۶	۰٫۶۷۰	۰٫۷۶۷
			۳	۰٫۱۷۱	۰٫۳۱۳	۰٫۴۲۰	۰٫۴۹۴	۰٫۵۹۱
۷	۵	۳	۱	۰٫۴۱۷	۰٫۵۴۳	۰٫۶۴۶	۰٫۷۲۵	۰٫۸۶۰
			۲	۰٫۲۹۱	۰٫۴۱۶	۰٫۵۱۹	۰٫۵۹۹	۰٫۷۳۳
			۳	۰٫۱۴۳	۰٫۲۶۹	۰٫۳۷۱	۰٫۴۵۱	۰٫۵۸۶
		۵	۱	۰٫۱۸۷	۰٫۲۸۹	۰٫۳۹۶	۰٫۵۰۰	۰٫۷۴۹
			۲	۰٫۱۵۱	۰٫۲۵۳	۰٫۳۶۰	۰٫۴۶۳	۰٫۷۱۲
			۳	۰٫۰۸۷	۰٫۱۸۹	۰٫۲۹۵	۰٫۳۹۹	۰٫۶۴۸

[7] Arnold, B. C., Balakrishnan, N. and Nagaraja, H. N. (1998), *Records*, John Wiley and Sons, New York.

[8] Asadi, M. and Raqab, M. Z. (2010), The Mean Residual of Record Values at the Level of Pevious Records, *Metrika*, **72**, 51-64.

[9] Barlow, R. E. and Poschan, F. (1981), *Statistical Theory of Reliability and Life Testing Pobability Models*, To Begin With: Silver Springs, Maryland.

[10] Block, H. W., Borges, W. S. and Savits T. H. (1985), Age-dependent Minimal Repair, *Journal of Applied Pobability*, **22**, 370-385.

[11] Boland, P. J. and Poschan, F. (1983), The Reliability of k-out-of-n Systems, *The Annals of Pobability*, **11**, 760-764.

[12] rown, M. and Poschan, F. (1983), Imperfect Repair, *Journal of Applied Pobability*, **20**, 851-859.

[13] Chahkandi, M. and Ahmadi, J. (2013), Pediction Intervals for k-records in Terms of Current Records, *Journal of Statistical Theory and Applications*, **12**(1), 67-82.

[14] Chahkandi, M., Ahmadi, J. and Baratpour, S. (2014), Non-parametric Pediction Intervals for the Lifetime of Coherent Systems. *Statistical Papers*, **55**, 1019-1034.

[15] David, H. A. and Nagaraja, H. N. (2003), *Order Statistics. 3rd ed*. Hoboken, NJ: John Wiley and Sons.

[16] ing, W., Zhang, Y., and Zhao, P. (2013), Comparisons of k-out-of-n Systems with Heterogenous Components. *Statistics & Pobability Letters*, **83**, 493-502.

[17] Kamps, U. (1995), A Concept of Generalized Order Statistics, *Journal of Statistical Planning and Inference*, **48**, 1-23.

[18] Khaledi, B. E. (2005), Some New Results on Stochastic Orderings Between Generalized Order Statistics, *Journal of The Iranian Statistical Society,* **4**, 35-49.

[19] Khaledi, B., Shojaei, R. (2007), On Stochastic Orderings Between Residual Record Values, *Statistics and Pobability Letters*, **77**, 1467-1472.

[20] Kijima, M. (1989), Some Results for Repairable Systems with General Repair, *Journal of Applied Pobability*, **26**, 89-102.

[21] Kochar, S. C. (1990), Some Partial Ordering Results on Record Values, *Communications in Statistics-Theory and Methods*, **19**, 299-306.

[22] Kochar, S. C. (2012), Stochastic Comparisons of Order Statistics and Spacings: A Review, *ISRN Pobability and Statistics,* 47 pages. Article ID 839473.

[23] MirMostafaee, S. M. T. K., Naghizadeh, M. and Fernandez, A. J. (2016), Tolerance Limits for Minimal Repair Times of a Series System with Rayleigh Distributed Component Lifetimes, *Applied Mathematical Modelling*, **40**, 3153-3163.

[24] MirMostafaee, S. M. T. K., Amini, M. and Asgharzadeh, A. (2017), Bayesian Pediction of Minimal Repair Times of a Series System Based on Hybrid Censored Sample of Components' Lifetimes Under Rayleigh Distribution, *Communications in Statistics-Theory and Methods*, **46**, 1788-1806.

[25] Nakagawa, T. (2005), *Maintenance theory of reliability*, Springer-Verlag London.

[26] Nakagawa, T. and Kowada, M. (1983), Analysis of a System with Minimal Repair and its Application to Replacement Policy, *Journal of European Operation Research*, **12**, 176-182.

[27] Nagaraja, H. N. (1990), Some Reliability Poperties of Order Statistics, *Communications in Statistics-Theory and Methods*, **19**, 307-316.

[28] Raqab, M. Z. (2006), Nonparametric Pediction Intervals for the Future Rainfall Records. *Environmetrics*, **17**, 457-464.

[29] Raqab M. Z. and Amin, W. A. (1996), Some Ordering Results on Order Statistics and Record Values, *IAPQR Transactions*, **21**, 1-8.

[30] Rezapour, M. and Alamatsaz, M. H. (2014), Stochastic Comparison of Lifetimes of Two $(n-k+1)$-out-of-n Systems with Heterogeneous Dependent Components. *Journal of Multivariate Analysis*, **130**, 240-251.

[31] Risse, T. (1987), On the Evaluation of the Reliability of k-out-of-n Systems, *IEEE Transactions on Reliability*, **36**, 433-435.

[32] Samaniego, F. J. (1985), On Closure of the IFR Class Under Formation of Coherent Systems, *IEEE Transactions on Reliability Theory*, **34**, 69-72.

[33] Shaked, M. and Shanthikumar, J. G. (2007), *Stochastic Orders*, Springer, New York.

[34] Tadj, L., Ouali, M. S., Yacout, S. and Ait-Kadi, D. (2011), *Replacement Models with Minimal Repair*, Springer, New York.

[35] Takahasi, K. (1988). A Note on Hazard Rates of Order Statistics, *Communications in Statistics-Theory and Methods*, **17**, 4133-4136.

Some Poperties of Repairable k-out-of-n Systems

Majid Chahkandi

Department of Statistics, University of Birjand, Birjand, Iran.

Abstract: The performance of a system depends not only on its design and operation but also on the servicing and maintenance of the item during its operational lifetime. Thus, the repair and maintenance are important issues in the reliability. In this paper, a repairable k-out-of-n system is considered that starts operating at time 0. If the system fails, then it undergoes minimal repair and begins to operate again. The reliability function, hazard rate function, mean residual life function and some reliability properties of the system are obtained by using the connection between the concepts of minimal repair and record values. Some known stochastic orders are also used to compare the lifetimes and residual lifetimes of two repairable k-out-of-n systems. Finally, based on the given information about the lifetimes of k-out-of-n systems, some prediction intervals for the lifetime of the proposed repairable system are obtained.

Keywords: Stochastic orders, Minimal repair, Record values, k-out-of-n system.

Mathematics Subject Classification (2010): $62N05$, $62G30$.