Archive of SID

برآوردهای E-بیز و بیز سلسله‌مراتبی پارامتر تنش-مقاومت در توزیع رایلی تحت تابع زیان لاینکس

علی شادرخ، شهرام یعقوب زاده شهرستانی

گروه آمار، دانشگاه پیام نور

چکیده: در این مقاله، وقتی که X و Y متغیرهای تصادفی مستقل و دارای توزیع رایلی با پارامترهای متفاوت هستند، برآوردهای E-بیز و بیز سلسله‌مراتبی پارامتر تنش-مقاومت یک سیستم، تحت تابع زیان لاینکس به دست آورده می‌شود. سپس با استفاده از روش شبیه‌سازی مونت‌کارلو و دو مجموعه داده‌های واقعی، این برآوردگرهای جدید با هم و با برآورد بیزی پارامتر تنش-مقاومت مقایسه می‌شوند.

واژه‌های کلیدی: توزیع رایلی، برآورد E-بیز، برآورد بیز سلسله‌مراتبی، تابع زیان لاینکس، پارامتر تنش-مقاومت، شبیه‌سازی مونت‌کارلو.

۱ مقدمه

از دیرباز روش‌های مختلفی برای برآورد پارامترهای توزیع‌های آماری ارائه شده است. یکی از این روش‌ها، روش برآورد بیز است که در این روش، انتخاب معقول توزیع‌های پیشین روی فضای پارامتر، نقش مهمی در کاهش خطای برآوردگر بیزی دارد. گاهی اوقات وسیع بودن حوزه تغییرات پارامتر روی فضای پارامتر، باعث

°آدرس الکترونیک مسئول مقاله: علی شادرخ، shadrokh.ali@gmail.com

°کد موضوع‌بندی ریاضی (۲۰۱۰): 62E15، 62G05، 62F15.

www.SID.ir

Archive of SID

افزایش خطا و بزرگ شدن معیارهای مقایسه می‌شود. بنا بر این، تعریف توزیع پیشین مناسب روی فضای پارامتر و اعمال شرایطی خاص روی ابرپارامترهای توزیع پیشین، نقش مهمی در کاهش معیارهای مقایسه دارد. برآوردهای E-بیز و بیز سلسله‌مراتبی از این نوع برآوردگرها هستند. توزیع پیشین بیز سلسله‌مراتبی ابتدا توسط لیندلی و اسمیت (۱۹۷۲) معرفی شد و سپس توسط هان (۱۹۷۷) مورد بررسی بیشتری قرار گرفت و روش‌های برآورد E-بیز و بیز سلسله‌مراتبی معرفی شد. اخیرا از روش‌های E-بیز و بیز سلسله‌مراتبی برای برآورد پارامتر توزیع نمایی و برای برآورد پارامتر نسبت توزیع دوجمله‌ای توسط هان (۲۰۱۱، ۲۰۰۹)، برآورد پارامتر و تابع قابلیت اعتماد توزیع بور نوع ۱۲ بر اساس نمونه‌های سانسور فزآینده نوع دوم توسط جاهین و اکاشا (۲۰۱۱) و برآورد پارامتر توزیع پاسکال توسط وانگ و همکاران (۲۰۱۲) استفاده شده است. همچنین کاربرد روش بیز سلسله‌مراتبی در تحلیل داده‌ها توسط چند نویسنده مانند میچیز و ویکل (۲۰۰۹)، کرسی و تینگلی (۲۰۱۰)، آندو و زلنر (۲۰۱۰)، اوسی و دوکر (۲۰۱۱) و ریچارد (۲۰۱۱) نشان داده شد.

براورد پارامتر قابلیت اعتماد یا پارامتر تنش-مقاومت یعنی $R = P(X > Y)$ که کارایی یک سیستم را نشان می‌دهد، یکی از مسائل مهم استنباط آماری است که در علوم مختلفی مانند نظریه طول عمر، قابلیت اطمینان مکانیکی یک سیستم و در مفاهیم مهندسی مانند سازه‌ها کاربرد دارد. در قابلیت اعتماد، پارامتر تنش-مقاومت توصیف‌کننده طول عمر یک سیستم است، وقتی که سیستم مقاومت تصادفی X را در برابر تنش تصادفی Y بکار می‌برد. همچنین سیستم دچار اختلال شده و از کار می‌افتد اگر و فقط اگر در هر زمان تنش بتواند بر مقاومت سیستم غلبه کند. نویسندگان بسیاری به برآورد پارامتر قابلیت اعتماد (R) وقتی که X و Y متغیرهای تصادفی مستقل و دارای یک نوع توزیع هستند، پرداخته‌اند. برآورد $P(X > Y)$ در توزیع نمایی دومتغیره توسط آواد و همکاران (۱۹۸۱)، در توزیع نرمال چند متغیره توسط گوپتا و گوپتا (۱۹۹۰)، در توزیع بور نوع ۱۲ توسط رکب و کاندو (۲۰۰۵)، در توزیع نمایی تعمیم‌یافته توسط کاندو و گوپتا (۲۰۰۵)، در توزیع نمایی سه پارامتری توسط رکب و همکاران (۲۰۰۸)، در توزیع نمایی تعمیم‌یافته بر مبنای نمونه‌های رکوردی توسط باکلیزی (۲۰۰۸)، در توزیع وایبل بر اساس نمونه‌های سانسور شده فزآینده نوع دوم توسط اصغرزاده و همکاران (۲۰۱۱)، در توزیع نمایی بر اساس نمونه‌های سانسور شده فزآینده نوع دوم توسط ساراکگلو و همکاران (۲۰۱۲)، در توزیع بور نوع ۱۲ بر اساس نمونه‌های سانسور شده فزآینده نوع دوم توسط لیو و تسای (۲۰۱۲)، در توزیع لیندلی توسط ال-موتایری و همکاران (۲۰۱۳) و در توزیع

www.SID.ir

Archive of SID

لیندلی توانی توسط گیتانی و همکاران (۲۰۱۵)، مورد بررسی قرار گرفت.

توزیع رایلی که توسط رایلی (۱۸۸۰) معرفی شد به دلیل آن که در حوزه‌های مختلف علم و تکنولوژی مانند مدل‌بندی ارتفاع امواج دریا در اقیانوس شناسی، مهندسی ارتباطات، توزیع طول عمر قطعات صنعتی، مطالعات بالینی در باره بیماران سرطانی، نظریه قابلیت اطمینان و آنالیز بقا کاربرد دارد، برآورد پارامتر قابلیت اعتماد آن یعنی R به روش‌های مختلف توصیه می‌شود. در این مقاله، برآوردهای E-بیز و بیز سلسله مراتبی R در توزیع رایلی با پارامتر λ، ($R(\lambda)$) و توابع چگالی احتمال و تابع توزیع تجمعی آن به ترتیب به صورت

$$f(x;\lambda) = 2\lambda x e^{-\lambda x^2}, \quad x>0, \lambda>0, \qquad (1)$$

$$F(x;\lambda) = 1-e^{-\lambda x^2}, \quad x>0, \lambda>0, \qquad (2)$$

به دست آورده می‌شود. در این مقاله در بخش دوم برآوردهای E-بیز و بیز سلسله‌مراتبی $R=P(X>Y)$ بر اساس حجم‌های نمونه‌ای یکسان از X و Y که متغیرهای تصادفی مستقل و به ترتیب دارای توزیع‌های $Ra(\lambda_1)$ و $Ra(\lambda_2)$ هستند، تحت تابع زیان لاینکس (خطی-نمایی) به دست آورده می‌شود. همچنین در این بخش فرض می‌شود λ_1 و λ_2 که پارامترهای مستقل از هم و دارای توزیع‌های پیشین به ترتیب

$$\pi(\lambda_1|a_1,b_1) = \frac{b_1^{a_1}}{\Gamma(a_1)}\lambda_1^{a_1-1}e^{-b_1\lambda_1}, \quad \lambda_1>0; a_1>0, b_1>0, \qquad (3)$$

$$\pi(\lambda_2|a_2,b_2) = \frac{b_2^{a_2}}{\Gamma(a_2)}\lambda_2^{a_2-1}e^{-b_2\lambda_2}, \quad \lambda_2>0; a_2>0, b_2>0, \qquad (4)$$

هستند. با توجه به هان (۱۹۷۷) در رابطه (۳)، ابرپارامترهای a_1 و b_1 طوری در نظر گرفته می‌شوند که $\pi_1(\lambda_1|a_1,b_1)$ نسبت به λ_1 کاهشی باشد. پس با توجه به رابطه

$$\frac{d\pi_1(\lambda_1|a_1,b_1)}{d\lambda_1} = \frac{b_1^{a_1}\lambda_1^{a_1-2}e^{b_1\lambda_1}}{\Gamma(a_1)}((a_1-1)-b_1\lambda_1)$$

باید $0 < a_1 \leq 1$ و $b_1 > 0$ باشد. برگر (۱۹۸۵) نشان داد که بزرگ بودن b_1 باعث کاهش استواری برآورد بیزی λ_1 می‌شود. بنا بر این ابر پارامتر b_1 باید از بالا کراندار شده و به صورت $0 < b_1 < c_1$ که c_1 عددی ثابت است، در نظر گرفته شود. هان (۲۰۱۱) نشان داد که مناسب‌ترین توزیع b_1 توزیع یکنواخت است. بنا بر این در این مقاله توزیع b_1 یعنی $\pi(b_1)$ توزیع یکنواخت پیوسته در بازه $(0,c_1)$ در نظر گرفته می‌شود. همچنین با توجه به شرط $0 < a_1 \leq 1$، با در نظر گرفتن $a_1 = 1$ رابطه (۳) به صورت

$$\pi(\lambda_1|b_1) = b_1 e^{-b_1\lambda_1}, \quad b_1>0, \lambda_1>0. \qquad (5)$$

www.SID.ir

Archive of SID

تبدیل می‌شود. با استدلالی مشابه استدلال فوق درباره $a_۲$ و $b_۲$ در رابطه (۴)، توزیع $b_۲$ یعنی $\pi(b_۲)$ توزیع یکنواخت پیوسته در بازه $(\circ, c_۲)$ که $c_۲$ عددی ثابت است در نظر گرفته می‌شود. همچنین با فرض $a_۲ = ۱$ رابطه (۴) به صورت

$$\pi(\lambda_۲|b_۲) \quad = \quad b_۲ e^{-b_۲\lambda_۲}, \quad b_۲ > \circ, \lambda_۲ > \circ. \qquad (۶)$$

تبدیل می‌شود.

تعریف ۱. (هان، ۱۹۷۷) اگر $\hat{R}_B(b_۱, b_۲)$ برآورد بیز R باشد، آنگاه برآورد E-بیز R که با نماد $\hat{R}_{EB}$ نشان داده می‌شود و در حقیقت امید ریاضی برآورد بیز است به صورت

$$\begin{aligned}\hat{R}_{EB} &= E_{\pi(b_۱,b_۲)}(\hat{R}_B(b_۱, b_۲)) \\ &= \int_{\Lambda_۱}\int_{\Lambda_۲} \hat{R}_B(b_۱, b_۲)\pi(b_۱)\pi(b_۲)db_۱ db_۲, \quad b_۱ \in \Lambda_۱, b_۲ \in \Lambda_۲,\end{aligned}$$

به دست آورده می‌شود.

تعریف ۲. (هان، ۱۹۷۷) اگر λ یک ابرپارامتر در پارامتر θ و توزیع پیشین θ، $\pi(\theta|\lambda)$ و توزیع پیشین ابرپارامتر λ، $\pi^{'}(\lambda)$ باشد، آنگاه توزیع پیشین سلسله‌مراتبی θ به صورت زیر به دست آورده می‌شود.

$$\pi^{''}(\theta) \quad = \quad \int_{\Lambda} \pi(\theta|\lambda)\pi^{'}(\lambda)d\lambda, \quad \lambda \in \Lambda.$$

در بخش ۳ به کمک شبیه‌سازی مونت‌کارلو و دو مجموعه داده‌های واقعی، برآوردهای بیز، E-بیز و بیز سلسله مراتبی R با هم مقایسه می‌شوند. بخش آخر هم به نتایج مقاله اختصاص داده شده است.

۲ برآوردهای E-بیز و بیز سلسله‌مراتبی R تحت تابع زیان لاینکس

فرض کنید $X_۱, \cdots, X_n$ یک نمونه تصادفی از توزیع $Ra(\lambda_۱)$ و $Y_۱, \cdots, Y_n$ یک نمونه تصادفی از توزیع $Ra(\lambda_۲)$ و مستقل از نمونه تصادفی اول باشند. با توجه به روابط (۳) و (۴) و تابع درستنمایی

$$\begin{aligned}L(\lambda_۱, \lambda_۲|\mathbf{Z}) &\propto (\lambda_۱\lambda_۲)^n(\prod_{i=۱}^{n} x_i)(\prod_{i=۱}^{n} y_i) \\ &\times \quad e^{-[\lambda_۱(b_۱+\sum_{i=۱}^{n} x_i^۲)+\lambda_۲(b_۲+\sum_{i=۱}^{n} y_i^۲)]} \qquad (۷)\end{aligned}$$

www.SID.ir

Archive of SID

که در آن $\mathbf{Z}=(X_1,\cdots,X_n,Y_1,\cdots,Y_n)$، توزیع پسین توام λ_1 و λ_2 به شرط داده‌ها به صورت

$$\pi^*(\lambda_1,\lambda_2|\mathbf{Z}) = \frac{(b_1+\sum_{i=1}^n x_i^2)^{n+1}(b_2+\sum_{i=1}^n y_i^2)^{n+1}}{(\Gamma(n+1))^2}(\lambda_1\lambda_2)^n \times e^{-[\lambda_1(b_1+\sum_{i=1}^n x_i^2)+\lambda_2(b_2+\sum_{i=1}^n y_i^2)]}, \tag{8}$$

است. با توجه به رابطه (۸)، برآورد بیز $R=P(X>Y)=\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}$ که با نماد $\hat{R}_{BL}(b_1,b_2)$ نشان داده می‌شود، تحت تابع زیان لاینکس به فرم

$$L(\hat{\theta},\theta)=e^{k(\frac{\hat{\theta}}{\theta}-1)}-k(\frac{\hat{\theta}}{\theta}-1)-1, \quad k\neq 0$$

از رابطه

$$\begin{aligned}\hat{R}_{BL}(b_1,b_2) &= -\frac{1}{k}\log[E(e^{-kR}|\mathbf{Z})] \\ &= -\frac{1}{k}\log\{\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-kR}\pi^*(\lambda_1,\lambda_2|\mathbf{Z})d\lambda_1 d\lambda_2\} \\ &= -\frac{1}{k}\log\{C\sum_{m=0}^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{(-k)^m\lambda_1^n\lambda_2^{n+m}}{(\lambda_1+\lambda_2)^m}e^{-\lambda_1 C_1-\lambda_2 C_2}d\lambda_1 d\lambda_2\}\end{aligned}$$

به دست آورده می‌شود که در آن

$$C=\frac{(b_1+\sum_{i=1}^n x_i^2)^{n+1}(b_2+\sum_{i=1}^n y_i^2)^{n+1}}{(\Gamma(n+1))^2}, \quad C_1=(b_1+\sum_{i=1}^n x_i^2)$$
$$C_2=(b_2+\sum_{i=1}^n y_i^2).$$

از طرفی به کمک تغییر متغیر $u=\lambda_1+\lambda_2$، رابطه

$$I_1=\int_0^\infty \frac{\lambda_1^n}{(\lambda_1+\lambda_2)^m}e^{-C_1\lambda_1}d\lambda_1=\sum_{j=0}^n(-\lambda_2)^j\binom{n}{j}e^{C_1\lambda_2}\int_{\lambda_2}^\infty u^{n-j-m}e^{-C_1 u}du$$

به دست می‌آید، که با توجه به رابطه $\frac{a^p}{\Gamma(p)}\int_x^\infty t^{p-1}e^{-at}dt=e^{-ax}\sum_{j=0}^{p-1}\frac{(ax)^j}{j!}$ (بتمن، ۱۹۵۳)، I_1 به صورت

$$I_1=n!\sum_{j=0}^n\sum_{r=0}^{n-j-m}\frac{(-1)^j\lambda_2^{j+r}\Gamma(n+1-j-m)}{j!r!(n-j)!C_1^{n+1-j-m-r}},$$

www.SID.ir

Archive of SID

به دست آورده می‌شود. با توجه به I_1 داریم:

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^\infty I_1 \lambda_2^{n+m} e^{-\lambda_2 C_2} d\lambda_2 \\
&= n! \sum_{j=0}^{n} \sum_{r=0}^{n-j-m} \frac{(-1)^j \Gamma(n+1-j-m)\Gamma(n+m+j+r+1)}{j! r! (n-j) C_1^{n+1-j-m-r} C_2^{n+m+j+r+1}}
\end{aligned}
$$

بنا بر این به کمک I داریم:

$$\hat{R}_{BL}(b_1, b_2) = -\frac{1}{k} \log\left(\frac{T(b_1, b_2)}{n!}\right) \qquad (9)$$

به طوری که

$$T(b_1, b_2) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{n} \sum_{r=0}^{n-j-m} \frac{(-1)^{j+m} k^m \Gamma(n+1-j-m)\Gamma(n+m+j+r+1)}{j! r! (n-j) C_1^{j-m-r+1} C_2^{m+j+r+1}}.$$

بنا بر این با توجه به تعریف ۱ و به کمک رابطه (۹)، برآورد E-بیز R، تحت تابع زیان لاینکس به صورت

$$\hat{R}_{EBL} = -\frac{1}{k} \log\left(\frac{T(c_1, c_2)}{n!}\right) \qquad (10)$$

به دست آورده می‌شود، که در آن

$$T(c_1, c_2) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{n} \sum_{r=0}^{n-j-m} \frac{(-1)^{j+m} k^m \Gamma(n+1-j-m)\Gamma(n+m+j+r+1)}{j! r! (n-j) L(c_1, m+r-j) L^*(c_2, m+r+j)},$$

به طوری که

$$
\begin{aligned}
L(c_1, v) &= \frac{v}{(c_1 + \sum_{i=1}^{n} x_i^2)^v - (\sum_{i=1}^{n} x_i^2)^v} \\
L^*(c_2, v) &= \frac{v}{(\sum_{i=1}^{n} y_i^2)^{-v} - (c_2 + \sum_{i=1}^{n} y_i^2)^{-v}}
\end{aligned}
$$

هستند. با توجه به روابط (۵) و (۶) و تعریف ۲، توزیع‌های پیشین سلسله‌مراتبی پارامترهای λ_1 و λ_2 به ترتیب عبارتند از:

$$
\begin{aligned}
\pi(\lambda_1) &= \int_0^{c_1} \pi(\lambda_1|b_1)\pi(b_1) db_1 = \frac{1 - c_1\lambda_1 e^{-c_1\lambda_1} - e^{-c_1\lambda_1}}{c_1 \lambda_1^2}, && (11) \\
\pi(\lambda_2) &= \int_0^{c_2} \pi(\lambda_2|b_2)\pi(b_2) db_2 = \frac{1 - c_2\lambda_2 e^{-c_2\lambda_2} - e^{-c_2\lambda_2}}{c_2 \lambda_2^2}, && (12)
\end{aligned}
$$

www.SID.ir

Archive of SID

بنا بر این با توجه به روابط (۱۱) و (۱۲)، توزیع پسین سلسله‌مراتبی λ_1 و λ_2 به صورت

$$\pi^{**}(\lambda_1,\lambda_2|\mathbf{Z}) = \frac{(\lambda_1\lambda_2)^n e^{-(\lambda_1\sum_{i=1}^n x_i^2+\lambda_2\sum_{i=1}^n y_i^2)}S(\lambda_1,\lambda_2)}{\int_0^\infty\int_0^\infty(\lambda_1\lambda_2)^n e^{-(\lambda_1\sum_{i=1}^n x_i^2+\lambda_2\sum_{i=1}^n y_i^2)}S(\lambda_1,\lambda_2)d\lambda_1 d\lambda_2} = K^n(c_1)K^n(c_2)(\lambda_1\lambda_2)^n e^{-(\lambda_1\sum_{i=1}^n x_i^2+\lambda_2\sum_{i=1}^n y_i^2)}S(\lambda_1,\lambda_2) \quad (۱۳)$$

به دست آورده می‌شود، که در آن

$$S(\lambda_1,\lambda_2) = \frac{(1-c_1\lambda_1 e^{-c_1\lambda_1}-e^{-c_1\lambda_1})(1-c_2\lambda_2 e^{-c_2\lambda_2}-e^{-c_2\lambda_2})}{c_1c_2\lambda_1^2\lambda_2^2}$$

و به ازای $i=1,2$

$$K^v(c_i) = \frac{\Gamma(v-1)}{(\sum_{i=1}^n I_{c_i})^{v-1}} - \frac{\Gamma(v-1)}{(c_i+\sum_{i=1}^n I_{c_i})^{v-1}} - \frac{c_i\Gamma(v)}{(c_i+\sum_{i=1}^n I_{c_i})^{v}} \quad (۱۴)$$

به طوری که

$$I_{c_i} = \begin{cases} x_i^2 & i=1 \\ y_i^2 & i=2 \end{cases}$$

همچنین با توجه به تعریف ۲ و رابطه (۱۳)، برآورد بیز سلسله مراتبی R تحت تابع زیان لاینکس از رابطه به دست می‌آید.

$$\hat{R}_{HBL} = -\frac{1}{k}\log\left(\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-kR}\pi^{**}(\lambda_1,\lambda_2|\mathbf{Z})d\lambda_1 d\lambda_2\right) = -\frac{1}{k}\log\left(\sum_{m=0}^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty\frac{(-k)^m\lambda_2^m}{(\lambda_1+\lambda_2)^m}\pi^{**}(\lambda_1,\lambda_2|\mathbf{Z})d\lambda_1 d\lambda_2\right)$$

با توجه به رابطه

$$\begin{aligned} M(c_1,c_2,k,m) &= \int_0^\infty\int_0^\infty\frac{(-k)^m\lambda_2^m}{(\lambda_1+\lambda_2)^m}\pi^{**}(\lambda_1,\lambda_2|\mathbf{Z})d\lambda_1 d\lambda_2 = \frac{K^n(c_1)K^n(c_2)}{c_2} \\ &\times \left\{\frac{(n-2)!}{c_1}\sum_{j=0}^{n-2}\sum_{r=0}^{n-m-2-j}\frac{(-1)^jK^{n+m+j+r}(c_2)}{j!r!(n-m-2-j)}V(j,r)\right. \\ &- \left.(n-1)!\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{r=0}^{n-m-1-j}\frac{(-1)^jC_2^{j+r+1-n}}{j!r!(n-m-1-j)}K^{n+m+j+r}(c_2)\right\} \end{aligned}$$

که در آن $V(j,r) = (\sum_{i=1}^n x_i^2)^{j+r+2-n} - C_3^{j+r+2-n}$، داریم:

$$\hat{R}_{HBL} = -\frac{1}{k}\log\left(\sum_{m=0}^\infty M(c_1,c_2,k,m)\right). \quad (۱۵)$$

www.SID.ir

Archive of SID

۳ تحلیل داده‌ها

در این بخش با استفاده شبیه‌سازی مونت‌کارلو و دو مجموعه داده واقعی، برآوردهای بیز، E-بیز و بیز سلسله‌مراتبی R، با هم مقایسه می‌شوند.

۱.۳ مطالعه شبیه‌سازی

در این زیربخش در گام اول از توزیع یکنواخت استاندارد، نمونه‌های تصادفی با حجم‌های متفاوت تولید می‌شود. در گام دوم به کمک رابطه $X = [-\frac{1}{\lambda}\log(1-U)]^{\frac{1}{2}}$ که U توزیع یکنواخت استاندارد دارد، از توزیع‌های $Ra(\lambda_1)$ و $Ra(\lambda_2)$ به ازای $(\lambda_1 = 1.5, \lambda_2 = 2)$، $(\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 4)$، $(\lambda_1 = 3.5, \lambda_2 = 1.5)$ و $(\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 0.5)$ نمونه‌های تصادفی با حجم‌های متفاوت تولید می‌کنیم. در گام سوم به کمک نمونه‌های تصادفی تولید شده در گام دوم و به ازای $c_1 = 3$، $c_2 = 5$ و $k = -1, 1.5, 2, 3$، برآوردهای بیز، E-بیز و بیز سلسله‌مراتبی R به دست آورده می‌شود. گام‌های اول تا سوم ۱۰۰۰ بار تکرار شده و میانگین برآوردگرها و ریسک مونت‌کارلویی آن‌ها به دست آورده می‌شود. نتایج شبیه‌سازی که در جدول ۱ آورده شده، نشان دهنده بهتر بودن برآورد بیز سلسله‌مراتبی از برآوردهای بیز و E-بیز است.

۲.۳ داده‌های واقعی

در این زیر بخش از دو مجموعه داده‌های واقعی برای مقایسه روش‌های برآورد R استفاده می‌شود. اولین مجموعه داده‌ها که از هینکلی (۱۹۷۷) گرفته شده، شامل ۳۰ مقدار بارش باران (بر حسب اینچ) در ماه مارس در شهر مینیاپولیس سنت‌پل است. دومین مجموعه داده‌ها که از سیلویا (۲۰۰۷) گرفته شده، مربوط به طول عمر ۳۰ دستگاه از یک نوع مشخص است. هر دو مجموعه داده‌ها در جدول ۲ آورده شده است. قبل از تحلیل داده‌ها ابتدا با استفاده از آماره آزمون نیکویی برازش کولموگوروف-اسمیرنوف، نشان داده می‌شود که توزیع رایلی به این مجموعه داده‌ها برازش می‌شود. با توجه به جدول ۳ که شامل برآورد ماکسیمم درستنمایی پارمتر توزیع رایلی و مقدار عددی آماره آزمون کولموگوروف-اسمیرنوف با مقدار احتمال مربوطه است، نتیجه گرفته می‌شود که توزیع رایلی به این مجموعه داده‌ها برازش می‌شود.

با توجه به رابطه (۸)، توزیع‌های پسین λ_1 و λ_2 به ترتیب توزیع‌های $\Gamma(n+1, b_1 + \sum_{i=1}^{n} x_i^2)$ و

www.SID.ir

Archive of SID

جدول ۱: میانگین برآوردهای مختلف R و ر(یسک مونت‌کارلویی)آن‌ها برای داده‌های شبیه‌سازی شده

$(k, \lambda_1, \lambda_2)$	n	$\hat{R}_{BL}$	$\hat{R}_{EBL}$	$\hat{R}_{HBL}$
$(-۱, ۲, ۲)$	۱۰	۰٫۵۳۷۰۴(۰٫۱۹۲۷)	۰٫۵۱۰۲۲(۰٫۰۹۸۶)	۰٫۴۸۰۷۰(۰٫۰۱۶۶)
	۲۰	۰٫۵۵۲۰۴(۰٫۱۸۷۶)	۰٫۴۸۰۱۷(۰٫۰۸۷۷)	۰٫۴۵۸۴۲(۰٫۰۱۰۸)
	۳۰	۰٫۵۵۸۱۵(۰٫۱۷۴)	۰٫۴۶۵۷۲(۰٫۰۷۹۸)	۰٫۴۴۹۱۴(۰٫۰۰۹۸)
	۴۰	۰٫۵۶۱۲۲(۰٫۱۵۲۱)	۰٫۴۵۷۸۸(۰٫۰۶۵۵)	۰٫۴۴۴۴۳(۰٫۰۰۸۶)
	۵۰	۰٫۵۶۳۱۶(۰٫۱۳۷۶)	۰٫۴۵۲۷۱(۰٫۰۴۹۹)	۰٫۴۴۱۴۵(۰٫۰۰۷۵)
$(۲, ۲, ۴)$	۱۰	۰٫۵۱۴۳۱(۰٫۱۷۶۵)	۰٫۴۸۷۰۸(۰٫۰۶۱۲)	۰٫۴۳۸۸۰(۰٫۰۱۰۷)
	۲۰	۰٫۵۶۹۰۷(۰٫۱۶۲۲)	۰٫۴۳۶۸۵(۰٫۰۵۲۳)	۰٫۳۹۶۶۱(۰٫۰۰۹۸)
	۳۰	۰٫۵۹۴۵۹(۰٫۱۵۳۲)	۰٫۴۱۱۶۶(۰٫۰۴۲۹)	۰٫۳۷۸۷۲(۰٫۰۰۸۶)
	۴۰	۰٫۶۱۰۰۳(۰٫۱۳۲۷)	۰٫۳۹۵۸۰(۰٫۰۳۸۷)	۰٫۳۶۸۳۹(۰٫۰۰۷۲)
	۵۰	۰٫۶۲۰۰۷(۰٫۱۲۱۵)	۰٫۳۸۵۲۳(۰٫۰۲۱۵)	۰٫۳۶۱۸۶(۰٫۰۰۵۸)
$(۳, ۳٫۵, ۱٫۵)$	۱۰	۰٫۴۴۵۱۰(۰٫۱۹۶۵)	۰٫۶۶۴۴۶(۰٫۰۲۸۹)	۰٫۶۷۶۴۵(۰٫۰۰۵۵)
	۲۰	۰٫۳۸۵۵۵(۰٫۱۸۷۷)	۰٫۶۷۷۳۲(۰٫۰۱۹۷)	۰٫۶۸۶۵۷(۰٫۰۰۳۹)
	۳۰	۰٫۳۶۰۷۱(۰٫۱۶۹۸)	۰٫۶۸۳۳۳(۰٫۰۱۲۶)	۰٫۶۹۰۶۰(۰٫۰۰۲۷)
	۴۰	۰٫۳۴۷۴۲(۰٫۱۵۲۰)	۰٫۶۸۶۷۳(۰٫۰۰۴۹)	۰٫۶۹۲۷۱(۰٫۰۰۱۱)
	۵۰	۰٫۳۳۸۸۴(۰٫۱۳۷۶)	۰٫۶۸۸۹۹(۰٫۰۰۳۱)	۰٫۶۹۴۰۵(۰٫۰۰۰۶)
$(۱٫۵, ۲, ۰٫۵)$	۱۰	۰٫۲۵۹۲۴(۰٫۱۴۶۶)	۰٫۷۵۵۱۷(۰٫۰۶۵۴)	۰٫۷۷۴۰۲(۰٫۰۰۷۶)
	۲۰	۰٫۲۲۹۹۰(۰٫۱۲۸۷)	۰٫۷۷۴۹۵(۰٫۰۵۴۳)	۰٫۷۸۶۴۶(۰٫۰۰۴۵)
	۳۰	۰٫۲۱۹۸۰(۰٫۱۱۸۸)	۰٫۷۸۲۸۰(۰٫۰۴۴۵)	۰٫۷۹۰۹۴(۰٫۰۰۲۶)
	۴۰	۰٫۲۱۴۹۷(۰٫۱۰۹۹)	۰٫۷۸۶۷۶(۰٫۰۳۲۱)	۰٫۷۹۳۱۱(۰٫۰۰۰۷)
	۵۰	۰٫۲۱۱۹۹(۰٫۰۹۸۸)	۰٫۷۸۹۲۸(۰٫۰۲۲۲)	۰٫۷۹۴۴۷(۰٫۰۰۰۴)

جدول ۲: مجموعه داده‌های مربوط به بارش باران و طول عمر ۳۰ دستگاه

مجموعه داده‌اول	۰٫۷۷	۱٫۷۴	۰٫۸۱	۱٫۲۰	۱٫۹۵	۱٫۲۰	۰٫۴۷	۱٫۴۳
	۳٫۲۷	۲٫۲۰	۳	۳٫۰۹	۱٫۵۱	۲٫۱۰	۰٫۵۲	۱٫۶۲
	۱٫۳۱	۰٫۳۲	۰٫۵۹	۰٫۸۱	۲٫۸۱	۱٫۸۷	۱٫۱۸	۱٫۳۵
	۴٫۵۷	۲٫۴۸	۰٫۹۶	۱٫۸۹	۰٫۹	۲٫۰۵		
مجموعه داده‌دوم	۰٫۰۰۹۴	۰٫۰۵	۰٫۵۰۶۷	۴٫۶۳۰۷	۵٫۱۷۴۱	۵٫۸۸۰۸	۶٫۳۳۴۸	۷٫۱۶۴۵
	۷٫۲۳۱۶	۸٫۲۶۰۴	۹٫۲۶۶۲	۹٫۳۸۱۲	۶۸٫۶۴	۹٫۵۲۲۳	۹٫۸۷۸۳	۹٫۹۳۴۶
	۱۰٫۰۱۹۲	۱۰٫۴۰۷۷	۱۰۴۷۹۱	۱۲۸٫۰۴	۱۱٫۰۷۶	۱۱٫۳۲۵	۱۱٫۵۲۸۴	۱۱٫۹۲۲۶
	۱۲٫۰۲۹۴	۱۲٫۰۷۴	۱۲٫۱۸۳۵	۱۲٫۳۵۴۹	۱۲٫۵۳۸۱	۱۲٫۸۰۴۹	۱۳٫۴۶۱۵	۱۳٫۸۵۳

مقاله پذیرفته شده

www.SID.ir

Archive of SID

جدول ۳: برآورد ماکسیمم درستنمایی پارامتر توزیع رایلی و آماره آزمون کولموگوروف-اسمیرنوف به همراه مقدار احتمال مربوطه.

مجموعه داده	برآورد پارامتر توزیع رایلی	آماره آزمون کولموگوروف-اسمیرنوف	مقدار احتمال
اول	۰/۲۶۵۰۰۷۱	۰/۱۰۲۵	۰/۸۷۲۳
دوم	۰/۰۱۰۳۹۴۵۲	۰/۱۱۷۲	۰/۶۶۷۳

$\Gamma(n+1, b_2+\sum_{j=1}^{n} y_j^2)$ می‌شود، که در نتیجه توزیع پسین R به صورت

$$f_R(r) = \frac{C\Gamma(2n+2)r^n(1-r)^n}{[C_1(1-r)+C_2 r]^{2n+2}}, \quad 0 < r < 1$$

به دست آورده می‌شود. به کمک این مجموعه داده‌ها، برآوردهای بیز، E-بیز، بیز سلسله مراتبی R، $\log(f_R(r))$ به ازای مقادیر مختلف برآورد R، اطلاع آکائیک و اطلاع بیزی در جدول ۴ داده شده است. با توجه به این جدول، نتیجه گرفته می‌شود، برآورد بیز سلسله‌مراتبی نسبت به برآوردهای بیز و E-بیز بهتر است.

جدول ۴: مقادیر برآوردهای R، $\log(f_R(r))$، AIC و BIC.

روش برآورد	R	$\log(f_R(r))$	AIC	BIC
بیزی	۰/۵۴۶۷۸	$-$۲۱۵/۸۷	۴۳۳/۷۴	۴۳۵/۱۴
E-بیز ی	۰/۴۵۹۸۷	$-$۲۰۲/۵۴	۴۰۷/۰۸	۴۰۸/۴۸
بیز سلسله‌مراتبی	۰/۴۰۸۷۹	$-$۱۹۰/۸۷	۳۸۳/۷۴	۳۸۵/۱۴

بحث و نتیجه‌گیری

در این مقاله برآوردهای E-بیز و بیز سلسله‌مراتبی $R = P(X > Y)$ وقتی که X و Y متغیرهای تصادفی مستقل و دارای توزیع رایلی با پارامترهای متفاوت هستند، بر اساس تابع زیان لاینکس به دست آورده شد. سپس به کمک روش شبیه‌سازی مونت‌کارلو و دو مجموعه داده‌های واقعی، این برآورردها با هم و با برآورد بیز R مقایسه شدند که نتایج، بیان کننده بهتر بودن برآورد بیز سلسله مراتبی تحت تابع زیان لاینکس نسبت به سایر روش‌های برآورد است.

www.SID.ir

Archive of SID

تقدیر و تشکر

نویسندگان مقاله از سر دبیر، داوران و ویراستار محترم مجله در ارزیابی این مقاله قدردانی و تشکر می‌کنند.

مراجع

Awad, A. M., Azzam, M. M. and Hamdan, M. A. (1981), Some Inference Results on P(Y <X) in the Bivariate Exponential Model, *Communications in Statistics-Theory and Methods*, **10**, 2515-2525.

Ando, T. and Zellner, A. (2010), Hierarchical Bayesian Analysis of the Seemingly Unrelated Regression and Simultaneous Equations Models Using a Combination of Direct Monte Carlo and Importance Sampling Techniques, *Bayesian Analysis*, **5**, 65-96.

Asgharzadeh, A., Valiollahi, R. and Raqab, M. Z. (2011), Stress-strength Reliability of Weibull Distribution Based on Progressively Censored Samples, *SORT:Statistics and Operations Research Transactions*, **35**, 103-124.

Al-Mutairi, D. K., Ghitany, M. E. and Kundu, D. (2013), Inferences on Stress-strength Reliability from Lindley Distribution, *Communication Statistics-Theory and Methods*, **42**,1443-1463.

Baklizi, A. (2008), Likelihood and Bayesian Estimation of $Pr(X < Y)$ using Lower Record Values from the Generalized Exponential Distribution, *Computational Statistics and Data Analysis*, **52**, 3468-3473.

Berger, J. O. (1985), *Statistical Decision Theory and Bayesian Analysis*, Second ed., Springer-Verlag, New York.

Bateman, H. (1953), *Higer Transcendental Functions*, Vol. II. Hograw-Hill, New York.

www.SID.ir

Archive of SID

Cressie, N. and Tingley, M. P. (2010), Comment: Hierarchical Statistical Modeling for Paleoclimate Reconstruction, *Journal of the American Statistical Association*, **105**, 895-900.

Gupta, R. D. and Gupta, R. C. (1990), Estimation of $P(a_0X > b_0Y)$ in the Multivarite Normal Case, *Statistics*, **1**, 91-97.

Ghitany, M. E., Al-Mutairi, D. K. and Aboukhamseen, S. M. (2015), Estimation of the Reliability of a Stress-strength System from Power Lindley Distributions, *Communication Statistics Simulation and Computation*, **44**, 118-136.

Hinkley, D. (1977), On Quick Choice of Power Transformations, *Applied Statistics*, **26**, 67-69.

Han, M. (1997), The Structure of Hierarchical Prior Distribution and its Applications, *Chinese Operations Research and Management Science*, **6** (3), 31-40.

Han, M. (2009), E-Bayesian Estimation and Hierarchical Bayesian Estimation of Failure Rate, *Applied Mathematical Modelling*, **33**, 1915-1922.

Han, M. (2011), E-Bayesian Estimation of the Reliability Derived from Binomial Distribution, *Applied Mathematical Modelling*, **35**, 2419-2424.

Jaheen, Z. F. and Okasha, H. M. (2011), E-Bayesian Estimation for the Burr type XII Model Based on type-2 Censoring, *Applied Mathematical Modelling*, **35**, 4730-4737.

Kundu, D. and Gupta, R. D. (2005), Estimation of $P(Y < X)$ for the Generalized Exponential Distribution, *Metrika*, **61**, 291-308.

Lindley, D. V. and Smith, A. F. (1972), Bayes Estimation for the Linear Model, *Journal of the Royal Statistical Society-Series B*, **34**, 1-41.

www.SID.ir

Archive of SID

Lindley, D. V. (1980), Approximate Bayesian Methods, *Trabajos de Estadistica de Investigacion Operativa*, **31**, 223-237.

Lio, Y. L. and Tsai, T. R. (2012), Estimation of $\delta = P(X < Y)$ for Burr XII Distribution Based on the Progressively First Failure-Censored Samples, *Journal of Applied Statistics*, **39**, 309-322.

Micheas, A. C. and Wikle, C. K. (2009), A Bayesian Hierarchical Nonoverlapping Random Disc Growth Model, *Journal of the American Statistical Association*, **104**, 274-283.

Osei, F. B. and Duker, A. A. (2011), Hierarchical Bayesian Modeling of the Space-time Diffusion Patterns of Cholera Epidemic in Kumasi, Ghana *Statistica Neerlandica*, **65**, 84-100.

Rayleigh, J. W. S. (1880), On the Resultant of a Large Number of Vibration of the Somepith and of Arbitrary Phase, *Philosophical Magazine, 5th series*, **10**, 73-78.

Richard, D. M. (2011), A Bayesian hierarchical model for the measurement of working memory capacity, *Journal of Mathematical Psychology*, **55**, 8-24.

Raqab, M. Z. and Kundu, D. (2005), Comparison of Different Estimators of $P(Y < X)$ for a Scaled Burr type X Distribution, *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, **34**, 465-483.

Raqab, M. Z., Madi, T. and Kundu, D. (2008), Estimation of P(Y < X) for the Three-Parameter Generalized Exponential Distribution, *Communications in Statistics-Theory and Methods*, **37**, 2854-2865.

Sylwia, K. B. (2007), Makeham's Generalised Distribution, *Computational Methods In Science and Technology*, **13**, 113-120.

www.SID.ir

Archive of SID

Saracoglu, B., Kinacia, I. and Kundu, D. (2012), On Estimation of $R = P(Y < X)$ for Exponential Distribution under Progressive type-II Censoring, *Journal of Statistical Computation and Simulation*, **85**, 729-744.

Wang, J., Li, D. and Chen, D. (2012), E Bayesian Estimation and Hierarchical Bayesian Estimation of the System Reliability Parameter, *Systems Engineering Procedia*, **3**, 282-289.

مقاله پذیرفته شده

www.SID.ir

Archive of SID

Estimating E-Bayesian and Hierarchical Bayesian of Stress-strength Parameter in Rayleigh Distribution under LINEX Loss Function

Shadrokh, A., Yaghoobzadeh Shahrastani, S.

Department of Statistics, Payame Noor University, Tehran, Iran.

Abstract: In this study, the E-Bayesian and hierarchical Bayesian for stress-strength, when X and Y are two independent Rayleigh distributions with different parameters were estimated based on the LINEX loss function. These methods were compared with each other and with the Bayesian estimator using Monte Carlo simulation and two real data sets.

Keywords: Rayleigh Distribution, E-Bayesian Estimation, Hierarchical Bayesian Estimation, LINEX Loss Function, Stress-strength, Monte Carlo Simulation.

Mathematics Subject Classification (2010): 62E15, 62G05, 62F15.

www.SID.ir