Journal of Statistical Sciences, Spring and Summer, 2022
Vol. 16, No. 1, pp 25-40
DOI: 10.29252/jss.16.1.25

Stochastic Comparisons of Convolution of Independent Random Variables in the Scale Model

Amini-Seresht, E.[1], Barmalzan, G.[2] and Nasiroleslami, E.[1]
[1] Department of Statistics, Bu-Ali Sina University, Hamedan, Iran.
[2] Department of Statistics, University of Zabol, Zabol, Iran.

Corresponding author: E. Nasiroleslami, enasiroleslami@yahoo.com

Received: 8 August 2021 Revised: 10 May 2022 Accepted and Published Online: 18 May 2022.

Introduction

Convolutions of independent random variables often arise in many applied areas, including applied probability, reliability theory, actuarial science, nonparametric goodness-of-fit testing, and operations research. Since the distribution theory is quite complicated when the convolution involves independent and non-identical random variables, it is of great interest to investigate the stochastic properties of convolutions and derive bounds and approximations on some characteristics of interest in this setup. The results in this work give responses that under the new condition, the convolution of two random variables is ordered according to some stochastic orders such as likelihood ratio order, hazard rate order and reversed hazard rate order. In general cases, let X_1, X_2 and X_1^*, X_2^* be independent random variables that $X_1 \leq_{lr} X_2$ and $X_1^* \leq_{lr} X_2^*$. Then it is not necessarily true that $X_1 + X_2 \leq_{lr} X_1^* + X_2^*$. However, if these random variables have log-concave densities, then it is true. This paper compared the random variables from scale models according to likelihood ratio order, hazard rate order and reversed hazard rate order. Random variable X be said to belong to the scale family of distributions if it has the distribution function. The density function $F(\lambda x)$ and $\lambda f(\lambda x)$, respectively, where F is an absolutely continuous distribution function with density function f and λ is the scale parameter.

Material and Methods

The comparison of essential characteristics associated with lifetimes of technical systems is an exciting topic in reliability theory since it usually enables us to approximate complex systems with simpler designs and subsequently obtain various bounds for important ageing characteristics of the complex system. A convenient tool for this purpose is the theory of stochastic orderings.

Results and Discussion

This paper deals with some stochastic comparisons of convolution of random variables comprising scale variables. Sufficient conditions are established for these convolutions' likelihood ratio ordering and hazard rate ordering. The results established in this paper generalize some known results in the literature. Several examples are also presented for more illustrations.

Conclusion

Convolutions of independent random variables occur quite frequently in probability and statistics, stochastic activity networks, optics, acoustics, electrical engineering, physics, the area of digital signal and insurance mathematics. Therefore, their stochastic properties are essential and have been discussed extensively in the literature. We obtained sufficient conditions to compare the convolution of random variables from the scale model concerning likelihood ratio and hazard rate order. Recently Amini-Seresht and Barmalzan (۲۰۲۰) have studied ordering properties of parallel and series systems consisting of outlier scale components. They provided some sufficient conditions on the parameter vectors for the likelihood ratio, hazard rate, reversed hazard rate and mean residual lifetime orders between the lifetimes of the series and parallel systems, respectively. Therefore, a generalization of the present work to the case random variables with an outlier scale model framework will be of interest. We are working on this problem and hope to report these findings in a forthcoming paper.

Keywords: Likelihood Ratio Order; Hazard Rate Order; Scale model; Convolution.

Mathematics Subject Classification (2010): 60E15, 90B25.

مجله علوم آماری، بهار و تابستان ۱۴۰۱
جلد ۱۶، شماره ۱، ص ۲۵ – ۴۰
DOI: 10.29252/jss.16.1.25
مقاله پژوهشی

مقایسه تصادفي پیچش متغیرهای تصادفي مستقل در مدل مقیاس

ابراهیم امینی‌سرشت[۱]، قباد برمال‌زن[۲]، ابراهیم نصیرالاسلامی[۱]

[۱] گروه آمار دانشگاه بوعلی سینا همدان

[۲] گروه آمار دانشگاه زابل

نویسنده مسئول : ابراهیم نصیرالاسلامی، enasiroleslami@yahoo.com

تاریخ دریافت: ۱۴۰۰/۰۵/۱۷   تاریخ بازنگری: ۱۴۰۱/۰۲/۲۰   تاریخ پذیرش و انتشار: ۱۴۰۱/۰۲/۲۸

چکیده: در این مقاله به مقایسه تصادفی میان پیچش متغیرهای تصادفی متشکل از متغیرهای مقیاس پرداخته می‌شود. شرایط لازم برای برقراری ترتیب نسبت درستنمایی و ترتیب نرخ خطر اثبات شده است. نتایج اثبات شده در این مقاله، برخی از نتایج موجود در مقالات را تعمیم می‌دهد. همچنین چندین مثال برای درک بیشتر قضایا ارائه شده است.

واژه‌های کلیدی: ترتیب نسبت درستنمایی، ترتیب نرخ خطر، مدل مقیاس، پیچش

کد موضوع‌بندی ریاضی (۲۰۱۰): 60E15، 90B25.

۱ مقدمه

یک خانواده کلی از توزیع‌ها که شامل توزیع‌های معروفی مانند نمایی، رایلی، وایبل، گاما و غیره می‌شود خانواده توزیع‌های مقیاس است. فرض کنید $\bar{F}(\cdot)$ تابع توزیعی مطلقاً پیوسته با تابع چگالی احتمال $f(\cdot)$ باشد، آنگاه متغیرهای تصادفی مستقل $X_1, \cdots, X_n$ متعلق به خانواده توزیع‌های مقیاس هستند هرگاه $\lambda_1 X_1, \cdots, \lambda_n X_n$ متغیرهای تصادفی مستقل و هم‌توزیع با تابع توزیع مشترک $F(\cdot)$ باشند که در آن $\lambda_i > 0$ است. به عبارت دیگر، $X_1, \cdots, X_n$ متعلق به خانواده توزیع‌های مقیاس هستند هرگاه به ازای $i = 1, \cdots, n$ رابطه $X_i \sim F(\lambda_i x)$ برقرار باشد. در این حالت، $F(\cdot)$ تابع توزیع پایه و λ_iها پارامترهای مقیاس نامیده می‌شوند. مقایسه‌های تصادفی آماره‌های مرتب متشکل از این خانواده از توزیع‌ها ابتدا توسط پلجر و پروسچان (۱۹۷۱) و از آن زمان به بعد،

توسط نویسندگان دیگری از جمله هو (۱۹۹۵)، بون و پالتانه (۲۰۰۶) و خالدی و همکاران (۲۰۱۱) مورد بررسی قرارگرفت. اخیراً نتایجی برای سیستم های سری و موازی توسط برمال‌زن و همکاران (۱۳۹۴) بدست آمده است، همچنین امینی سرشت و برمال‌زن (۱۳۹۹) سیستم‌های k از n از مدل مقیاس با چندین دور افتاده را در نظرگرفتند و تحت شرایطی روی تابع نرخ خطر و وارون تابع نرخ خطر پایه، نتایجی را نسبت به ترتیب‌های تصادفی شناخته شده بدست آوردند.

آماره‌های مرتب که به صورت $X_{1:n}, \cdots, X_{n:n}$ نمایش داده می‌شوند با مرتب کردن متغیرهای تصادفی $X_1, \cdots, X_n$ از کوچک به بزرگ حاصل می‌شود. این آماره‌ها کاربردهای زیادی در قابلیت اعتماد، نظریه مزایده، نظریه صف، بیم‌سنجی، مدیریت ریسک و غیره دارد (بالاکریشنان و رائو ، ۱۹۹۸a،b). پیچش متغیرهای تصادفی مستقل، به وفور در آمار و احتمال، شبکه‌های فعال تصادفی، اپتیک، مهندسی برق، فیزیک، برخی از شاخه‌های سیگنال دیجیتال و ریاضیات بیمه اتفاق می‌افتد (ناداراجا و دی ، ۲۰۰۵). بنابراین بررسی خواص تصادفی پیچش متغیرهای تصادفی مستقل از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است و به طور گسترده مورد بررسی قرار گرفته است. در حالت خاص، مقایسه‌های تصادفی پیچش متغیرهای تصادفی، وقتی که متغیرها مستقل و غیر هم‌توزیع هستند در بولند و همکاران (۱۹۹۴)، کوچر و ما (۱۹۹۹)، هو و لین (۲۰۰۰)، هو و لین (۲۰۰۱)، کروwار (۲۰۰۲) و خالدی و کوچر (۲۰۰۴، ۲۰۰۶) مورد بررسی قرارگرفته است.

لازم به توجه است که اگر X_1, X_2 و X_1^*, X_2^* متغیرهای تصادفی مستقل باشند به طوری که در نابرابری‌های تصادفی $X_1 \leq_{lr} (\leq_{hr}) X_2$ و $X_1^* \leq_{lr} (\leq_{hr}) X_2^*$ صدق کنند آنگاه لزومی ندارد که نابرابری تصادفی $X_1 + X_2 \leq_{lr} (\leq_{hr}) X_1^* + X_2^*$ برقرار باشد. اما اگر این متغیرهای تصادفی دارای خاصیت لُگ-مقعر (نرخ خطر صعودی) باشند آنگاه نابرابری $X_1 + X_2 \leq_{lr} (\leq_{hr}) X_1^* + X_2^*$ همواره برقرار است. در این مقاله هدف ارائه شرایط جدیدتر و ضعیف‌تر از خواص لُگ-مقعر و نرخ خطر صعودی برای برقراری ترتیب نسبت درستنمایی و نرخ خطر میان پیچش متغیرهای تصادفی است.

در این مقاله، تمرکز اصلی بر روی متغیرهای تصادفی مستقل مقیاس با پارامترهای مقیاس متفاوت است و چندین مقایسه تصادفی میان پیچش این‌گونه متغیرها بر حسب ترتیب های تصادفی نسبت درستنمایی و نرخ خطر انجام شده است. در این مقاله برای برقراری ترتیب تصادفی درستنمایی بین پیچش متغیرهای تصادفی، شرطی ضعیف‌تر نسبت به شرط بیان شده در شانتیکومار و یو (۱۹۹۱) در نظرگرفته شده است و با ذکر مثال‌هایی، درستی آن بررسی شده است. همچنین برای برقراری ترتیب تصادفی نرخ خطر تصادفی شرطی ضعیف‌تر نسبت به شرط بیان شده در موخرجی و پاترجی (۱۹۹۲) مطرح شده است و با ذکر مصداق‌هایی، درستی آن نشان داده شده است.

در بخش ۲، تعاریف و مفاهیم مورد نیاز ارائه شده است. مقایسه‌های تصادفی پیچش متغیرهای تصادفی مقیاس، از لحاظ ترتیب تصادفی نسبت درستنمایی در بخش ۳ انجام شده است. در بخش ۴ ترتیب تصادفی نرخ خطر میان پیچش متغیرهای تصادفی مقیاس بررسی شده است. سرانجام، بحث و نتیجه گیری ارائه شده است.

۲ تعاریف و مفاهیم

در این مقاله، واژه‌های صعودی به معنای غیرنزولی و نزولی به معنای غیرصعودی و نماد $a \overset{\text{sgn}}{=} b$ به معنای هم علامت بودن a و b است. همچنین منظور از $\mathbf{1}_{n-1}$، برداری از مرتبه $n-1$ با درایه‌های برابر ۱ هستند.

تعریف ۱. (شیکد و شانتیکومار ، ۲۰۰۷) فرض کنید X و Y دو متغیر تصادفی نامنفی با توابع توزیع $F_X(x) = P(X \leq x)$ و $F_Y(x) = P(Y \leq x)$، توابع بقای $\bar{F}_X(x) = 1 - F_X(x)$ و $\bar{F}_Y(x) = 1 - F_Y(x)$، توابع چگالی احتمال $f_X(x)$ و $f_Y(x)$، توابع نرخ خطر $r_X(x) = f_X(x)/\bar{F}_X(x)$ و $r_Y(x) = f_Y(x)/\bar{F}_Y(x)$ باشند. X در ترتیب

(الف) تصادفی معمولی بزرگتر از Y است $(X \geq_{st} Y)$ هرگاه به ازای $x > 0$، $\bar{F}(x) \geq \bar{G}(x)$.

(ب) نرخ خطر بزرگتر از Y است $(X \geq_{hr} Y)$ هرگاه نسبت $\bar{F}_X(x)/\bar{F}_Y(x)$ تابعی صعودی از $x \geq 0$ باشد.

(ج) نسبت درستنمایی بزرگتر از Y است $(X \geq_{lr} Y)$ هرگاه نسبت $f_X(x)/f_Y(x)$ تابعی صعودی از $x \geq 0$ باشد.

میان ترتیب‌های تصادفی فوق، رابطه زیر برقرار است:

$$X \geq_{lr} Y \Longrightarrow X \geq_{hr} Y \Longrightarrow X \geq_{st} Y \Longrightarrow E(X) \geq E(Y).$$

مولر و استویان (۲۰۰۲) و شیکد و شانتیکومار (۲۰۰۷) منابع مناسبی برای بررسی و شناخت ترتیب‌های تصادفی و کاربردهای آنها هستند.

تعریف ۲. (شیکد و شانتیکومار ، ۲۰۰۷) متغیر تصادفی X دارای خاصیت لُگ-مقعر[1] است هرگاه نسبت $f(x+t)/f(x)$، یا به عبارت دیگر $f'(x)/f(x)$، تابعی نزولی از x باشد.

تعریف ۳. (کارلین و رونیت ، ۱۹۸۰) تابع دو متغیره نامنفی و حقیقی مقدار h دارای خاصیت بطور کلی مثبت از مرتبه ۲ [2] (TP_2) روی $(x,y) \in \chi \times \gamma$ است هرگاه

$$h(x_1,y_1)h(x_2,y_2) \geq h(x_1,y_2)h(x_2,y_1), \quad x_1 \leq x_2 \in \chi \text{ و } y_1 \leq y_2 \in \gamma$$

که در آن χ و γ دو زیر مجموعه دلخواه از $\mathbb{R}$ هستند.

[1] Log-concave
[2] Totally positive of order 2

۳ ترتیب نسبت درستنمایی میان پیچش متغیرهای تصادفی

در این بخش، به مقایسه‌های تصادفی پیچش متغیرها از مدل مقیاس، از لحاظ ترتیب نسبت درستنمایی پرداخته می‌شود. بدین منظور، ابتدا لم زیر بیان می‌شود که در اثبات نتیجه بعدی بکار می رود.

لم ۱. فرض کنید X_1 و X_1^* متغیرهای تصادفی مستقل و نامنفی از مدل مقیاس با پارامترهای مقیاس به ترتیب λ_1 و λ_1^* باشند. اگر نسبت $\frac{xf'(x)}{f(x)}$ تابعی نزولی از x باشد آنگاه

$$\lambda_1 \geq \lambda_1^* \Longrightarrow X_1 \leq_{lr} X_1^*.$$

برهان: طبق تعریف ترتیب درستنمایی، برای برقراری نتیجه لازم، کافی است نشان داده شود نسبت $\phi(t) := \frac{f(\lambda_1^* t)}{f(\lambda_1 t)}$ تابعی صعودی از t است. مشتق تابع $\phi(t)$ نسبت به t عبارت است از:

$$\phi'(t) \overset{\text{sgn}}{=} \lambda_1^* \frac{f'(\lambda_1^* t)}{f(\lambda_1^* t)} - \lambda_1 \frac{f'(\lambda_1 t)}{f(\lambda_1 t)}.$$

با قرار دادن $\lambda_1^* t = x_1$ و $\lambda_1 t = x_2$ و $\lambda_1 \geq \lambda_1^*$، بسادگی مشاهده می‌شود $x_1 \leq x_2$ و در نتیجه

$$\phi'(t) \overset{\text{sgn}}{=} \frac{x_1 f'(x_1)}{f(x_1)} - \frac{x_2 f'(x_2)}{f(x_2)} \geq 0.$$

با توجه به شرط $\frac{xf'(x)}{f(x)}$ که تابعی نزولی از x است، نامنفی بودن عبارت اخیر، برقرار است.

لم ۲. (کوچر و کرمانی ، ۱۹۹۵) فرض کنید $\psi_1(x,u)$ و $\psi_2(x,u)$ دو تابع حقیقی مقدار مثبت باشند به طوری که

(الف) به ازای $u_1 \leq u_2$ توابع $\frac{\psi_2(x,u_2)}{\psi_2(x,u_1)}$ و $\frac{\psi_1(x,u_2)}{\psi_2(x,u_1)}$ توابعی صعودی از x باشند.

(ب) به ازای هر مقدار ثابت x، نسبت $\frac{\psi_1(x,u)}{\psi_2(x,u)}$ تابعی صعودی در u باشد.

در این صورت $X \leq_{lr} Y$ نتیجه می‌دهد $\frac{E[\psi_1(x,Y)]}{E[\psi_2(x,X)]}$ تابعی صعودی از x است، به شرطی که امید ریاضی‌ها موجود باشند.

لم ۳. (شانتیکومار و یو ، ۱۹۹۱) فرض کنید X_1، X_1^* و X متغیرهای تصادفی مستقل از مدل مقیاس به ترتیب با پارامترهای λ_1، λ_1^* و λ باشند. اگر تابع چگالی متغیر تصادفی X لُگ-مقعر باشد آنگاه

$$\lambda_1 \geq \lambda_1^* \Longrightarrow X_1 + X \leq_{lr} X_1^* + X.$$

قضیه ۱. فرض کنید X_1، X_1^* و X متغیرهای تصادفی مستقل از مدل مقیاس به ترتیب با پارامترهای λ_1، λ_1^* و λ باشند. اگر نسبت $\frac{xf'(x)}{f(x)}$ تابعی نزولی از x باشد آنگاه

$$\lambda_1 \geq \lambda_1^* \Longrightarrow X_1 + X \leq_{lr} X_1^* + X.$$

برهان: تابع چگالی احتمال $X_1 + X$ به صورت

$$f_{X_1+X}(t) = \int_0^\infty \lambda\lambda_1 I(t-x) f(\lambda(t-x)) f(\lambda_1 x) dx,$$

است که در آن به ازای $t \geq x$، $I(t-x) = 1$ و به ازای $t \leq x$، $I(t-x) = 0$ است. بطور مشابه

$$f_{X_1^*+X}(t) = \int_0^\infty \lambda\lambda_1^* I(t-x) f(\lambda(t-x)) f(\lambda_1^* x) dx.$$

برای رسیدن به نتیجه لازم، کافی است نشان داده شود

$$\psi(t) = \frac{\int_0^\infty I(t-x) f(\lambda(t-x)) f(\lambda_1^* x) dx}{\int_0^\infty I(t-x) f(\lambda(t-x)) f(\lambda_1 x) dx} = \frac{E[\psi_1(t, X_1^*)]}{E[\psi_2(t, X_1)]},$$

تابعی صعودی از t است که در آن به ازای $i = 1, 2$، $\psi_i(t,x) = I(t-x) f(\lambda(t-x))$ است. برای اثبات قضیه، کافی است شرایط لم ۲ بررسی شود. با توجه به اینکه فرم تابعی $\psi_i(t,x)$ به اندیس i وابسته نیست، لذا برای هر مقدار ثابت t، $\frac{\psi_1(t,x)}{\psi_2(t,x)} = 1$ است. بنابراین کافی است برای هر $x_1 \leq x_2$ نشان داده شود

$$\frac{\psi_2(t,x_2)}{\psi_2(t,x_1)} = \frac{\psi_1(t,x_2)}{\psi_2(t,x_1)} \quad = \quad \frac{I(t-x_2)}{I(t-x_1)} . \frac{f(\lambda(t-x_2))}{f(\lambda(t-x_1))} = \frac{I(t-x_2)}{I(t-x_1)}\ \phi(t)$$

تابعی صعودی از t است. برای حالتی که $t \leq x_1 \leq x_2$ است با توجه به تعریف تابع $I(t-x)$، $I(t-x_2) = 0$ و $I(t-x_1) = 0$ که نشان می‌دهد نسبت فوق در این حالت بی معنی است. همچنین برای حالتی که $x_1 \leq t \leq x_2$ است، $I(t-x_2) = 0$ و $I(t-x_1) = 1$ است که نسبت فوق در این حالت برابر صفر خواهد شد. لذا در ادامه، قضیه فقط برای حالتی که $x_1 \leq x_2 \leq t$ است اثبات می‌شود. چون $I(t-x)$ دارای خاصیت TP_2 در $(t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ است بنابراین $\frac{I(t-x_2)}{I(t-x_1)}$ تابعی صعودی از t است. برای نشان دادن صعودی بودن تابع ϕ داریم:

$$\phi'(t) \overset{\text{sgn}}{=} \lambda\frac{f'(\lambda(t-x_2))}{f(\lambda(t-x_2))} - \lambda\frac{f'(\lambda(t-x_1))}{f(\lambda(t-x_1))}.$$

با قرار دادن $\lambda(t-x_{۲}) = u_{۱}$ و $\lambda(t-x_{۱}) = u_{۲}$، چون $x_{۱} \leq x_{۲}$ است واضح است $u_{۱} \leq u_{۲}$ است. در نتیجه

$$\begin{aligned} \phi'(t) &\overset{\text{sgn}}{=} \frac{۱}{t-x_{۲}}.\frac{u_{۱}f'(u_{۱})}{f(u_{۱})} - \frac{۱}{t-x_{۱}}.\frac{u_{۲}f'(u_{۲})}{f(u_{۲})} \\ &\geq \frac{۱}{t-x_{۱}}\{\frac{u_{۱}f'(u_{۱})}{f(u_{۱})} - \frac{u_{۲}f'(u_{۲})}{f(u_{۲})}\} \geq ۰. \end{aligned}$$

با توجه به شرط قضیه که $\frac{xf'(x)}{f(x)}$ تابعی نزولی است، نامنفی بودن عبارت آخر برقرار می شود. بنابراین طبق لم ۲، نابرابری تصادفی $X_{۱}^{*} \leq_{lr} X_{۱}$ باعث تکمیل شدن اثبات می‌گردد.

تذکر ۱. نکته قابل تذکر این است که شرط نزولی بودن $\frac{xf'(x)}{f(x)}$ در قضیه ۱ ضعیف‌تر از شرط لُگ-مقعر بودن $f(x)$ در لم ۳ از شانتیکومار و یو (۱۹۹۱) است. به عنوان مثال، فرض کنید X دارای توزیع گاما با تابع چگالی احتمال $f(x) = \frac{\lambda^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-۱}e^{-\lambda x}$ باشد که در آن $x > ۰, \alpha > ۰, \lambda > ۰$ است. می‌توان نشان داد $\frac{xf'(x)}{f(x)} = \alpha - ۱ - \lambda x$ به ازای $\alpha > ۰$ همواره تابعی نزولی از x است. از طرف دیگر، $\log f(x) = \alpha\log(\lambda) - \log(\Gamma(\alpha)) + (\alpha-۱)\log(x) - \lambda x$ است. مشتقات جزئی اول و دوم $\log f(x)$ نسبت به x به ترتیب عبارتند از:

$$\frac{\partial \log f(x)}{\partial x} = \frac{\alpha-۱}{x} - \lambda \qquad \text{و} \qquad \frac{\partial^{۲} \log f(x)}{\partial x^{۲}} = \frac{۱-\alpha}{x^{۲}}$$

که نشان می‌دهند تابع چگالی گاما، به ازای $\alpha \geq ۱$ لُگ-مقعر و به ازای $۰ < \alpha \leq ۱$ تابعی لُگ-محدب است. بنابراین واضح است که شرط قضیه ۱ بدون هیچ‌گونه محدودیتی روی α برقرار است. در صورتی که استفاده از نتیجه شانتیکومار و یو (۱۹۹۱)، محدودیت $\alpha > ۱$ را وارد مساله می‌نماید.

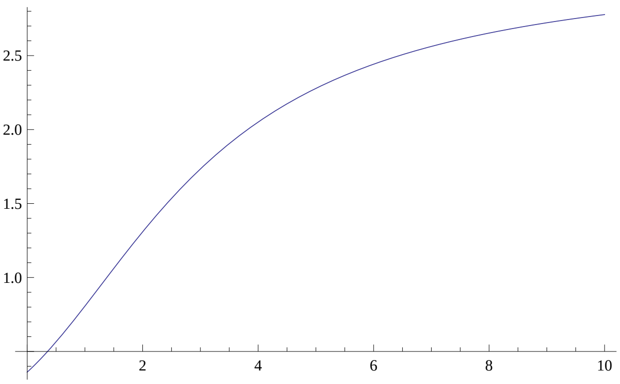
مثال ۱. فرض کنید $X_{۱}$، $X_{۱}^{*}$ و X متغیرهای تصادفی مستقل گاما به ترتیب با پارامترهای مقیاس $\lambda_{۱} = ۵$، $\lambda_{۱}^{*} = ۳$ و $\lambda = ۲$ باشند. به ازای $\alpha = ۲$، تابع چگالی پیچش $X_{۱} + X$ به صورت

$$f_{X_{۱}+X}(t) = \int_{۰}^{t} ۳۶x(t-x)e^{-۲(t-x)-۳x}dx = ۳۶e^{-۳t}(۲+t+(t-۲)e^{t}).$$

است. بطور مشابه، تابع چگالی احتمال پیچش $X_{۱}^{*} + X$ عبارت است از:

$$f_{X_{۱}^{*}+X}(t) = \int_{۰}^{t} ۱۰۰x(t-x)e^{-۲(t-x)-۵x}dx = \frac{۱۰۰}{۲۷}e^{-۵t}(۲+۳t+(-۲+۳t)e^{۳t}).$$

نمودار تابع $\frac{f_{X_1^*+X}(t)}{f_{X_1+X}(t)}$ در شکل ۱ رسم شده است که نشان می‌دهد نسبت فوق، تابعی صعودی از t است که ملاحظه می شود برای $\alpha > 1$، نابرابری تصادفی $X_1 + X \leq_{lr} X_1^* + X$ برقرار است.



شکل ۱. نسبت توابع چگالی $X_1^* + X$ به $X_1 + X$ به ازای $\alpha = 2$

اکنون برای $\alpha = 0.3$ می‌توان نوشت

$$f_{X_1+X}(t) = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{24.1742 e^{(-5t/2)} Cosh(xt)}{(1-x^2/25)^{0.7} t^{0.4}} dx$$

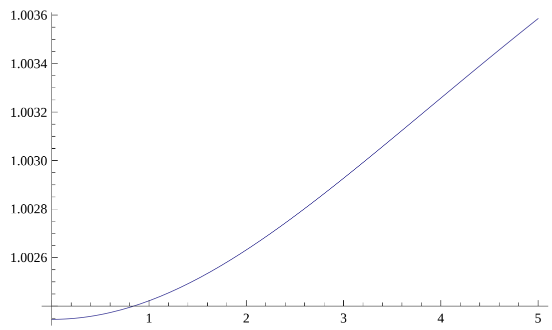
$$f_{X_1^*+X}(t) = \int_0^{\frac{3}{2}} \frac{67.1505 e^{-(7t/2)} Cosh(xt)}{(1-x^2/49)^{0.7} t^{0.4}} dx$$

نمودار $\frac{f_{X_1^*+X}(t)}{f_{X_1+X}(t)}$ در شکل ۲ نشان می‌دهد این نسبت تابعی صعودی از t است که و برای $0 < \alpha \leq 1$، نابرابری تصادفی $X_1 + X \leq_{lr} X_1^* + X$ برقرار است.

قضیه ۲. فرض کنید $X_1, \cdots, X_n$ و $X_1^*, \cdots, X_n^*$ دو مجموعه از متغیرهای تصادفی مستقل از مدل مقیاس با یک دورافتاده به ترتیب با پارامترهای $(\lambda_1, \lambda \mathbf{1}_{n-1})$ و $(\lambda_1^*, \lambda \mathbf{1}_{n-1})$ باشند. اگر نسبت $\frac{xf'(x)}{f(x)}$ تابعی نزولی از x باشد آنگاه

$$\lambda_1 \geq \lambda_1^* \Longrightarrow \sum_{i=1}^{n} X_i \leq_{lr} \sum_{i=1}^{n} X_i^*.$$

برهان: چون X_1، X_1^*، $\sum_{i=2}^n X_i$ و $\sum_{i=2}^n X_i^*$ مستقل و متغیرهای $\sum_{i=2}^n X_i$ و $\sum_{i=2}^n X_i^*$ هم‌توزیع هستند، نتیجه لازم بر اساس قضیه ۱ حاصل می‌شود.



شکل ۲. نسبت توابع چگالی $X_1^* + X$ به $X_1 + X$ به ازای $\alpha = ۰/۳$

۴ ترتیب نرخ خطر میان پیچش متغیرهای تصادفی

در این بخش، به مقایسه‌های تصادفی پیچش متغیرها از مدل مقیاس، از لحاظ ترتیب تصادفی نرخ خطر پرداخته می‌شود. بدین منظور ابتدا یک لم بیان و اثبات می‌شود که در اثبات نتیجه بعدی بکار برده می‌شود.

لم ۴. فرض کنید X_1 و X_1^* متغیرهای تصادفی مستقل و نامنفی از مدل مقیاس با پارامترهای مقیاس به ترتیب λ_1 و λ_1^* باشند. اگر $x\,r(x)$ تابعی صعودی از x باشد آنگاه

$$\lambda_1 \geq \lambda_1^* \Longrightarrow X_1 \leq_{hr} X_1^*.$$

برهان: طبق تعریف ترتیب تصادفی نرخ خطر، برای برقراری نتیجه لازم، کافی است نشان داده شود نسبت $\phi(t) := \frac{\overline{F}(\lambda_1^* t)}{\overline{F}(\lambda_1 t)}$ تابعی صعودی از t است. مشتق تابع $\phi(t)$ نسبت به t عبارت است از:

$$\begin{aligned}
\phi'(t) &\overset{\text{sgn}}{=} \lambda_1 f(\lambda_1 t)\overline{F}(\lambda_1^* t) - \lambda_1^* f(\lambda_1^* t)\overline{F}(\lambda_1 t) \\
&\overset{\text{sgn}}{=} \lambda_1 \frac{f(\lambda_1 t)}{\overline{F}(\lambda_1 t)} - \lambda_1^* \frac{f(\lambda_1^* t)}{\overline{F}(\lambda_1^* t)} \\
&\overset{\text{sgn}}{=} \lambda_1 r(\lambda_1 t) - \lambda_1^* r(\lambda_1^* t).
\end{aligned}$$

با قرار دادن $\lambda_1^* t = x_1$ و $\lambda_1 t = x_2$ و $\lambda_1 \geq \lambda_1^*$، بسادگی مشاهده می‌شود $x_1 \leq x_2$ و در نتیجه

$$\phi'(t) \overset{\text{sgn}}{=} x_2\, r(x_2) - x_1\, r(x_1) \geq 0,$$

که در آن نامنفی بودن عبارت فوق براساس شرط صعودی بودن $x\, r(x)$ برقرار است.
فرض کنید

$$\Psi(x) = \frac{\int_0^\infty \psi_2(x,\theta) g_2(\theta) d\theta}{\int_0^\infty \psi_1(x,\theta) g_1(\theta) d\theta}, \qquad x > 0.$$

لم ۵. (میسرا و نکوی ، ۲۰۱۸) فرض کنید T_1 و T_2 دو متغیر تصادفی نامنفی به ترتیب دارای توابع چگالی احتمال g_1 و g_2 باشند و $\frac{\psi_2(x,\theta)}{\psi_1(x,\theta)}$ تابعی صعودی در x و θ باشد. همچنین فرض کنید $\psi_1(x,\theta)$ یا $\psi_2(x,\theta)$ تابعی TP_2 در $(x,\theta) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ باشد. اگر $T_1 \leq_{hr} T_2$ باشد، آنگاه $\Psi(x)$ تابعی صعودی در x است.

لم ۶. (موخرجی و پاترجی ، ۱۹۹۲) فرض کنید X_1، X_1^* و X متغیرهای تصادفی مستقل از مدل مقیاس به ترتیب با پارامترهای λ_1، λ_1^* و λ باشند. اگر تابع نرخ خطر X صعودی باشد آنگاه

$$\lambda_1 \geq \lambda_1^* \Longrightarrow X_1 + X \leq_{hr} X_1^* + X.$$

قضیه ۳. فرض کنید X_1، X_1^* و X متغیرهای تصادفی مستقل از مدل مقیاس به ترتیب با پارامترهای λ_1، λ_1^* و λ باشند. اگر نسبت $x\, r(x)$ تابعی صعودی از x باشد آنگاه

$$\lambda_1 \geq \lambda_1^* \Longrightarrow X_1 + X \leq_{hr} X_1^* + X.$$

برهان: تابع بقای پیچش $X_1 + X$ عبارت است از:

$$\overline{F}_{X_1+X}(t) = \int_0^\infty \lambda_1 I(t-x) \overline{F}(\lambda(t-x)) f(\lambda_1 x) dx,$$

که در آن به ازای $x \geq t$، $I(t-x) = 1$ و به ازای $x \leq t$، $I(t-x) = 0$ است. بطور مشابه

$$\overline{F}_{X_1^*+X}(t) = \int_0^\infty \lambda_1^* I(t-x) \overline{F}(\lambda(t-x)) f(\lambda_1^* x) dx.$$

برای رسیدن به نتیجه لازم، کافی است $\Psi(t) = \frac{\int_0^\infty I(t-x)\overline{F}(\lambda(t-x)) f(\lambda_1^* x) dx}{\int_0^\infty I(t-x)\overline{F}(\lambda(t-x)) f(\lambda_1 x) dx}$ تابعی صعودی از t باشد. قرار دهید $\psi_i(t,x) = I(t-x)\overline{F}(\lambda(t-x))$. بنابراین کافی است شرایط لم ۵ بررسی شود. با توجه به اینکه فرم تابعی $\psi_i(t,x)$ به i وابسته نیست لذا واضح است $\frac{\psi_1(t,x)}{\psi_2(t,x)} = 1$ که تابعی ثابت است. بنابراین کافی است نشان

داده شود $\psi_۱(t,x)$ تابعی $TP_۲$ در $(t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ است. لذا مشابه بحث بیان شده در اثبات قضیه ۱ کافی است برای حالتی که $x_۱ \leq x_۲ \leq t$ باشد، نسبت

$$\frac{\psi_۱(t,x_۲)}{\psi_۲(t,x_۱)} = \frac{I(t-x_۲)}{I(t-x_۱)}\,\frac{\overline{F}(\lambda(t-x_۲))}{\overline{F}(\lambda(t-x_۱))} = \frac{I(t-x_۲)}{I(t-x_۱)}\,\phi(t)$$

تابعی صعودی از t باشد. چون $I(t-x)$ دارای خاصیت $TP_۲$ در $(t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ است بنابراین $\frac{I(t-x_۲)}{I(t-x_۱)}$ تابعی صعودی از t است. برای نشان دادن صعودی بودن تابع ϕ داریم:

$$\begin{aligned}\phi'(t) &\overset{\text{sgn}}{=} \lambda\frac{f(\lambda(t-x_۱))}{\overline{F}(\lambda(t-x_۱))} - \lambda\frac{f(\lambda(t-x_۲))}{\overline{F}(\lambda(t-x_۲))}\\ &= \lambda r(\lambda(t-x_۱)) - \lambda r(\lambda(t-x_۲)).\end{aligned}$$

با قرار دادن $\lambda(t-x_۱) = u_۲$ و $\lambda(t-x_۲) = u_۱$، چون $x_۱ \leq x_۲$ است واضح است $u_۱ \leq u_۲$ است. در نتیجه

$$\begin{aligned}\phi'(t) &\overset{\text{sgn}}{=} \frac{۱}{t-x_۲}.u_۲ r(u_۲) - \frac{۱}{t-x_۱}.u_۱ r(u_۱)\\ &\geq \frac{۱}{t-x_۱}\{u_۲ r(u_۲) - u_۱ r(u_۱)\} \geq ۰.\end{aligned}$$

با توجه به فرض قضیه که $xr(x)$ تابعی صعودی از x است، نامنفی بودن عبارت آخر برقرار است.

تذکر ۲. لازم به ذکر است که شرط صعودی بودن $xr(x)$ در قضیه ۲ ضعیف‌تر از شرط صعودی بودن $r(x)$ در لم ۶ از موخرجی و پاترجی (۱۹۹۲) است. به عنوان مثال، فرض کنید X دارای توزیع وایبل با تابع بقای $\bar{F}(x) = e^{-(\lambda x)^\alpha}$ باشد که در آن $x > ۰, \alpha > ۰, \lambda > ۰$ است. بسادگی می‌توان نشان داد $r(x) = \alpha\lambda^\alpha x^{\alpha-۱}$ است. واضح است که $xr(x)$ بدون هیچگونه محدودیتی روی α صعودی است در حالی که $r(x)$ به ازای $\alpha > ۱$ تابعی صعودی از x است. بنابراین مشاهده می‌شود که شرط قضیه ۲ بدون هیچگونه محدودیتی روی α برقرار است، در صورتی که استفاده از نتیجه موخرجی و پاترجی (۱۹۹۲) ، محدودیت $\alpha > ۱$ را وارد مساله می‌نماید.

تذکر ۳. فرض کنید X دارای توزیع گامای تعمیم‌یافته با تابع چگالی احتمال

$$f(x) = \frac{\alpha}{\Gamma(\beta/\alpha)} x^{\beta-۱} e^{-(\lambda x)^\alpha} \qquad x > ۰, \alpha > ۰, \beta > ۰, \lambda > ۰$$

باشد. در این صورت تابع نرخ خطر این توزیع به ازای $\alpha \geq ۱$ و $\beta \geq ۱$ صعودی است. از طرف دیگر

خالدی و همکاران (۲۰۱۱) نشان دادند که به ازای $\alpha > ۰$ و $\beta > ۰$ همواره صعودی است. بنابراین محدودیت روی پارامترها در قضیه ۲ کمتر از لم ۶ خواهد شد.

لم ۷. شرط بیان شده در قضیه ۱ " $\frac{xf'(x)}{f(x)}$ تابعی نزولی در x است" شرط بیان شده در قضیه ۲ " $xr(x)$ تابعی صعودی در x است" را نتیجه می دهد.

برهان: فرض کنید X یک متغیر تصادفی نامنفی باشد. همچنین فرض کنید $a_۱$ و $a_۲$ دو مقدار ثابت و نامنفی باشند بطوریکه، $a_۱ \le a_۲$ باشد. در ادامه نشان داده می‌شود که $\frac{xf'(x)}{f(x)}$ تابعی نزولی در x است اگر و فقط اگر $\frac{X}{a_۱} \ge_{lr} \frac{X}{a_۲}$ باشد. رابطه اخیر معادل این است که $\xi(x) := \frac{a_۱ f(a_۱ x)}{a_۲ f(a_۲ x)}$ تابعی صعودی از x باشد. مشتق تابع $\xi(x)$ نسبت به x عبارت است از:

$$\xi'(x) \quad \overset{\text{sgn}}{=} \quad \frac{۱}{x}\Big\{\frac{u_۱ f'(u_۱)}{f(u_۱)} - \frac{u_۲ f'(u_۲)}{f(u_۲)}\Big\} \ge ۰,$$

که در آن $u_۱ = a_۱ x$ و $u_۲ = a_۲ x$ است. چون $۰ < a_۱ \le a_۲$ است، نتیجه می‌شود $۰ < u_۱ \le u_۲$ است. بنابراین آخرین نامساوی با فرض اینکه، "$\frac{xf'(x)}{f(x)}$ تابعی نزولی در x است"، برقرار می شود. به طور مشابه می‌توان نشان داد $xr(x)$ تابعی صعودی در x است اگر و فقط اگر $\frac{X}{a_۱} \ge_{hr} \frac{X}{a_۲}$. از آنجا که ترتیب تصادفی نسبت درستنمایی، ترتیب تصادفی نرخ خطر را نتیجه می‌دهد لذا با استفاده از مشاهدات فوق، شرط " $\frac{xf'(x)}{f(x)}$ تابعی نزولی در x است" شرط " $xr(x)$ تابعی صعودی در x است" را نتیجه می دهد.

قضیه ۴. فرض کنید $X_۱, \cdots, X_n$ و $X_۱^*, \cdots, X_n^*$ دو مجموعه از متغیرهای تصادفی مستقل از مدل مقیاس با یک دورافتاده به ترتیب با پارامترهای $(\lambda_۱, \lambda \mathbf{1}_{n-۱})$ و $(\lambda_۱^*, \lambda \mathbf{1}_{n-۱})$ باشند. اگر نسبت $xr(x)$ تابعی صعودی از x باشد آنگاه

$$\lambda_۱ \ge \lambda_۱^* \Longrightarrow \sum_{i=۱}^{n} X_i \le_{hr} \sum_{i=۱}^{n} X_i^*.$$

برهان: چون $X_۱$، $X_۱^*$، $\sum_{i=۲}^{n} X_i$ و $\sum_{i=۲}^{n} X_i^*$ مستقل هستند و متغیرهای $\sum_{i=۲}^{n} X_i$ و $\sum_{i=۲}^{n} X_i^*$ هم‌توزیع هستند بنابراین نتیجه لازم بلافاصله با استفاده از قضیه ۲ حاصل می‌شود.

بحث و نتیجه‌گیری

پیچش متغیرهای تصادفی مستقل، در آمار و احتمال، شبکه‌های فعال تصادفی، اپتیک، مهندسی برق، فیزیک، برخی از شاخه‌های سیگنال دیجیتال و ریاضیات بیمه کاربرد دارد. بنابراین بررسی خواص تصادفی پیچش متغیرهای تصادفی مستقل از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است و به طور گسترده مورد بررسی قرار گرفته است. در این مقاله، به مقایسه تصادفی میان پیچش متغیرهای تصادفی متشکل از متغیرهای مقیاس پرداخته شد. شرایط لازم برای برقراری ترتیب تصادفی نسبت درستنمایی و ترتیب تصادفی نرخ خطر ارائه گردید و برخی از نتایج موجود در مقالات تعمیم داده شد. اخیراً امینی سرشت و برمال‌زن (۱۳۹۹) به مقایسه تصادفی سیستم های سری و موازی در سیستم های k از n در مدل مقیاس با چندین دور افتاده نسبت به ترتیب های تصادفی درست نمایی، نرخ خطر، نرخ خطر معکوس و ترتیب تصادفی میانگین باقیمانده عمر پرداختند. سوالی که می‌توان در اینجا مطرح کرد این است که آیا نتایج تعیین شده در این مقاله را می‌توان به مدل در نظر گرفته شده در مقاله فوق بسط داد؟ سوال و پیشنهاد مطرح شده فوق، می‌تواند به عنوان مطالعات آتی برای پژوهشگران این حوزه قرار بگیرد.

تقدیر و تشکر

نویسندگان از پیشنهادات ارزنده داوران سردبیر و ویراستار محترم مجله که باعث ارائه بهتر و افزایش سطح کیفی مقاله شده است، کمال قدردانی و تشکر را دارند.

مراجع

برمال‌زن، ق. حیدری، ع. معصومی‌فرد، خ. (۱۳۹۴)، مقایسه تصادفی سیستم‌های سری و موازی در مدل مقیاس، مجله علوم آماری، ۹، ۲۰۶-۱۸۹.

امینی سرشت، ا. برمال‌زن، ق. (۱۳۹۹)، ترتیب نسبت درست‌نمایی میان سیستم‌های k از n متشکل از مولفه‌های مقیاس با چندین دورافتاده، مجله علوم آماری، ۱۴، ۳۳۵-۳۵۰.

Balakrishnan, N. and Rao, C.R. (1998a), *Handbook of Statistics, Vol. 16: Order Statistics: Theory and Methods*, North-Holland, Amsterdam.

Balakrishnan, N. and Rao, C.R. (1998b), *Handbook of Statistics, Vol. 17: Order Statistics: Applications*, North-Holland, Amsterdam.

Boland, P.J., El-Neweihi, E. and Proschan, F. (1994), Schur Properties of Convolutions of Exponential and Geometric Random Variables, *Journal of Multivariate Analysis,* **48**, 157-167.

Bon, J.L. and Paltanea, E. (2006), Comparisons of Order Statistics in a Random Sequence to the Same Statistics with i.i.d. Variables, *ESAIM: Probability and Statistics,* **10**, 1-10.

Hu, T. (1995), Monotone Coupling and Stochastic Ordering of Order Statistics, *System Science and Mathematical Sciences,* **8**, 209-214.

Hu, C.Y. and Lin, G.D. (2000), On an Inequality for the Rayleigh Distribution, *Sankhya A*, **62**, 36-39.

Hu, C.Y. and Lin, G.D. (2001), An Inequality for the Weighted Sum of Pairwise i.i.d. Generalized Rayleigh Random Variables, *Journal of Statistical Planning and Inference*, **92**, 1-5.

Karlin, S. and Rinott, Y. (1980), Classes of Orderings of Measures and Related Correlation Inequalities, Multivariate Totally Positive Distributions, *Journal of Multivariate Analysis*, **10**, 467-498.

Khaledi, B.E., Farsinezhad, S. and Kochar, S.C. (2011), Stochastic Comparisons of Order Statistics in the Scale Model, *Journal of Statistical Planning and Inference,* **141**, 276-286.

Khaledi, B.E. and Kochar, S.C. (2004), Ordering Convolutions of Gamma Random Variables, *Sankhya*, **66**, 466-473.

Khaledi, B.E. and Kochar, S.C. (2006), Weibull Distribution: Some Stochastic Comparisons Results, *Journal of Statistical Planning and Inference*, **136**, 3121-3129.

Kochar, S.C. and Ma, C. (1999), Dispersive Ordering of Convolutions of Exponential Random Variables, *Statistics & Probability Letters*, **43**, 321-324.

Kochar, S.C. and Kirmani, S. (1995), Some Results on Normalized Spacings from Restricted Families of Distributions, *Journal of Statistical Planning and Inference*, **46**, 47-57.

Korwar, R.M. (2002), On Stochastic Orders for Sums of Independent Random Variables, *Journal of Multivariate Analysis*, **80**, 344-357.

Misra, N. and Naqvi, S. (2018), Some Unified Results on Stochastic Properties of Residual Lifetimes at Random Times, *Brazilian Journal of probability and Statistics*, **32**, 422-436.

Mukherjee, S.P. and Chatterjee, A. (1992), Closure Under Convolution of Dominance Relations, *Calcutta Statistical Association Bulletin*, **42**, 251-254.

Müller, A. and Stoyan, D. (2002), *Comparison Methods for Stochastic Models and Risks*, John Wiley & Sons, New York.

Nadarajah, S. and Dey, D.K. (2005), Convolutions of the Pearson Type VII Distribution, *Computers & Mathematics with Applications*, **50**, 339-346.

Pledger, P. and Proschan, F. (1971), Comparisons of Order Statistics and of Spacings from Heterogeneous Distributions, In: *Optimizing Methods in Statistics* (Ed., J.S. Rustagi), pp. 89-113, Academic Press, New York.

Shaked, M. and Shanthikumar, J.G. (2007), *Stochastic Orders*, Springer, New York.

Shanthikumar, J.G. and Yao, D.D. (1991), Bivariate Characterization of Some Stochastic Order Relations, *Advances in Applied Probability*, **23**, 642-659.