Journal of Statistical Sciences, Spring and Summer, 2022
Vol. 16, No. 1, pp 41-62
DOI: 10.29252/jss.16.1.41

Infinite Time Ruin Probability in the Risk Model of Excess Loss Reinsurance

Bazyari, A., Alizadeh, M.
Department of Statistics, Persian Gulf University, Bushehr, Iran.

Corresponding author: A. Bazyari, ab_bazyari@yahoo.com

Received: 4 April 2021 **Revised:** 1 August 2021 **Accepted and Published Online:** 1 September 2021.

Introduction

This paper considers the collective risk model of an insurance company with constant surplus initial and premium when the claims are distributed as Exponential distribution and process number of claims distributed as Poisson distribution. It is supposed that the reinsurance is done based on excess loss, which in that insurance portfolio, the part of total premium is the share of the reinsurer. A general formula for computing the infinite time ruin probability in the excess loss reinsurance risk model is presented based on the classical ruin probability. The random variable of the total amount of reinsurer's insurer payment in the risk model of excess loss reinsurance is investigated, and explicit formulas for calculating the infinite time ruin probability in the risk model of excess loss are proposed for reinsurance. Finally, the results are examined using numerical data for Lindley and Exponential distributions.

Material and Methods

The infinite time ruin probability is computed in the collective risk model with constant surplus initial and premium when the claims are distributed as Exponential distribution and process number of claims distributed as Poisson distribution. Using mathematical and statistical approaches, for example, Laplace transform and moment generating function on the claim amounts, and some theorems are presented to compute the ruin probability. The primary method is to separate the ruin probability based on a certain threshold with constant initial reserve. It is supposed that reinsurance is based on excess loss.

Results and Discussion

Information about the company's status is essential for the company's managers at any time. The primary key is computing the ruin probabilities. In the present paper, we compute the infinite time ruin probability in the classical risk model with constant initial reserve when the claim amounts are distributed as Exponential distribution and the reinsurance is excess loss, which in that insurance portfolio, the part of total premium is the share of the reinsurer. The infinite time ruin probability computes various threshold and initial reserve values. The numerical result shows that the infinite time ruin probability decreases as the initial increases.

Conclusion

In studying an insurance risk model, knowing how the company's financial reserve may be expected over a certain period is essential. A common criterion to assess risks for an insurer is called ruin probability. Ruin is a principal technical term that does not necessarily mean that the company is bankrupt but instead that bankruptcy is at hand and that the company should be prompted to take action to improve its solvency status. Ruin theory is the branch of applied probability that quantifies a firm's vulnerability to insolvency and ruin. Computing the ruin probability is a central topic in insurance risk theory literature. The study of level crossing events is a standard topic of risk theory. It has turned out to be a fruitful area of applied mathematics and statistics, as (depending on the model assumptions) often subtle applications of tools from real and complex analysis, functional analysis, asymptotic analysis and algebra are needed. The classical insurance risk model includes information about the premium income rate and the initial capital necessary to meet the expected claims costs. The ruin probability function depends on some quantities. The results show that the infinite time ruin probability increases as the initial increases.

Keywords: Ruin probability, Initial Increase, Excess loss reinsurance, Lindley distribution.

Mathematics Subject Classification (2010): 91B30, 60E15.

مجله علوم آماری، بهار و تابستان ۱۴۰۱
جلد ۱۶، شماره ۱، ص ۴۱ – ۶۲
DOI: 10.29252/jss.16.1.41
مقاله پژوهشی

احتمال ورشکستگی زمان نامتناهی در مدل مخاطره بیمه اتکایی مازاد خسارت

ابوذر بازیاری و مراد علیزاده
گروه آمار، دانشگاه خلیج فارس، بوشهر

نویسنده مسئول : نام نویسنده مسئول مقاله، ab_bazyari@pgu.ac.ir

تاریخ دریافت: ۱۴۰۰/۰۱/۱۵ تاریخ بازنگری: ۱۴۰۰/۰۷/۱۰ تاریخ پذیرش و انتشار: ۱۴۰۰/۰۷/۱۶

چکیده: مدل مخاطره جمعی اتکایی شرکت بیمه با سرمایه اولیه و حق بیمه ثابت وقتی خسارت‌ها دارای توزیع نمایی و فرآیند تعداد خسارت‌ها دارای توزیع پواسن باشند، در نظر گرفته شده است. فرض می‌شود که بیمه اتکایی بر مبنای بیمه اتکایی مازاد خسارت از طرف بیمه‌گر اتکایی انجام شود که در آن سبد بیمه، قسمتی از کل حق بیمه سهم بیمه‌گر اتکایی باشد. یک فرمول کلی برای محاسبه احتمال ورشکستگی زمان نامتناهی در مدل بیمه اتکایی مازاد خسارت با افزایش سرمایه بر حسب احتمال ورشکستگی مدل کلاسیک ارایه شده است. متغیر تصادفی مقدار کل مبلغ پرداختی از طرف بیمه‌گر اتکایی در مدل بیمه اتکایی مازاد خسارت، مورد بررسی قرار گرفته و فرمول‌هایی صریح برای محاسبه احتمالات ورشکستگی زمان نامتناهی در مدل بیمه اتکایی مازاد خسارت برای وقتی اندازه‌های خسارت دارای توزیع نمایی باشند، ارایه شده است. در پایان، نتایج برای توزیع‌های لیندلی و نمایی با داده‌های عددی مورد بررسی قرار گرفته است.

واژه‌های کلیدی: احتمال ورشکستگی، افزایش سرمایه، بیمه اتکایی مازاد خسارت، توزیع لیندلی.
کد موضوع‌بندی ریاضی (۲۰۱۰): 91B30، 60E15.

۱ مقدمه

درماندگی مالی وضعیتی است که در آن، شرکت برای کسب منافع مالی کافی برای ادامه فعالیتش ناتوان است. در فرآیند عمر شرکت‌ها، مراحل مختلفی از تولد، بلوغ، رشد و در نهایت افول و ورشکستگی وجود دارد. شرکت‌ها زمانی ورشکسته تلقی می‌شوند که به لحاظ اقتصادی توان باز پرداخت بدهی‌های خود را نداشته باشند. از این رو

سرمایه‌گذاران و اعتباردهندگان تمایل زیادی برای پیش‌بینی درماندگی بنگاه‌های اقتصادی دارند، زیرا در صورت ورشکستگی بنگاه، هزینه زیادی به آن‌ها تحمیل خواهد شد. افزایش سرمایه، رویدادی بسیار مهم در شرکت‌ها است و این تامین منابع مالی جدید می‌تواند به شکل‌های مختلفی انجام بگیرد.

افزایش سرمایه‌ای که سبب ورود منابع جدید مالی به شرکت شود، شرایط مناسب‌تری را برای توسعه فعالیت‌ها رقم می‌زند. در سال‌های اخیر، فرآیند شرکت‌های بیمه مورد توجه ریاضی‌دانان و آماردانان برای محاسبه احتمالات و زمان‌های ورشکستگی[1] قرار گرفته و این خود چشم‌اندازی مفید برای خط‌مشی آینده مدیران شرکت‌های بیمه است. معروف‌ترین مدل در بیمه، مدل کرامر-لاندبرگ است که توسط کاس و همکاران (۲۰۰۸) و آسموسن (۲۰۱۰) بطور مفصل در مورد آن بحث و مطالعه شده است.

یوآنجیانگ و همکاران (۲۰۰۳) یک فرمول کلی برای محاسبه احتمالات ورشکستگی در مدل مخاطره جمعی برای خسارت‌های دارای توزیع گاما بدست آوردند. لفور و لویسل (۲۰۰۹) احتمال ورشکستگی زمان متناهی در مدل مخاطره جمعی با فرض اینکه مقدار حق بیمه دریافتی از بیمه‌گذار ان ثابت نبوده و تابعی غیر منفی و غیر نزولی از زمان باشد، را محاسبه کردند. آلبرچر و کورتشاک (۲۰۰۹) ، به محاسبه تقریبی احتمال ورشکستگی زمان نامتناهی برای مدل مخاطره جمعی وقتی اندازه خسارت‌ها دارای توزیع پارتو باشد، پرداختند. بازیاری و پرهام (۱۳۸۷) به بررسی و مطالعه دقیق مدل‌های مخاطره شرکت بیمه پرداختند. بازیاری (۱۳۹۶) احتمال ورشکستگی زمان نامتناهی مدل مخاطره جمعی شرکت بیمه با سرمایه اولیه ثابت را محاسبه کرد. سانتانا و همکاران (۲۰۱۶) تقریب احتمال ورشکستگی زمان نامتناهی در مدل مخاطره جمعی را با وجود خسارت‌های دارای توزیع ارلنگ آمیخته بدست آوردند. بازیاری (۱۳۹۱) زمان‌های ورشکستگی، احتمالات ورشکستگی و نیز فواصل اطمینان برای برآورد احتمالات ورشکستگی را در مدل مخاطره انفرادی با وجود وابستگی بین خسارت‌ها با روش شبیه‌سازی مونت کارلو محاسبه کرد. لفور و لویسل (۲۰۰۸) احتمال ورشکستگی زمان متناهی را برای مدل‌های مختلف بیمه محاسبه کردند. بازیاری و روزگار (۲۰۱۹) احتمال ورشگستگی در مدل مخاطره جمعی با فرض وابستگی بین خسارت‌ها و اندازه‌های خسارت را محاسبه کردند. استیتسیاشویلی (۲۰۰۹) احتمال ورشکستگی را در مدل مخاطره جمعی و مدل بیمه اتکایی با وجود خسارتهای دارای توزیع پارتو بدست آورد. رنگینیان و همکاران (۱۳۹۷) به بررسی مدل‌های مخاطره شامل مدل مخاطره جمعی و مدل بیمه اتکایی[2] با وجود خسارت‌های دارای توزیع پارتو پرداختند. برخی از نویسندگان به مسایل بهینه در بیمه اتکایی، شامل یافتن کمترین واریانس مجموع خسارت‌های رخ داده و نیز یافتن احتمالات ورشکستگی توجه کردند. دیکسون و واترز (۱۹۹۶) با روش‌های عددی، بهترین سهم نگهداری[3] در قرارداد بیمه اتکایی مازاد خسارت توسط بیمه‌گر واگذارنده برای یافتن کمترین مقدار احتمال ورشکستگی زمان نامتناهی را در مدل مخاطره محاسبه کردند. دیکسون و واترز (۲۰۰۴) مدل مخاطره جمعی در قرارداد بیمه اتکایی را با وجود سود سهام بین بیمه‌گران واگذارنده در شرکت بیمه و پرداختی از طرف بیمه‌گر اتکایی در موقع رخداد ورشکستگی مورد

[1] Times to ruin
[2] Reinsurance model
[3] Retention level

بررسی قرار دادند و احتمال ورشکستگی زمان نامتناهی را محاسبه کردند. ایسنبرگ و اشمیدلی (۲۰۱۱) با در نظر گرفتن مدل مخاطره جمعی در قرارداد بیمه اتکایی مازاد خسارت، بهترین مقدار بهینه مبلغ پرداختی از طرف بیمه‌گر اتکایی به بیمه‌گر واگذارنده را با توجه به متغیرهای تصادفی رخداد خسارت‌ها محاسبه کردند. تعیین بهترین ملاک برای دریافت حق بیمه از بیمه‌گذار ان در بیمه اتکایی توسط کائو و همکاران (۲۰۱۶) ارایه شده است. ایکسیو و همکاران (۲۰۱۸) با در نظر گرفتن مدل مخاطره جمعی با خسارت‌های وابسته، کمترین مقدار برای احتمال ورشکستگی زمان نامتناهی را محاسبه و کران لاندبرگ را بدست آوردند.

در بخش ۲، قرارداد بیمه اتکایی مازاد خسارت، تعریف مدل مخاطره جمعی شرکت بیمه، تعریف احتمال ورشکستگی زمان نامتناهی، زمان ورشکستگی، توزیع ناقص و کسری ورشکستگی ارایه شده است. در بخش ۳، یک فرمول کلی برای محاسبه احتمال ورشکستگی زمان نامتناهی در مدل بیمه اتکایی مازاد خسارت با افزایش سرمایه، بر حسب مقدار احتمال ورشکستگی در مدل بیمه کلاسیک بدست آمده و متغیر تصادفی مقدار کل پرداختی بیمه‌گر اتکایی در مدل بیمه اتکایی مازاد خسارت، مورد بررسی قرار گرفته است. در بخش ۴، احتمال ورشکستگی زمان نامتناهی در مدل بیمه اتکایی مازاد خسارت برای خسارت‌های با توزیع نمایی محاسبه و امید ریاضی و واریانس متغیر تصادفی مقدار کل پرداختی بیمه‌گر اتکایی بر اساس خسارت‌ها دارای توزیع نمایی بدست آمده‌اند. مثال‌های عددی برای بررسی نتایج در بخش ۵ داده شده‌اند. در نهایت، بحث و نتیجه‌گیری ارایه شده است.

۲ نمادها و تعاریف اولیه در مدل بیمه

در این بخش، مطالبی در مورد قرارداد بیمه اتکایی مازاد خسارت ارایه شده، تعاریف مرتبط با مدل مخاطره جمعی شرکت بیمه و کسری ورشکستگی آورده شده است.

قرارداد بیمه اتکایی مازاد خسارت: افزایش سرمایه از دو روش قرارداد بیمه اتکایی نسبی و قرارداد بیمه اتکایی غیر نسبی (مازاد خسارت) انجام می‌شود آنچه در این مقاله مورد بررسی قرار می‌گیرد با روش قرارداد بیمه اتکایی مازاد خسارت است. در جریان قرارداد بیمه اتکایی مازاد خسارت در مدت معین، بیمه‌گر واگذارنده و بیمه‌گر اتکایی توافق می‌کنند که اگر مقدار خسارت رخ داده شده از بیمه‌گذار در یک دوره در یک رشته یا رشته‌های مشخصی در سبد بیمه از عدد معینی زیادتر شود بطوریکه باعث شود تا سرمایه شرکت از مقداری از پیش تعیین شده کمتر شود، آنگاه مازاد آن توسط بیمه‌گر اتکایی پرداخت شود. در این نوع قرارداد بیمه‌گر واگذارنده نیز درصد معینی از کل حق بیمه خود را در آن رشته یا رشته‌ها را به عنوان حق بیمه اتکایی به بیمه‌گر اتکایی پرداخت می‌کند.

مدل مخاطره جمعی شرکت بیمه: فرض کنید $(\Omega, \mathbf{F}, P)$ یک فضای احتمال بوده و موارد زیر را در بر داشته باشد

الف) یک فرآیند نقطه‌ای مانند $N = \{\mathrm{N}(t)t \geq 0t\}$ با فرض $\mathrm{N}(0) = 0$.

ب) دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی و مستقل $\{X_k\}_{k=1}^{\infty}$ با تابع توزیع مشترک F، $(F(0) = 0)$، میانگین β و واریانس σ^2.

فرض کنید شرکت بیمه با سرمایه اولیه ثابت u شروع به فعالیت کند، آنگاه فرآیند مخاطره جمعی شرکت

به‌صورت

$$R(t) = u + ct - \sum_{k=1}^{N(t)} X_k, \tag{1}$$

تعریف می‌شود، که در آن ct مجموع حق بیمه‌های دریافتی تا زمان t ، X_k، $k = 1, \cdots, N(t)$، متغیر تصادفی اندازه خسارت رخداده شده از طرف k امین بیمه‌گذار در بازه $[0, t]$ و دارای تابع توزیع مشترک F با میانگین β و $\sum_{k=1}^{N(t)} X_k$ مجموع خسارت‌های رخداده شده تا زمان t است. در واقع فرض می‌شود که شرکت در هر دوره زمانی مبلغ ثابت c را از هر بیمه‌گذار دریافت کند که آن را نرخ ناخالص حق بیمه مخاطره می‌گویند. در مدل مخاطره جمعی $\{N(t)t \geq 0\}$، فرآیند تعداد خسارت‌های رخداده شده از طرف بیمه‌گذار ان تا زمان t است و معمولاً فرض می‌شود که $\{N(t)t \geq 0\}$ دارای فرآیند پواسون با پارامتر λ باشد، یعنی تساوی $\mathrm{E}[N(t)] = \lambda t$ برقرار است و نیز زمان بین k امین و $(k+1)$ امین خسارت متغیر تصادفی T_k بوده بطوریکه این متغیرها از هم مستقل و دارای هر توزیع پیوسته آماری می‌توانند باشند. در مدل مخاطره، بدلیل هم توزیع بودن متغیرهای تصادفی اندازه خسارت و زمان رخداد آنها، رابطه

$$c = (1+\theta)\,\frac{\mathrm{E}(X_k)}{\mathrm{E}(T_k)}, \tag{2}$$

بین حق بیمه و سربار ایمنی برقرار است، که در آن θ سربار ایمنی است، یعنی هزینه‌های اضافی که شرکت بیمه بابت بازاریابی و تبلیغات و غیره از بیمه‌گذار ان دریافت می‌کند (آسموسن ، ۲۰۱۰).

احتمال ورشکستگی و زمان ورشکستگی شرکت بیمه: شرکت بیمه با سرمایه اولیه u شروع به فعالیت می‌کند. بنابراین در زمان $t = 0$، سرمایه اولیه شرکت برابر با u است. شرکت در طول زمان با نرخ ثابت c شروع به جمع‌آوری حق بیمه از بیمه‌گذار ان تحت پوشش خود می‌کند، بنابراین سرمایه‌اش با ضریب زاویه c رو به افزایش است تا اینکه اولین خسارت در زمانی مانند T_1 از طرف بیمه‌گذار از شرکت ادعا شود. فرض کنید مبلغ این خسارت X_1 باشد، بنابراین سرمایه شرکت پس از رسیدن به مقدار $u + cT_1$ ، بلافاصله بعد از وقوع خسارت به میزان $u + cT_1 - X_1$ تنزل می‌یابد. همین روند ادامه پیدا می‌کند. تا زمانی که شرکت برای تعهدات خود سرمایه‌ای باقی داشته باشد به کار و فعالیت خود ادامه خواهد داد. در یک فرآیند مخاطره، ورشکستگی وقتی رخ می‌دهد که مجموع خسارت‌های پرداخت شده از طرف شرکت بیمه بیشتر از مقدار مبلغ ذخیره شده آن شرکت باشد. به عبارت دیگر ورشکستگی رخ می‌دهد هرگاه برای کوچکترین مقدار $t > 0$، همواره $R(t) < 0$ باشد. اگر احتمال ورشکستگی زمان نامتناهی بدون افزایش سرمایه با نماد $\psi(u)$ نشان داده شود، آنگاه برای $u \geq 0$، $\psi(u) = P(R(t) < 0 | R(0) = u)$ است. برای سرمایه اولیه u، زمان ورشکستگی بدون افزایش سرمایه را با نماد T_u نشان داده و $T_u = \min\{t | t \geq 0,\ R(t) < 0\}$ است و اگر برای تمام $t > 0$، $R(t) \geq 0$ باشد، ورشکستگی رخ نمی‌دهد، یعنی $T_u = \infty$ است. بنابراین احتمال ورشکستگی زمان نامتناهی بدون افزایش

سرمایه از طرف بیمه‌گر اتکایی $\psi(u)=P(T_u<\infty)$ است. اگر برای مقدار حقیقی y، تابع $G(u,y)$ بصورت $G(u,y)=P\big(T_u<\infty,\ -y\leq R(t)<y\big)$، تعریف شود، آنگاه در تابع $G(u,y)$ مقدار ذخیره شرکت بیمه در زمان T_u، از عدد y کمتر بوده و نیز کاملاً بدیهی است که تابع $G(u,y)$ توزیعی ناقص[1] است، یعنی $\lim_{y\to\infty} G(x,y)<۱$ است (رلسکی و همکاران ، ۱۹۹۹).

مقدار احتمال $G(u,y)$ را کسری ورشکستگی گویند. این احتمال توسط نویسندگان زیادی مورد بررسی قرار گرفته شده است. ویلموت (۲۰۰۲) و ویلموت و همکاران (۲۰۰۴) به محاسبه و بررسی ویژگی‌های در مدل مخاطره تجدید ایستا پرداختند. همچنین دیکسون (۲۰۰۵) به تجزیه و تحلیل تابع $G(u,y)$ در مدل مخاطره جمعی شرکت بیمه پرداخت و نشان داد که تساوی

$$G(u,y)=\frac{\psi(۰)}{E(X)}\Big[\int_u^{u+y}(۱-F(x))dx+\int_۰^u(۱-F(x))G(u-x,y)dx\Big],$$

برقرار است. مشتق این تابع عبارت است از

$$\begin{aligned} g(u,y) &= \frac{d}{dy}G(u,y),\\ g(u,y)dy &= P\big(T_u<\infty,-y-dy<R(T_u)<y\big)dy. \end{aligned} \qquad (۳)$$

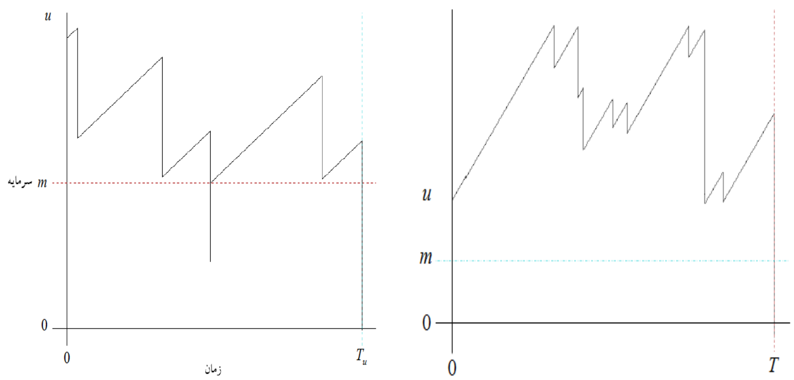
احتمال ورشکستگی زمان نامتناهی با افزایش سرمایه به شرکت بیمه‌گر واگذارنده از طرف بیمه‌گر اتکایی در بخش سوم بدست آمده است.

۳ احتمال ورشکستگی در قرارداد بیمه اتکایی مازاد خسارت

در فرآیند مخاطره برای مقدار y که $۰\leq y\leq u$، اگر در هر لحظه از زمان سرمایه فرآیند مخاطره $R(t)$ به مقدار $m-y$ که، $m>y$ برسد، آنگاه بیمه‌گر اتکایی ناچار به پرداخت مبلغ به اندازه y است تا سرمایه شرکت به مقدار m برسد. فرض کنید در زمان t با بروز خسارت از طرف بیمه‌گذار ، سرمایه شرکت زیر مقدار از پیش تعیین شده m قرار بگیرید. آنگاه با پرداخت مبلغی از طرف بیمه‌گر اتکایی، سرمایه به مقدار m خواهد رسید. اما در قرار داد بیمه اتکایی مازاد خسارت اگر با رخداد خسارت سرمایه شرکت زیر صفر قرار بگیرد، بیمه‌گر اتکایی مبلغی به شرکت بیمه‌گر واگذارنده پرداخت نخواهد کرد، زیرا ورشکستگی اتفاق افتاده است.

شکل ۱-الف نشان‌دهنده فرآیند مخاطره شرکت بیمه بدون افزایش سرمایه همراه با ورشکستگی است. فرض کنید $\psi_m(u)$ احتمال ورشکستگی زمان نامتناهی شرکت بیمه در زمان t بوده که سرمایه شرکت کمتر از مقدار از پیش تعیین شده m، $۰\leq m\leq u$ باشد. کاملاً بدیهی است که $\psi_m(u)$ با $\psi(u)$ متفاوت است. شکل ۱ -ب

[1] Defective distribution



(ب) (الف)

شکل ۱. الف- فرآیند مخاطره شرکت بیمه بدون افزایش سرمایه اما ورشکستگی رخ داده، ب- فرآیند مخاطره شرکت بیمه با افزایش سرمایه از طرف بیمه گر اتکایی

نشان‌دهنده فرآیند مخاطره شرکت بیمه با افزایش سرمایه از طرف بیمه‌گر اتکایی است. در این نمودار سرمایه شرکت در هر لحظه از زمان کاملاً مشخص است. هرگاه سرمایه شرکت کمتراز مقدار m باشد، اما زیر صفر نباشد، این سرمایه از طرف بیمه‌گر اتکایی به سطح m می‌رسد. در زمان T_u سرمایه شرکت منفی شده، یعنی ورشکستگی اتفاق افتاده است.

ملاحظه می‌شود که اگر شرکت با سرمایه اولیه u شروع به فعالیت کند، آنگاه کسری احتمال ورشکستگی در مدل مخاطره به دو صورت مجزای زیر خواهد بود. یکی اینکه در زمان مشخصی، سرمایه شرکت کمتر از مقدار m و نیز زیر صفر باشد، که ورشکستگی رخ می‌دهد. در این حالت، احتمال ورشکستگی شرکت بیمه دقیقاً برابر با احتمال ورشکستگی در مدل مخاطره اولیه با سرمایه اولیه $u-m$ بوده که در این صورت احتمال ورشکستگی برابر $\psi(u-m)$ است. از طرفی واضح است که $m>y$ خواهد بود. دیگری اینکه $u-m<u-y$ است و در نتیجه در زمان مشخصی، سرمایه شرکت کمتر از مقدار m اما زیر صفر نباشد، که جبران سرمایه از طرف بیمه‌گر اتکایی خواهد بود. فرض می‌شود که در حالت دوم، سرمایه شرکت مقدار y باشد، آنگاه $m > y > ۰$ است. بنابراین $\psi_m(u)$ عبارت است از

$$\begin{aligned} \psi_m(u) &= P(y<k, y<۰) + P(۰<y<k)\psi_m(m) \\ &= \int_m^\infty g(u-m,y)dy + \int_۰^m g(u-m,y)dy\, \psi_m(m) \\ &= \psi(u-m) - G(u-m,m) + \psi_m(m)G(u-m,m), \end{aligned} \quad (۴)$$

که در آن تابع $g(u,y)$ در رابطه (۳) تعریف شده است. ملاحظه می‌شود که رابطه (۳) وابسته به احتمال ورشکستگی در مدل بیمه اتکایی بوده که هنوز مقدار آن مجهول است. برای حل آن، فرض می‌شود $u=m$ باشد. آنگاه (۳)، $\psi_m(m)=\psi(\circ)-G(\circ,m)+\psi_m(m)G(\circ,m)$ است. بنابراین

$$\psi_m(m)=\frac{\psi(\circ)-G(\circ,m)}{1-G(\circ,m)}. \tag{۵}$$

در نتیجه

$$\psi_m(u)=\psi(u-m)-G(u-m,m)\times\frac{1-\psi(\circ)}{1-G(\circ,m)}, \tag{۶}$$

که ارتباط بین احتمال ورشکستگی در مدل بیمه اتکایی مازاد خسارت را با احتمال ورشکستگی در مدل بیمه کلاسیک نشان می‌دهد. لازم به توضیح است که اگر $m=\circ$ باشد، آنگاه $\psi_\circ(u)$ با مقدار احتمال ورشکستگی در مدل کلاسیک برابر خواهد بود، زیرا

$$\psi_\circ(u)=\psi(u)-G(u,\circ)\times\frac{1-\psi(\circ)}{1-G(\circ,\circ)}=\psi(u).$$

متغیر تصادفی مقدار کل پرداختی بیمه‌گر اتکایی: فرض کنید در زمان t خسارت یا خسارت‌هایی از طرف بیمه‌گذار ان رخ داده که سرمایه شرکت کمتر از مقدار m شود، بنابراین طبق قرارداد بیمه‌گر اتکایی مجبور به پرداخت مبلغی است تا سرمایه شرکت به مقدار m برسد. اگر w نشان‌دهنده کل سرمایه شرکت در زمان t باشد، آنگاه فرض می‌شود $S_{w,m}$ متغیر تصادفی مقدار کل پرداختی بیمه‌گر اتکایی به بیمه‌گر واگذارنده در این زمان تا رسیدن سرمایه به m باشد. یافتن امید ریاضی و واریانس این متغیر دارای اهمیت است. برای انجام این کار، ابتدا امید ریاضی متغیر $S_{m,m}$ محاسبه می‌شود امید ریاضی این متغیر مربوط به اولین افزایش سرمایه است. ایسنبرگ و اشمیدلی (۲۰۱۱) نشان دادند که اولین افزایش سرمایه دارای تابع چگالی $g(\circ,y)$ است. بنابراین

$$\begin{aligned} E(S_{n,m}) &= \int_\circ^m \left[y+E(S_{n,m})\right]g(\circ,y)dy \\ &= \frac{\int_\circ^m y\,g(\circ,y)dy}{1-G(\circ,m)}. \end{aligned} \tag{۷}$$

با استفاده از ایسنبرگ و اشمیدلی (۲۰۱۱) همین استدلال برای $w>m$ بکار برده می‌شود. در این حالت اولین

افزایش سرمایه دارای تابع چگالی $g(w-m,y)$ است. پس طبق (۴)

$$\begin{aligned} E(S_{w,m}) &= \int_{\circ}^{m} \big[y + E(S_{m,m})\big] g(u-m,y)dy \\ &= \int_{\circ}^{m} y\, g(u-m,y)dy + G(u-m,m)\, \frac{\int_{\circ}^{m} y\, g(\circ,y)dy}{۱ - G(\circ,m)}. \end{aligned} \tag{۸}$$

برای محاسبه واریانس متغیر تصادفی $S_{w,m}$، ابتدا مقدار $\mathrm{E}(S^{۲}_{w,m})$ محاسبه می‌شود برای این کار، دقت شود که

$$\begin{aligned} E(S^{۲}_{m,m}) &= \int_{\circ}^{m} E\big[(y + S_{m,m})^{۲}\big]\, g(\circ,y)dy \\ &= \frac{\int_{\circ}^{m} y^{۲}\, g(\circ,y)dy + ۲E(S_{m,m})\int_{\circ}^{m} y\, g(\circ,y)dy}{۱ - G(\circ,m)}. \end{aligned}$$

بنابراین برای $w > m$،

$$\begin{aligned} E(S^{۲}_{w,m}) &= \int_{\circ}^{m} y^{۲}\, g(w-m,y)dy + ۲E(S_{m,m})\int_{\circ}^{m} y\, g(w-m,y)dy \\ &+ \quad E(S^{۲}_{m,m}) \times G(w-m,m). \end{aligned} \tag{۹}$$

با استفاده از رابطه $Var(S_{w,m}) = E(S^{۲}_{w,m}) - \big[E(S_{w,m})\big]^{۲}$، مقدار واریانس متغیر تصادفی $S_{w,m}$ محاسبه می‌شود.

۴ احتمالات ورشکستگی بر اساس خسارت‌های با توزیع نمایی

احتمال ورشکستگی زمان نامتناهی در مدل بیمه اتکایی مازاد خسارت با استفاده از فرمول رلسکی و همکاران (۱۹۹۹) و بازیاری (۱۳۹۶) وقتی‌که خسارت‌های رخ داده شده از طرف بیمه‌گذاران دارای توزیع نمایی باشند، بدست آمده و نیز امید ریاضی و واریانس متغیر تصادفی $S_{w,m}$ محاسبه شده‌اند.

قضیه ۱. اگر متغیرهای تصادفی $X_{۱}, \cdots, X_{N(t)}$ دارای توزیع نمایی با پارامتر μ باشند. آنگاه مقدار احتمال ورشکستگی زمان نامتناهی با سرمایه اولیه u برابر با $\psi(u) = \big(۱ - \frac{\eta}{\mu}\big)e^{-\eta u}$، است، که در آن مقدار η از حل معادله (رلسکی و همکاران ، ۱۹۹۹)

$$\frac{\mu}{\mu - \eta}\, L_T(c\eta) = ۱, \tag{۱۰}$$

بدست می‌آید، که در آن $L_T(.)$ تبدیل لاپلاس توزیع زمان بین خسارت‌های رخ داده شده است.

قضیه ۲. اگر $R(T_u)$ فرآیند مخاطره جمعی شرکت بیمه و متغیرهای تصادفی اندازه‌های خسارت $X_1, \dots, X_{N(t)}$، دارای توزیع نمایی با پارامتر μ باشند، آنگاه

الف− مقدار تابع کسری ورشکستگی با سرمایه اولیه u عبارت است از

$$G(u,y) = (1 - e^{-\mu y})\psi(u). \tag{11}$$

ب −با توجه به فرمول رلسکی و همکاران (۱۹۹۹) در قضیه۱، احتمال ورشکستگی زمان نامتناهی عبارت است ا۸

$$\psi_m(u) = \left(1 - \frac{\eta}{\mu}\right)e^{-\eta(u-m)} \times \frac{1}{1 + \frac{\eta}{\mu}(e^{\mu m} - 1)}. \tag{12}$$

برهان: الف. براحتی دیده می‌شود که

$$\begin{aligned} \frac{G(u,y)}{\psi(u)} &= 1 - P(|R(T_u)| \geq y | T_u < \infty, R(0) = u) \\ &= 1 - P(X_n \geq y) \times \int_0^\infty f_{R(T_u)}(x)dx, \end{aligned}$$

می‌باشد، که در آن $f_{R(T_u)}(x)$ تابع چگالی فرآیند مخاطره در نقطه x است. با توجه به اینکه مقدار انتگرال در رابطه بالا عدد یک است، بنابراین $\frac{G(u,y)}{\psi(u)} = 1 - e^{-\mu y}$ بوده و قسمت الف قضیه اثبات می‌شود.

ب. احتمال ورشکستگی زمان نامتناهی $\psi_m(u)$ بدست آمده در رابطه (۶) را با استفاده از (۷) بازنویسی کرده و در نتیجه قسمت ب قضیه براحتی اثبات می‌شود.

احتمال ورشکستگی داده شده در رابطه (۸)، بر حسب مقدار η ایی است که از رابطه (۱۰) بدست می‌آید. اگر $m = 0$ باشد، باز هم $\psi_m(0)$ با مقدار احتمال ورشکستگی در مدل کلاسیک برابر است. لازم به توضیح است که چون $\psi(u)$ تابعی از u است، بنابراین از قضیه ۱ نتیجه می‌شود که مشتق تابع کسری ورشکستگی $G(u,y) = (1 - e^{-\mu y})\psi(u)$ است.

قضیه ۳. اگر $R(T_u)$ فرآیند مخاطره جمعی شرکت بیمه، متغیرهای تصادفی اندازه‌های خسارت $X_1, \cdots X_{N(t)}$، دارای توزیع نمایی با پارامتر μ و فرآیند تعداد خسارت‌های رخداده شده از طرف بیمه‌گذاران تا زمان t دارای فرآیند پواسون با پارامتر λ باشد، آنگاه احتمال ورشکستگی زمان نامتناهی $\psi_m(u)$ بدست آمده در رابطه (۶) عبارت است از

$$\psi_m(u) = \frac{\lambda \mu}{c}\, e^{-(\frac{1}{\mu} - \frac{\lambda}{c})(u-m)} \times \frac{e^{-\mu m}}{1 - \frac{\lambda \mu}{c}\,(1 - e^{-\mu m})}. \tag{13}$$

برهان: بازیاری (۱۳۹۶) نشان داد که اگر فرآیند تعداد خسارت‌های رخداده شده از طرف بیمه‌گذاران تا زمان t دارای فرآیند پواسون با پارامتر λ باشد و سرمایه اولیه u به اندازه کافی بزرگ باشد، تقریب احتمال ورشکستگی زمان نامتناهی عبارت است از

$$\psi(u) \sim \frac{c-\lambda\,\mu}{\lambda\,M'_X(R)-c}\,e^{-R\,u}, \tag{۱۴}$$

که در آن $M_X(R)=E(e^{R\,X})$، $M'_X(R)=\frac{d}{d\,R}M_X(R)$ و R نمای لاندبرگ بوده که از رابطه $\frac{\lambda}{c}\int_{\circ}^{\infty}e^{R\,x}(۱-F(x))dx=۱$ بدست می‌آید. همچنین بازیاری (۱۳۹۶) نشان داد که اگر خسارت‌های رخداده شده از طرف بیمه‌گذار ان دارای توزیع نمایی با میانگین μ باشند، آنگاه برای هر مقدار $u\geq\circ$، تقریب احتمال ورشکستگی زمان نامتناهی رابطه (۱۴) با مقدار

$$\psi(u)=\frac{\lambda\mu}{c}\,e^{-(\frac{۱}{\mu}-\frac{\lambda}{c})u}, \tag{۱۵}$$

برابر است. بنابراین احتمال ورشکستگی زمان نامتناهی $\psi_m(u)$ در رابطه (۶) با توجه به روابط (۷) و (۹) بصورت

$$\psi_m(u)=\frac{\lambda\mu}{c}\,e^{-(\frac{۱}{\mu}-\frac{\lambda}{c})(u-m)}\times\frac{e^{-\mu\,m}}{۱-\frac{\lambda\,\mu}{c}\,(۱-e^{-\mu\,m})},$$

محاسبه و قضیه اثبات می‌شود.

متغیر تصادفی مقدار کل پرداختی بیمه‌گر اتکایی بر اساس خسارت‌های نمایی: وقتی‌که خسارت‌ها دارای توزیع نمایی باشند، برای محاسبه مقادیر امید ریاضی و واریانس متغیر تصادفی $S_{w,m}$، از نتایج بدست آمده در قضایای ۱ و ۲ استفاده می‌شود. با توجه به اینکه $G(u,y)=(۱-e^{-\mu\,y})\psi(u)$ و $g(u,y)=\mu\,e^{-\mu\,y}\psi(u)$، بنابراین طبق (۵)

$$\begin{aligned}E(S_{w,m}) &= \int_{\circ}^{m} y\,\psi(u-m)\mu\,e^{-\mu\,y}dy\\ &+ \psi(u-m)(۱-e^{-\mu\,m})\frac{\int_{\circ}^{m} y\,\mu\,e^{-\mu\,y}\psi(\circ)dy}{۱-\psi(\circ)+\psi(\circ)\,e^{-\mu\,m}}\\ &= (\mu-\eta)e^{-\lambda\,u+\lambda\,m+\mu\,m}\times\frac{۱}{\mu-\eta+\eta\,e^{\mu m}}.\end{aligned} \tag{۱۶}$$

می‌باشد. ملاحظه می‌شود که مقدار $E(S_{w,m})$ برای حسب پارامتر μ یعنی میانگین توزیع زمان بین خسارت‌ها

است. از طرف دیگر

$$E(S^2_{m,m}) = \psi(0) \times \frac{2(\frac{1}{\mu} + E(S_{m,m}))\int_0^m y\,\mu\, e^{-\mu\, y} dy - m^2\, e^{-\mu\, m}}{1 - \psi(0)(1 - e^{-\mu\, m})}, \qquad (17)$$

است. بنابراین طبق رابطه (۹) تساوی

$$\begin{aligned} E(S^2_{w,m}) &= \psi(u-m)\int_0^m y^2\,\mu\, e^{-\mu\, y} dy \\ &+ 2\psi(u-m)E(S_{m,m})\int_0^m y\,\mu\, e^{-\mu\, y} dy \\ &+ \psi(u-m)E(S^2_{m,m})(1 - e^{-\mu\, m}), \end{aligned}$$

برقرار است و براحتی مقدار واریانس متغیر تصادفی $S_{w,m}$ محاسبه می‌شود.

۵ مثال‌های عددی

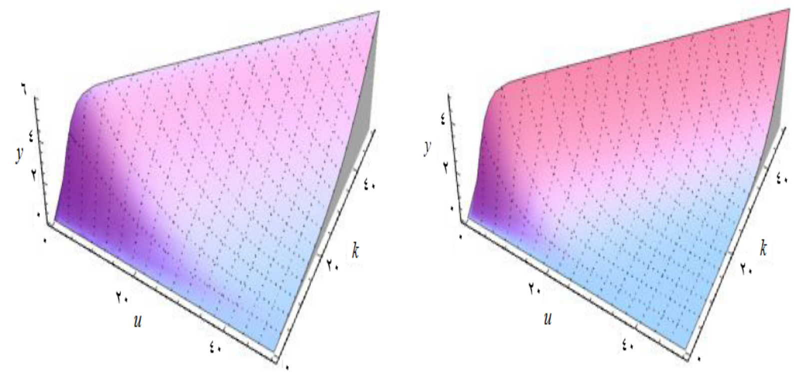
مثال ۱. فرض کنید که خسارت‌ها و زمان‌های رخداد آنها دارای توزیع نمایی با میانگین ۱ باشند. سربار ایمنی ۰/۲ و حق بیمه دریافتی از هر بیمه‌گذار برابر با ۱/۲ است. مقادیر عددی امید ریاضی و واریانس متغیر تصادفی $S_{w,m}$ برای مقادیر مختلف m و w محاسبه شده و در جدول ۱ آورده شده‌اند. همان‌طور که ملاحظه می‌شود، اولاً مقادیر

جدول ۱. امید ریاضی و واریانس متغیر تصادفی $S_{w,m}$ برای مقادیر مختلف m, w

		w			
	m	۱۰	۱۵	۲۵	۵۰
امید ریاضی	$0/1w$	۰/۱۰۴	۰/۱۱۰	۰/۰۵۹	۰/۰۰۲۶
	$0/25w$	۰/۷۲۴	۰/۶۰۹	۰/۲۱۵	۰/۰۰۹۶
	$0/5w$	۲/۰۱۷	۱/۴۲۲	۰/۶۲۳	۰/۰۷۷۵
	$0/75w$	۳/۲۷۲	۱/۶۷۶	۱/۷۶۴	۰/۶۲۳
	$0/9w$	۴/۲۲۵	۳/۸۹۴	۳/۲۹۶	۲/۱۷۳
	w	۴/۹۹۶	۵	۵	۵
واریانس	$0/1w$	۰/۱۴۹	۰/۳۱۴	۰/۳۷۳	۰/۰۲۹
	$0/25w$	۴/۰۶۰	۵/۴۶۶	۲/۴۶۱	۰/۱۱۵
	$0/5w$	۱۸/۳۳۵	۱۴/۸۹۱	۷/۰۸۱	۰/۹۲۳
	$0/75w$	۲۸/۲۰۶	۲۴/۹۴۰	۱۸/۰۶۲	۷/۰۸۱
	$0/9w$	۳۲/۷۱۸	۳۱/۵۶۲	۲۸/۶۸۷	۲۱/۳۵۳
	w	۳۴/۹۲۸	۳۴/۹۹۹	۳۴/۹۹۹	۳۴/۹۹۹

امید ریاضی و واریانس متغیر تصادفی $S_{w,m}$ برای مقادیر بزرگ w که $m = w$ باشد، ثابت هستند و ثانیاً با افزایش مقدار m این مقادیر در حال افزایش می‌باشند (یعنی صعودی بودن توابع در m)، که این خاصیت نیز با

یافتن مشتق توابع داده شده در روابط (۱۶) و (۱۷) نسبت به m بدست خواهد آمد و البته اثبات آن بسیار طولانی و پیچیده است. همچنین نمودارهای امید ریاضی و واریانس متغیر تصادفی $S_{w,m}$ بر حسب توابعی از m و w در شکل ۲ رسم شده‌اند. دیده می‌شود که واریانس m و w برای مقادیر بزرگتر از m و w دارای دم بزرگتری نسبت به امید ریاضی آن است.



(ب) (الف)

شکل ۲. الف- امید ریاضی متغیر تصادفی $S_{w,m}$، ب- واریانس متغیر تصادفی $S_{w,m}$

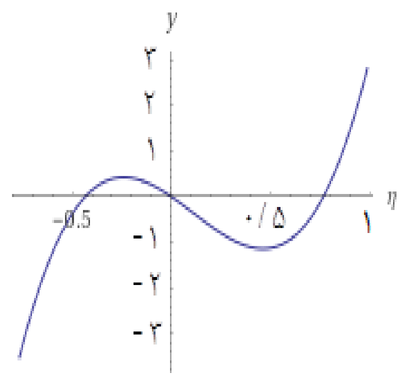
مثال ۲. فرض کنید متغیرهای تصادفی اندازه‌های خسارت $X_۱, X_۲, \cdots$، دارای توزیع نمایی با پارامتر μ و زمان بین ورود خسارت‌ها متغیر T و دارای توزیع لیندلی با پارامتر γ باشند. آنگاه تابع چگالی متغیر T عبارت است از

$$f_T(t) = (۱+t)e^{-\gamma t}, \qquad t > ۰, \gamma > ۰.$$

ویژگی‌های ریاضی مانند گشتاورها، تابع توزیع، تابع مشخصه، تابع نرخ خطر و برآورد ماکسیمم درستنمایی و نیز کاربرد توزیع لیندلی توسط قیتانی و همکاران (۲۰۰۸) مورد بررسی قرار گرفته است.

براحتی دیده می‌شود که امید ریاضی توزیع لیندلی با پارامترγ مقدار $E(T) = \frac{\gamma+۲}{\gamma(\gamma+۱)}$ و تبدیل لاپلاس آن $L_T(s) = \frac{\gamma^۲(\gamma+s+۱)}{(۱+\gamma)(\gamma+s)^۲}$ است. فرض کنید $\mu = ۱$ ، $\gamma = ۲$ و سربار ایمنی ۳ باشد، آنگاه $c = ۶$ است. بنابراین طبق رابطه (۱۰) تساوی $\frac{۲\eta+۱}{(۳\eta+۱)^۲} \times \frac{۱}{۱-\eta} = ۱$ برقرار است.

نمودار این تابع در شکل ۴ رسم شده است. ریشه‌های این معادله $\eta = ۰, \frac{۱}{۶}+\frac{\sqrt{۱۳}}{۶}, \frac{۱}{۶}-\frac{\sqrt{۱۳}}{۶}$ هستند. ریشه $\eta = \frac{۱}{۶}-\frac{\sqrt{۱۳}}{۶}$ غیر قابل قبول است، زیرا با این مقدار احتمال رابطه (۸)، منفی خواهد شد. با جایگذاری $\mu = ۱$



شکل ۳. نمودار معادله درجه سوم $۱ = \frac{۲\eta+۱}{(۳\eta+۱)^۲} \times \frac{۱}{۱-\eta}$

در رابطه (۸)، برای هر مقدار از پیش تعیین شده m و n،

$$\psi_m(u) = (۱-\eta)e^{-\eta(u-m)} \times \frac{۱}{۱+\eta(e^{\mu m}-۱)}, \qquad (۱۸)$$

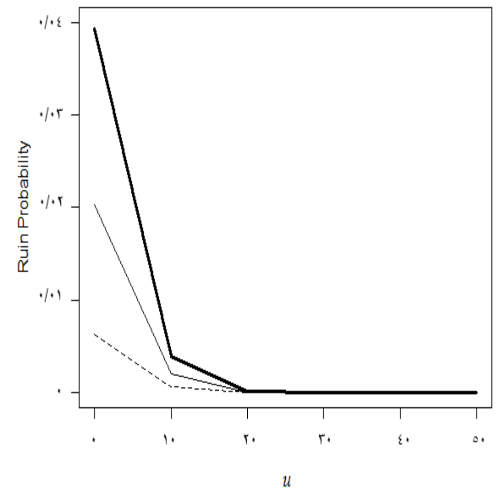
است. برای ریشه $\eta = ۰$ مقدار احتمال ورشکستگی برابر با یک خواهد بود. برای مقادیر مختلف m و u، احتمالات ورشکستگی زمان نامتناهی رابطه (۱۸) محاسبه و در جدول ۲ آمده‌اند. همچنین نمودار تابع $\psi_m(u)$ برای مقادیر $m = ۲, ۵, ۱۰$ رسم و در شکل ۴ نشان داده شده‌اند. در شکل ۴، نمودار $\psi_۲(u)$ با خط پر رنگ، $\psi_۵(u)$ با خط کم رنگ و $\psi_{۱۰}(u)$ با خط نقطه چین مشخص شده‌اند و ملاحظه می‌شود که مقدار احتمال $\psi_m(u)$ با افزایش سرمایه اولیه و افزایش مقدار m نزولی است.

مثال ۳. با فرض برقراری فرضیات مثال ۱، اگر فرآیند تعداد خسارت‌های رخداده شده از طرف بیمه‌گذار ان تا زمان t دارای فرآیند پواسون با پارامتر ۱ و $\psi_{m_۰}(u)$ نمادی برای احتمال بدست آمده در رابطه (۹) باشد، آنگاه

$$\psi_{m_۰}(u) = \frac{e^{\frac{-۱}{۶}(۵u+m)}}{۵+e^{-m}}, \qquad (۱۹)$$

است. اگر تعداد خسارت‌های رخداده شده از طرف بیمه‌گذار ان تا زمان t دارای فرآیند پواسون با پارامتر ۳ و $\psi_{m_۱}(u)$ نمادی برای احتمال بدست آمده در رابطه (۹) باشد، آنگاه

$$\psi_{m_۱}(u) = \frac{e^{-۰/۵(u+m)}}{۱+e^{-m}}, \qquad (۲۰)$$



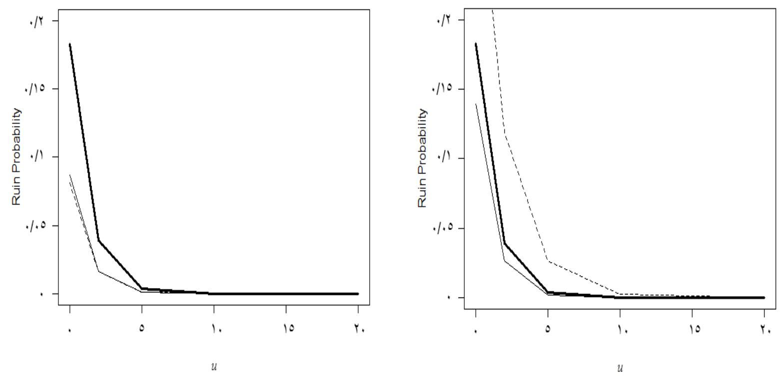
شکل ۴. احتمال ورشکستگی زمان نامتناهی بر حسب سرمایه اولیه برای $m = ۲, ۵, ۱۰$

است. برای مقادیر مختلف m و u، نتایج عددی احتمالات در روابط (۳.۲) و (۱۰) محاسبه و نتایج در جدول ۲ ارایه شده‌اند. همچنین برای $m = ۲, ۵, ۱۰, ۲۰$، نمودارهای احتمالات $\psi_m(u)$، $\psi_{m_0}(u)$ و $\psi_{m_1}(u)$ رسم و در

جدول ۲. احتمالات ورشکستگی زمان نامتناهی $\psi_m(u)$، $\psi_{m_0}(u)$ و $\psi_{m_1}(u)$

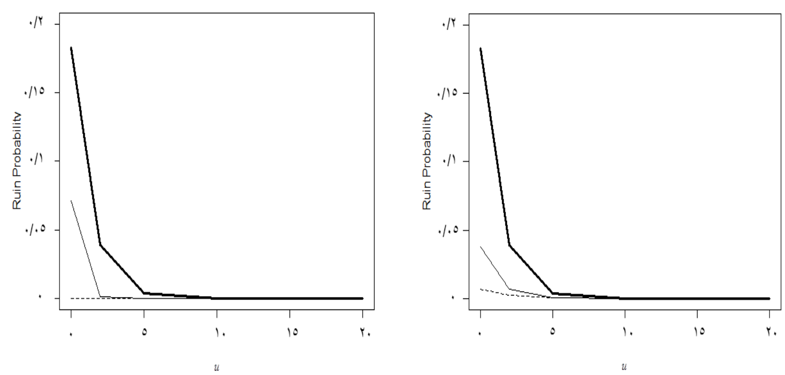
	m	u = ۲	۵	۱۰	۲۰
$\psi_m(u)$	۲	۰/۳۹۳۰	۰/۰۰۳۹	۸/۴۷۶۲e − ۰۵	۳/۹۳۲۸e − ۰۸
	۵	۰/۲۰۳۰	۰/۰۰۲۰	۴/۳۸۴۷e − ۰۵	۲/۰۳۳۹e − ۰۸
	۱۰	۰/۰۰۶۳	۰/۰۰۶۰	۱/۳۷۴۵e − ۰۵	۶/۳۷۶۱e − ۰۹
	۲۰	۰/۰۰۶۰	۶/۴۶۶e − ۰۵	۱/۳۴۵۳e − ۰۶	۶/۲۴۰۶e − ۱۰
	۳۰	۶/۱۱۴۹e − ۰۵	۶/۱۱۳۷e − ۰۶	۱/۳۱۶۷e − ۷	۶/۱۰۷۹e − ۱۱
	۵۰	۵/۵۸۷۶e − ۰۷	۵/۸۵۶۵e − ۰۸	۱/۲۶۱۳e − ۰۹	۵/۸۵۰۹e − ۱۳
$\psi_{m_0}(u)$	۲	۰/۰۲۶۳	۰/۰۰۲۱	۳/۳۵۳۸e − ۰۵	۸/۰۶۱۶e − ۰۹
	۵	۰/۰۱۶۳	۰/۰۰۱۳	۲/۰۸۶۴e − ۰۵	۵/۰۱۵۲e − ۰۹
	۱۰	۰/۰۰۷۱	۰/۰۰۵۰	۹/۰۷۹۹e − ۰۶	۲/۱۸۲۵e − ۰۹
	۲۰	۰/۰۰۱۳	۰/۰۰۱۰	۱/۷۱۴۹e − ۰۶	۴/۱۲۲e − ۱۰
	۳۰	۰/۰۰۰۲	۲/۰۸۹۲e − ۵	۳/۲۳۹۱e − ۰۷	۷/۷۸۶۰e − ۱۱
	۵۰	۹/۰۷۹۹e − ۰۶	۷/۴۵۳۳e − ۰۷	۱/۱۵۵e − ۰۸	۲/۷۷۷۵e − ۱۲
$\psi_{m_1}(u)$	۲	۰/۱۱۹۹	۰/۰۲۶۵	۰/۰۰۲۱	۱/۴۷۱۰e − ۰۵
	۵	۰/۰۲۹۰	۰/۰۰۶۶	۰/۰۰۵	۳/۷۰۱۷e − ۰۶
	۱۰	۰/۰۰۲۴	۰/۰۰۵۰	۴/۵۳۹۷e − ۰۵	۳/۰۵۸۸e − ۰۷
	۲۰	۰/۰۰۱۳	۳/۷۲۶۶e − ۰۶	۳/۰۵۹۰e − ۰۷	۲/۰۶۱۱e − ۰۹
	۳۰	۰/۰۰۲۸	۲/۵۰۹e − ۰۸	۲/۰۶۱۱e − ۰۹	۱/۳۸۸۷e − ۱۱
	۵۰	۹/۰۷۹۹e − ۰۶	۱/۱۳۹۹e − ۱۲	۹/۳۵۷۶e − ۱۴	۹/۰۷۹۹e − ۰۶

شکل‌های ۵ و ۶ نشان داده شده‌اند. در این شکل‌ها، نمودار $\psi_m(u)$ با خط پر رنگ، $\psi_{m_0}(u)$ با خط کم رنگ و $\psi_{m_1}(u)$ با خط نقطه چین مشخص شده‌اند. برای هر مقدار m با افزایش سرمایه اولیه، مقدار احتمال ورشکستگی



(ب) (الف)

شکل ۵. احتمال ورشکستگی زمان نامتناهی بر حسب سرمایه اولیه برای الف- $m = ۲$ و ب- $m = ۵$



(ب) (الف)

شکل ۶. احتمال ورشکستگی زمان نامتناهی بر حسب سرمایه اولیه برای الف- $m = ۱۰$ و ب- $m = ۲۰$

کمتر شده و همچنین ملاحظه می‌شود که برای $m = ۲$، اگر فرآیند تعداد خسارت‌های رخداده شده از طرف بیمه‌گذاران دارای فرآیند پواسون با پارامتر ۱ باشد، آنگاه نامساوی $\psi_{m_0}(u) < \{\psi_m(u), \psi_{m_1}(u)\}$ برقرار می‌باشد. اما برای مقادیر دیگر از m، مقدار احتمال ورشکستگی زمان نامتناهی $\psi_{m_1}(u)$ از بقیه احتمالات کمتر است. اگر چه با

افزایش سرمایه اولیه، هر سه احتمال تقریباً با هم برابر و به سمت صفر میل می‌کنند.

مثال ۴. (آسموسن ، ۲۰۱۰) یک شرکت بیمه کامیون‌های بارکش یک تنی۶ شرکت باربری را بیمه کرده است. تعداد کامیون‌های بارکش هر۶ شرکت در۱۰ سال گذشته و نیز مجموع اندازه خسارت‌های رخداده شده برای کامیون‌های بارکش هر ۶ شرکت بر حسب ۱۰۰ دلار در جدول ۳ آورده شده‌اند. حق بیمه دریافتی از هر بیمه‌گذار ۹۲۰ دلار، فرآیند

جدول ۳. تعداد کامیون‌های بارکش ۶ شرکت باربری و مجموع اندازه خسارت‌های رخ داده شده در ۱۰ سال گذشته

		سال									
موضوع	تعداد شرکت‌ها	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
تعداد کامیون‌ها	۱	۱۰	۱۰	۱۲	۱۲	۱۵	۱۵	۱۵	۱۳	۹	۹
	۲	۵	۵	۵	۵	۵	۵	۵	۵	۵	۵
	۳	۲	۲	۳	۳	۳	۳	۳	۳	۳	۳
	۴	۱۵	۲۰	۲۰	۲۰	۲۱	۲۲	۲۲	۲۲	۲۵	۲۵
	۵	۵	۵	۵	۳	۳	۳	۳	۳	۳	۵
	۶	۱۰	۱۰	۱۰	۱۰	۱۰	۱۰	۱۰	۱۲	۱۲	۱۲
مجموع خسارت‌ها	۱	۷۴	۵۰	۱۸۰	۴۳	۱۷۹	۱۴۰	۹۵	۱۴۹	۲۰	۸۱
	۲	۵۲	۱۱۱	۸۳	۷۴	۸۷	۸۵	۴۰	۷۱	۹۳	۸۳
	۳	۴۰	۲۸	۶۰	۵۹	۴۳	۷۴	۶۱	۴۶	۷۲	۸۱
	۴	۱۷۱	۸۲	۱۰۰	۱۱۶	۱۵۳	۴۴	۱۳	۳۱	۱۱۰	۲۵۲
	۵	۴۹	۱۳۲	۷۴	۳۷	۲۱	۵۴	۲۷	۴۳	۵۳	۱۰۲
	۶	۱۲۶	۱۴۸	۱۲۸	۱۵۱	۱۶۵	۱۲۸	۱۰۰	۶۵	۲۳۳	۲۴۶

تعداد خسارت‌ها در یک سال پواسن با میانگین ۲ و متغیرهای تصادفی اندازه‌های خسارت دارای تابع توزیع نمایی با میانگین۴۰۰ دلار می‌باشند. در برازش توزیع پواسن برای تعداد خسارت‌ها در سطح معنی‌داری ۰/۰۵، مقدار آماره آزمون عدد ۷/۸۲ و $\chi^{۲}_{۰/۹۵}(۵) = ۱۱/۱$ است و بنابراین فرضیه پواسن برای تعداد خسارت‌ها پذیرفته می‌شود. در نتیجه احتمال ورشکستگی زمان نامتناهی $\psi_m(u)$، عبارت است از

$$\psi_m(u) = ۰/۸۶۹۵\, e^{-۰/۰۰۰۳۲۶(u-m)} \times \frac{e^{-۴۰۰m}}{۱ - ۰/۸۶۹۵(۱ - e^{-۴۰۰m})}.$$

دیده می‌شود که برای هر مقدار سرمایه اولیه و m، مقدار احتمال ورشکستگی زمان نامتناهی $\psi_m(u)$ برابر صفر خواهد بود.

مثال ۵. در یک بررسی در مورد شرکت بیمه معلم شهرستان بوشهر مشخص شده که برخی از کارکنان ۷ ارگان، وسایل نقلیه خود را در این شرکت بیمه کرده‌اند. ارگان‌ها شامل دانشگاه خلیج فارس، دانشگاه آزاد، دانشگاه پیام نور، اداره آب و فاضلاب، اداره برق، اداره گاز و اداره آموزش و پرورش بودند. تعداد وسایل نقلیه و مجموع اندازه خسارت‌های رخداده شده هر کدام از این ۷ ارگان در ۵ سال گذشته در جدول ۴ آورده شده‌اند.

حق بیمه دریافتی از هر بیمه‌گذار ۱۴۰۰۰۰۰ تومان، فرآیند تعداد خسارت‌ها در یک سال پواسن با میانگین ۲ و متغیرهای تصادفی اندازه‌های خسارت دارای تابع توزیع نمایی با میانگین ۶۰۰۰۰۰ تومان می‌باشند. در برازش توزیع

جدول ۴. تعداد وسایل نقلیه و مجموع اندازه خسارت‌های رخداده شده در ۵ سال گذشته

موضوع	نام ارگان	سال				
		۱	۲	۳	۴	۵
تعداد وسایل نقلیه	دانشگاه خلیج فارس	۲۴	۲۶	۲۲	۱۹	۲۳
	دانشگاه آزاد	۱۶	۱۸	۱۴	۱۳	۱۴
	دانشگاه پیام نور	۱۷	۱۷	۲۰	۱۹	۲۱
	اداره آب و فاضلاب	۹	۸	۱۰	۸	۹
	اداره گاز	۷	۷	۶	۸	۶
	اداره برق	۹	۸	۵	۷	۶
	اداره آموزش و پرورش	۲۷	۳۲	۳۵	۳۷	۳۹
مجموع خسارت‌ها	دانشگاه خلیج فارس	۶۰۰۰	۵۴۰۰	۵۳۰۰	۶۱۰۰	۵۵۰۰
	دانشگاه آزاد	۵۱۰۰	۵۳۰۰	۶۲۰۰	۵۸۰۰	۶۳۰۰
	دانشگاه پیام نور	۵۰۰۰	۴۸۰۰	۴۷۵۰	۵۰۰۰	۶۳۰۰
	اداره آب و فاضلاب	۳۲۰۰	۳۰۰۰	۳۱۰۰	۳۲۰۰	۳۰۰
	اداره گاز	۳۴۰۰	۳۳۰۰	۲۹۰۰	۲۸۵۰	۲۷۰۰
	اداره برق	۲۸۰۰	۳۰۰۰	۲۷۰۰	۲۶۵۰	۲۸۰۰
	اداره آموزش و پرورش	۷۴۰۰	۷۰۰۰	۶۸۰۰	۷۲۰۰	۷۱۰۰

پواسن برای تعداد خسارت‌ها در این مثال در سطح معنی‌داری ۰/۰۵، دیده می‌شود که مقدار آماره آزمون عدد ۴/۷۵ و $\chi^{۲}_{۰/۹۵}(۶) = ۱۲/۶$ است و بنابراین فرضیه پواسن برای تعداد خسارت‌ها پذیرفته می‌شود. در نتیجه احتمال ورشکستگی زمان نامتناهی $\psi_m(u)$ ، عبارت است از

$$\psi_m(u) = ۱/۱۴۲۸\, e^{-۰/۰۰۰۰۰۰۰۲۴۷(u-m)} \times \frac{e^{-۶۰۰۰۰۰m}}{۱ - ۱/۱۴۲۸(۱ - e^{-۶۰۰۰۰۰m})}.$$

دیده می‌شود که برای هر مقدار سرمایه اولیه و m، مقدار احتمال ورشکستگی زمان نامتناهی $\psi_m(u)$ برابر صفر خواهد بود.

بحث و نتیجه‌گیری

در این مقاله، احتمال ورشکستگی زمان نامتناهی در مدل مخاطره بیمه اتکایی مازاد خسارت با افزایش سرمایه، برای خسارت‌های دارای توزیع نمایی محاسبه شد. همچنین در این مدل، متغیر تصادفی مقدار کل مبلغ پرداختی از طرف بیمه‌گر اتکایی مورد بررسی قرار گرفت و نتایج برای توزیع‌های لیندلی و نمایی با داده‌های عددی مورد بررسی قرار گرفت.

تقدیر و تشکر

نویسندگان مقاله از سردبیر محترم مجله علوم آماری، داوران محترم و ویراستار مجله که پیشنهادات ارزشمند آنها موجب ارتقای سطح کیفی مقاله شدند، کمال تشکر و قدردانی را دارند. نویسنده اول، مقاله را به دختر عزیز و دوست داشتنی‌اش آویسا تقدیم می‌کند.

مراجع

بازیاری، ا و پرهام، غ. ع. (۱۳۸۷)، پیدایش فرآیندهای مخاطره و بررسی مدل‌های مربوط به آن برای محاسبه احتمالات ورشکستگی، مجموعه مقالات نهمین کنفرانس آمار ایران، دانشگاه اصفهان، ۴۶-۶۱.

بازیاری، ا، (۱۳۹۱)، احتمال ورشکستگی فرآیند مخاطره انفرادی شرکت بیمه با خسارت‌های وابسته، مجله علوم آماری، ۶(۱)، ۳۷-۲۱.

بازیاری، ا، (۱۳۹۶)، تحلیل احتمال ورشکستگی زمان نامتناهی در مدل مخاطره جمعی، مجله علوم آماری، ۱۱(۱)، ۳۶-۱۷.

رنگینیان، ز، به فروز، م. و بازیاری، ا.، (۱۳۹۷)، نقدی بر استفاده از خسارت‌های دارای توزیع پارتو در مدل‌های مخاطره شرکت بیمه، مجله علوم آماری، ۱۲(۲)، ۴۲۹-۴۴۷.

Albrecher, H. and Kortschak, D. (2009), On Ruin Probability and Aggregate Claim Representations for Pareto Claim Size Distributions, *Insurance Mathematics and Economics*, **45**, 362–373.

Asmussen, S. (2010), *Ruin Probability*, World Scientific, Singapore.

Asmussen, S. and Binswanger, K. (1997), Simulation of Ruin Probability for Subexponential Claims, *Astin Bulletin*, **27**(2), 297-318.

Bazyari, A and Roozegar R. (2019), Finite Time Ruin Probability and Structural Density Properties in the Presence of Dependence in Insurance Risk Model, *Communications in Statistics, Theory and Methods*, **48**(5), 1284–1304.

Cao, J., Peng, X. C. and Hu, Y. J. (2016), Optimal Time-Consistent Investment and Reinsurance Strategy for Mean-Variance Insurers under the Inside Information, *Acta Mathematicae Applicatae Sinica*, English Series, **32**(4), 1087–1100.

Dickson, D. C. M. (2005), *Insurance Risk and Ruin*, Cambridge University Press, Cambridge.

Dickson, D. C. M. and Waters, H. R. (1996), Reinsurance and Ruin, *Insurance Mathematics and Economics*, **19**, 61–80.

Dickson, D. C. M. and Waters, H. R. (2004), Some Optimal Dividends Problems, *ASTIN Bulletin*, **34**(1), 49–74.

Eisenberg, J. and Schmidli, H. (2011), Minimising Expected Discounted Capital Injections by Reinsurance in a Classical Risk Model, *Scandinavian Actuarial Journal*, **3**, 155–176.

Ghitany, M. E., Atieh, B. and Nadarajah, S. (2008), Lindley Distribution and its Application, *Mathematics and Computers in Simulation*, **78**, 493–506.

Kaas, R., Goovaerts, M. J., Dhaene, J. and Denuit, M. (2008), *Modern Actuarial Risk Theory, Using R*, Second Edition, Springer-Verlag Berlin Heidelberg.

Klugman, S. A., Panjer, H. H. and Willmot, G. E. (2008), *Loss Models From Data to Decisions*, Third Edition, Wiley.

Lefevre, C. and Loisel, S. (2008), On Finite-Time Ruin Probabilities for Classical Risk Models, *Scandinavian Actuarial Journal*, **1**, 41–60.

Lefevre, C. and Loisel, S. (2009), Finite Horizon Ruin Probabilities for Independent or Dependent Claim Amounts, *Methodology and Computing in Applied Probability*, **11**(3), 425–441.

Rolski, T., Schmidli, H., Schmidt, V. and Teugels, J. (1999), *Stochastic Processes for Insurance and Finance*, John Wiley and Sons, New York.

Santana, D. J., González-Hernández, J., and Rincón, L. (2016), Approximation of the Ultimate Ruin Probability in the Classical Risk Model Using Erlang Mixtures, *Methodology and Computing in Applied Probability*, **19**(3), 775–798.

Tsitsiashvili, G. Sh. (2009), Computing Ruin Probability in the Classical Risk Model, *Journal Automation and Remote Control*, **70**(12), 2109–2115.

Willmot, G. (2002), Compound Geometric Residual Lifetime Distributions and the Deficit at Ruin, *Insurance Mathematics and Economics*, **30**, 421–438.

Willmot, G., Dickson. D. C. M., Drekic, S. and Stanford, D. A. (2004), The Deficit at Ruin in the Stationary Renewal Risk Model, *Scandinavian Actuarial Journal*, **4**, 241–255.

Xu, L., Wang, M. and Zhang, B. (2018), Minimizing Lundberg Inequality for Ruin Probability under Correlated Risk Model by Investment and Reinsurance, *Journal of Inequalities and Applications*, https//doi.org/10.1186/s13660-018-1838-0,2018244.

Yuanjiang, H., Xucheng, L. and Zhang, J. (2003), Some Results of Ruin Probability for the Classical Risk Process, *Journal of Applied Mathematics and Decision Sciences*, **7**(3), 133–146.