Journal of Statistical Sciences, Spring and Summer, 2022
Vol. 16, No. 1, pp 91-108
DOI: 10.29252/jss.16.1.91

Stochastic Comparison of $(n-1)$-out-of-n Systems from Multiple-Outlier Modified Proportional Hazard Rates Components in terms of Hazard Rate Order

Hosseinzadeh, A.[1], Barmalzan, G.[2] Sattari, M.[1]
[1]Department of Mathematics, University of Zabol, Zabol, Iran.
[2]Department of Statistics, University of Zabol, Zabol, Iran.

Corresponding author: A. Hosseinzadeh, `hosseinzadeh@uoz.ac.ir`

Received: 23 April 2021 **Revised:** 30 January 2022 **Accepted and Published Online:** 12 February 2022.

Introduction

Fail-safe systems ($(n-1)$-out-of-n Systems) are commonly used in many day-to-day applied structures. A fail-safe is a special design feature that will respond when a failure occurs so that no harm happens to the system itself. The brake system in a train is an excellent example of a fail-safe system in which the brakes are held in off-position by air pressure. If a brake line splits or a carriage becomes separated, the air pressure will be lost; in that case, the brakes will be applied by a local air reservoir. However, another classic example of a fail-safe system is an elevator in which brakes are held off brake pads by tension, and if the tension gets lost, the brakes latch on the rails in the shaft, thus preventing the elevator from falling off. There are many other such fail-safe systems in common use. Balakrishnan et al. (2015) established necessary and sufficient conditions for comparing two fail-safe systems with independent homogeneous exponential components in terms of mean residual life, dispersive, hazard rate and likelihood ratio orders. Their results specifically showed how an (n−١)-out-of-n system consisting of heterogeneous components with exponential lifetimes could be compared with any (m−١)-out-of-m system consisting of homogeneous components with exponential lifetimes. Similarly, Zhang et al. (2019) presented sufficient (and necessary) conditions on the lifetimes of components and their survival probabilities from random shocks for comparing the lifetimes of two fail-safe systems in terms of standard stochastic, hazard rate and likelihood ratio orders.

Cai et al. (2017) compared the hazard rate order of second-order statistics arising from two sets of independent multiple-outlier proportional hazard rates (PHR) samples.

Material and Methods
The comparison of essential characteristics associated with lifetimes of technical systems is an exciting topic in reliability theory since it usually enables us to approximate complex systems with simpler systems and subsequently obtain various bounds for important agreeing characteristics of the complex system. A convenient tool for this purpose is the theory of stochastic orderings.

Results and Discussion
This paper discusses the hazard rate order of $(n-1)$-out-of-n systems arising from two sets of independent multiple-outlier modified proportional hazard rates components. Under certain conditions on the parameters and the submajorization order between the sample size vectors, the hazard rate order between the $(n-1)$-out-of-n systems from multiple-outlier modified proportional hazard rates is established.

Conclusion
In this paper, we have presented sufficient conditions for the hazard rate order between fail-safe systems. It will be of great interest to generalize the current work from lifetimes of fail-safe systems to those of k-out-of-n. Another problem of interest will be to consider the setting of general systems with several subsystems having dependent components and extend the results established here to this general case. We are currently working on these problems and hope to report those findings in a future paper.

Keywords: Hazard rate ordering; Multiple-outlier modified proportional hazard rates model; Submajorization order; $(n-1)$-out-of-n systems.

Mathematics Subject Classification (2010): 60E15, 90B25.

مجله علوم آماری، بهار و تابستان ۱۴۰۱
جلد ۱۶، شماره ۱، ص ۹۱ – ۱۰۸
DOI: 10.29252/jss.16.1.91
مقاله پژوهشی

مقایسه تصادفی سیستم‌های $(n-۱)$ از n متشکل از مولفه‌های نرخ خطر متناسب اصلاح شده با چندین دورافتاده از لحاظ ترتیب نرخ خطر

علی‌اکبر حسین‌زاده[۱]، قباد برمال‌زن[۲]، مصطفی ستاری[۱]

[۱] گروه ریاضی، دانشگاه زابل

[۲] گروه آمار، دانشگاه زابل

نویسنده مسئول : علی‌اکبر حسین‌زاده، hosseinzadeh@uoz.ac.ir

تاریخ دریافت: ۱۴۰۰/۰۲/۰۳ تاریخ بازنگری: ۱۴۰۰/۱۱/۱۰ تاریخ پذیرش و انتشار: ۱۴۰۰/۱۱/۲۳

چکیده: در این مقاله، ترتیب نرخ خطر میان سیستم‌های $(n-۱)$ از n، متشکل از مولفه‌های نرخ خطر متناسب اصلاح شده مورد بحث قرار گرفته است. تحت شرایطی روی پارامترها و بیشاندن از پایین میان بردار اندازه نمونه‌ها، ترتیب نرخ خطر میان سیستم‌های $(n-۱)$ از n، متشکل از مولفه‌های نرخ خطر متناسب اصلاح شده با چندین دورافتاده، اثبات شده است.

واژه‌های کلیدی: ترتیب نرخ خطر، مدل نرخ خطر متناسب اصلاح شده با چندین دورافتاده، ترتیب بیشاندن از پایین، سیستم‌های $(n-۱)$ از n.
کد موضوع‌بندی ریاضی (۲۰۱۰): 60E15 ، 90B25.

۱ مقدمه

فرض کنید $\bar{F}$ بیانگر یک تابع بقای دلخواه روی $\mathbb{R}^+$ باشد. مارشال و اولکین (۱۹۹۷) با اضافه کردن یک پارامتر شکل به توزیع، یک خانواده کلی و انعطاف‌پذیر از توزیع‌ها را به صورت زیر معرفی کردند که به خانواده توزیع‌های مارشال-اولکین معروف است:

$$\bar{G}(x;\alpha) = \frac{\alpha \bar{F}(x)}{۱ - \bar{\alpha}\, \bar{F}(x)}, \qquad x \in \mathbb{R}^+, \bar{\alpha} = ۱ - \alpha\,, \alpha > ۰. \tag{۱}$$

یک ویژگی جالب این فرم تعمیم‌یافته F، این است که دارای تابع نرخ خطر انعطاف‌پذیرتری است که بستگی به پارامتر اضافه شده $\alpha > ۰$ دارد. این انعطاف‌پذیری باعث شده است که این توزیع کاربرد بیشتری در انتخاب مدل و تحلیل داده‌ها، نسبت به توزیع پایه F داشته باشد. باید توجه داشت که تابع توزیع معرفی شده در رابطه (۱) می‌تواند به عنوان توزیع مینیمم یک مجموعه از متغیرهای تصادفی در نظر گرفته شود که در آن حجم نمونه، یک متغیر تصادفی و از توزیع هندسی پیروی می‌کند و $\alpha > ۰$ است. جزئیات بیشتر در مورد خانواده توزیع‌های مارشال-اولکین در کرمانی و گوپتا (۲۰۰۱)، قیطانی و کوتز (۲۰۰۷)، قیطانی و همکاران (۲۰۰۷)، ناندا و داس (۲۰۱۳)، کوریدریو و لیمونته (۲۰۱۳)، کوریدریو و همکاران (۲۰۱۴) ارائه شده است. اگر در تابع بقای $\bar{G}$ در رابطه (۱)، به جای $\bar{F}(x)$ از خانواده کلی $\bar{F}^{\lambda}(x)$ با $\lambda > ۰$ استفاده شود، آنگاه یک خانواده کلی و انعطاف‌پذیر از توزیع‌ها تحت عنوان مدل نرخ خطر متناسب اصلاح شده، (بالاکریشنان و همکاران ، ۲۰۱۸) به صورت

$$\bar{G}(x;\alpha,\lambda) = \frac{\alpha \bar{F}^{\lambda}(x)}{۱ - \bar{\alpha}\,\bar{F}^{\lambda}(x)}, \qquad x \in \mathbb{R}^{+},\ \lambda \in \mathbb{R}^{+},\ \bar{\alpha} = ۱ - \alpha\,, \alpha > ۰$$

حاصل می‌شود. آماره‌های مرتب که به صورت $X_{۱:n}, \ldots, X_{n:n}$ نمایش داده می‌شوند با مرتب کردن متغیرهای تصادفی $X_۱, \ldots, X_n$ از کوچک به بزرگ حاصل می‌شود. این آماره‌ها کاربردهای زیادی در قابلیت اعتماد، نظریه مزایده، نظریه صف، بیم‌سنجی، مدیریت ریسک و غیره دارد. به عنوان مثال، در کاربردهای قابلیتی، $X_{n-k+۱:n}$ متناظر با طول عمر یک سیستم k از n است. این سیستم تا زمانی کار می‌کند که حداقل k مولفه از سیستم سالم باشد و کار کند. به ویژه، $k = n$ و $k = ۱$ به ترتیب بیانگر طول عمر سیستم‌های سری و موازی است. یک حالت مهم دیگر، سیستم‌های $(n-۱)$ از n هستند که در آنها خرابی یکی از مولفه‌ها تاثیری بر فعالیت سیستم نداشته $(Safe)$ اما با ازکار افتادن دومین مولفه، سیستم نیز از فعالیت باز می‌ماند $(Fail)$. بنابراین سیستم‌های $(n-۱)$ از n به سیستم‌های $Fail-Safe$ نیز در مباحث قابلیت اعتماد معروف هستند (بارلو و پروشان ، ۱۹۹۶).

سیستم‌های $(n-۱)$ از n، به طور معمول در بسیاری از کاربردهای روزمره در ساختارهای قابلیت اعتماد سیستم‌ها مورد استفاده قرار گرفته‌اند. سیستم‌های $(n-۱)$ از n، به طور خاص یک ویژگی طراحی است که در صورت بروز یک خرابی، سیستم به گونه‌ای پاسخ خواهد داد که آسیبی به آن وارد نشود. سیستم ترمز در قطار، یک نمونه خوب از یک سیستم $(n-۱)$ از n، در برابر یک خرابی است که در آن ترمزها با فشار هوا در وضعیت خاموش نگه داشته می‌شوند و در صورتی که ترمز بریده شود یا واگن جدا شود، فشار هوا از بین می‌رود و ترمزها توسط یک مخزن هوای محلی عمل می‌کنند. نمونه دیگری از سیستم‌های $(n-۱)$ از n، آسانسوری است که در آن ترمزها توسط تنش از روی لنت‌های ترمز، نگه داشته می‌شوند و در صورت از دست رفتن تنش، ترمزها روی ریل‌های شافت، چفت می‌شوند و از سقوط آسانسور جلوگیری می‌کنند. بالاکریشنان و همکاران (۲۰۱۵) شرایط لازم و کافی را برای مقایسه سیستم‌های $Fail-Safe$ متشکل از مولفه‌های همگن نمایی از لحاظ ترتیب مانده عمر، ترتیب پراکندگی، ترتیب نرخ خطر و ترتیب نسبت درستنمایی ارائه کردند. با استفاده از این نتایج، می‌توان یک سیستم $(n-۱)$ از n متشکل از مولفه‌های ناهمگن نمایی را با هر سیستم $(m-۱)$ از m متشکل از مولفه‌های همگن نمایی را

مقایسه کرد. امینی سرشت و همکاران (۲۰۱۶) ترتیب‌های استار، لورنتس، پراکندگی میان سیستم‌های $(n-1)$ از n (دومین آماره مرتب) متشکل از مولفه‌های مستقل نرخ خطر متناسب با چندین دورافتاده را اثبات کردند. کای و همکاران (۲۰۱۷) ترتیب نرخ خطر را میان این‌گونه سیستم‌ها بررسی کردند. ژانگ و همکاران (۲۰۱۹) نیز شرایط لازم و کافی را برای مقایسه سیستم‌های $(n-1)$ از n، تحت شوک‌های تصادفی، از لحاظ ترتیب تصادفی معمولی، نرخ خطر و ترتیب نسبت درستنمایی بدست آوردند.

در بسیاری از مواقع، بررسی مقایسه تصادفی سیستم‌های $(n-1)$ از n با مولفه‌های مستقل و ناهمگن، کار مشکلی است. بنابراین در این‌گونه موارد و برای کاهش ناهمگنی، پارامترها را به دو دسته تقسیم می‌کنند و به همین دلیل، مدل‌های با چندین دورافتاده[1] تعریف شده است. در این مقاله، به بررسی مقایسه تصادفی سیستم‌های $(n-1)$ از n در مدل‌های با چندین دورافتاده پرداخته می‌شود. در حقیقت در مدل‌های با چندین دورافتاده، همه متغیرها هم‌توزیع نیستند و به دو دسته از نظر هم‌توزیع بودن تقسیم می‌شوند. در رابطه با مقایسه تصادفی سیستم‌های متشکل از مولفه‌های با چندین دورافتاده، می‌توان به ژائو و بالاکریشنان (۲۰۱۲، ۲۰۱۵)، امینی سرشت و برمال‌زن (۱۳۹۹، ۱۴۰۰) مراجعه نمود.

در این مقاله، تمرکز اصلی بر روی متغیرهای تصادفی مستقل نرخ خطر متناسب اصلاح شده با چندین دورافتاده با توابع بقای $\left(\frac{\alpha_1 \bar{F}^{\lambda_1}(x)}{1-\bar{\alpha}_1 \bar{F}^{\lambda_1}(x)}\mathbf{1}_p, \frac{\alpha_2 \bar{F}^{\lambda_2}(x)}{1-\bar{\alpha}_2 \bar{F}^{\lambda_2}(x)}\mathbf{1}_q\right)$ است و ترتیب نرخ خطر میان سیستم‌های $(n-1)$ از n انجام شده است. در بخش ۲، تعاریف و مفاهیم مورد نیاز در رابطه با ترتیب‌های تصادفی و نظریه بیشاندن ارائه شده است. نتایج اصلی شامل مقایسه‌های تصادفی سیستم‌های $(n-1)$ از n متشکل از مولفه‌های نرخ خطر متناسب اصلاح شده با چندین دورافتاده، از لحاظ ترتیب نرخ خطر در بخش ۳ انجام شده است. سرانجام، بحث و نتیجه گیری در انتهای مقاله ارائه شده است.

۲ تعاریف و مفاهیم مورد نیاز

در این مقاله، واژه‌های صعودی به معنای غیرنزولی و نزولی به معنای غیرصعودی و نماد $a \overset{sgn}{=} b$ به معنای هم علامت بودن a و b است.

تعریف ۱. (شیکد و شانتیکومار ، ۲۰۰۷) فرض کنید X و Y دو متغیر تصادفی نامنفی با توابع بقای $\bar{F}_X(x) = 1 - F_X(x)$ و $\bar{F}_Y(x) = 1 - F_Y(x)$، توابع چگالی احتمال $f_X(x)$ و $f_Y(x)$، توابع نرخ خطر $r_X(x) = f_X(x)/\bar{F}_X(x)$ و $r_Y(x) = f_Y(x)/\bar{F}_Y(x)$ باشند. X در ترتیب نرخ خطر، بزرگتر از Y است $(X \geq_{hr} Y)$ هرگاه $r_X(x) \geq r_Y(x)$، به ازای $x \geq 0$.

تعریف ۲. (مارشال و همکاران ، ۲۰۱۱) فرض کنید $a_{(n)} \leq \ldots \leq a_{(1)}$ و $b_{(n)} \leq \ldots \leq b_{(1)}$ به‌ترتیب نشان‌دهنده مقادیر مرتب شده متناظر با بردارهای $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ و $\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_n)$ باشند.

[1] Multiple-outlier models

(الف) بردار $\mathbf{a}$ توسط بردار $\mathbf{b}$ بیشانده می‌شود ($\mathbf{a} \overset{m}{\preceq} \mathbf{b}$) هرگاه به ازای هر $i = 1, \ldots, n-1$، $\sum_{j=1}^{i} a_{(j)} \geq \sum_{j=1}^{i} b_{(j)}$ و $\sum_{j=1}^{n} a_{(j)} = \sum_{j=1}^{n} b_{(j)}$.

(ب) بردار $\mathbf{a}$ توسط بردار $\mathbf{b}$ از پایین بیشانده می‌شود ($\mathbf{a} \preceq_w \mathbf{b}$) هرگاه به ازای هر $i = 1, \ldots, n$، $\sum_{j=i}^{n} a_{(j)} \leq \sum_{j=i}^{n} b_{(j)}$.

جزئیات مفهوم بیشاندن برداری و کاربردهای آنها در مارشال و همکاران (۲۰۱۱) و برمال‌زن و همکاران (۱۳۹۴) ارائه شده است.

لم ۱. (مارشال و همکاران، ۲۰۱۱) فرض کنید ϕ یک تابع حقیقی مقدار و پیوسته روی مجموعه $\mathcal{D} = \{x : x_1 \geq \ldots \geq x_n\}$ و دارای مشتقات متوالی موجود روی نقاط درونی $\mathcal{D}$ باشند. تحت $\mathbf{x} \preceq_w \mathbf{y}$ روی $\mathcal{D}$ نابرابری $\phi(x) \leq \phi(y)$ برقرار است اگر و فقط اگر به ازای z متعلق به نقاط درونی $\mathcal{D}$ نابرابری‌های $\phi_1(z) \geq \ldots \geq \phi_n(z) \geq 0$ برقرار باشد، که در آن $\phi_i(z) = \frac{\partial \phi(z)}{\partial z_i}$ است.

۳ مقایسه‌های تصادفی سیستم‌های $(n-1)$ از n

در این بخش، نتایج اصلی شامل مقایسه‌های تصادفی سیستم‌های $(n-1)$ از n متشکل از مولفه‌های نرخ خطر متناسب اصلاح شده با چندین دورافتاده، از لحاظ ترتیب نرخ خطر انجام شده است.

قضیه ۱. فرض کنید $X_1, \ldots, X_n$ متغیرهای تصادفی مستقلی باشند که از مدل نرخ خطر متناسب اصلاح شده با چندین دورافتاده با توابع بقای $\left(\frac{\alpha_1 \bar{F}^\lambda(x)}{1-\bar{\alpha}_1 \bar{F}^\lambda(x)} \mathbf{1}_p, \frac{\alpha \bar{F}^\lambda(x)}{1-\bar{\alpha} \bar{F}^\lambda(x)} \mathbf{1}_q\right)$ تبعیت می‌کنند و $Y_1, \ldots, Y_n$ متغیرهای تصادفی مستقلی باشند که از مدل نرخ خطر متناسب اصلاح شده با چندین دورافتاده با توابع بقای $\left(\frac{\alpha_2 \bar{F}^\lambda(x)}{1-\bar{\alpha}_2 \bar{F}^\lambda(x)} \mathbf{1}_p, \frac{\alpha \bar{F}^\lambda(x)}{1-\bar{\alpha} \bar{F}^\lambda(x)} \mathbf{1}_q\right)$ تبعیت می‌کنند که در آن $p+q=n$ و $p, q \geq 1$ است. اگر $\alpha \leq \alpha_1$ و $\alpha_1 \geq \alpha_2$ باشد آنگاه $X_{2:n} \geq_{hr} Y_{2:n}$.

برهان: تابع بقای سیستم‌های $(n-1)$ از n، به ازای $x > 0$، به ترتیب عبارتند از:

$$\begin{aligned}
\bar{F}_{X_{2:n}}(x) &= p\left\{\frac{\alpha_1 \bar{F}^\lambda(x)}{1-\bar{\alpha}_1 \bar{F}^\lambda(x)}\right\}^{p-1}\left\{\frac{\alpha \bar{F}^\lambda(x)}{1-\bar{\alpha} \bar{F}^\lambda(x)}\right\}^{q} \\
&+ q\left\{\frac{\alpha_1 \bar{F}^\lambda(x)}{1-\bar{\alpha}_1 \bar{F}^\lambda(x)}\right\}^{p}\left\{\frac{\alpha \bar{F}^\lambda(x)}{1-\bar{\alpha} \bar{F}^\lambda(x)}\right\}^{q-1} \\
&- (n-1)\left\{\frac{\alpha_1 \bar{F}^\lambda(x)}{1-\bar{\alpha}_1 \bar{F}^\lambda(x)}\right\}^{p}\left\{\frac{\alpha \bar{F}^\lambda(x)}{1-\bar{\alpha} \bar{F}^\lambda(x)}\right\}^{q},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{F}_{Y_{۲:n}}(x) &= p\Big\{\frac{\alpha_۲\bar{F}^{\lambda}(x)}{۱-\bar{\alpha}_۲\bar{F}^{\lambda}(x)}\Big\}^{p-۱}\Big\{\frac{\alpha\bar{F}^{\lambda}(x)}{۱-\bar{\alpha}\bar{F}^{\lambda}(x)}\Big\}^{q}\\ &+ q\Big\{\frac{\alpha_۲\bar{F}^{\lambda}(x)}{۱-\bar{\alpha}_۲\bar{F}^{\lambda}(x)}\Big\}^{p}\Big\{\frac{\alpha\bar{F}^{\lambda}(x)}{۱-\bar{\alpha}\bar{F}^{\lambda}(x)}\Big\}^{q-۱}\\ &- (n-۱)\Big\{\frac{\alpha_۲\bar{F}^{\lambda}(x)}{۱-\bar{\alpha}_۲\bar{F}^{\lambda}(x)}\Big\}^{p}\Big\{\frac{\alpha\bar{F}^{\lambda}(x)}{۱-\bar{\alpha}\bar{F}^{\lambda}(x)}\Big\}^{q}.\end{aligned}$$

اکنون فرض کنید $\bar{F}^{\lambda}(x)=e^{-\left(-\lambda\ln\left(\bar{F}(x)\right)\right)}$ و $t=-\lambda\ln\left(\bar{F}(x)\right)$. در این صورت توابع بقای $X_{۲:n}$ و $Y_{۲:n}$ می‌توانند به صورت

$$\begin{aligned}\bar{F}_{X_{۲:n}}(x) &= p\Big\{\frac{\alpha_۱}{e^t-\bar{\alpha}_۱}\Big\}^{p-۱}\Big\{\frac{\alpha}{e^t-\bar{\alpha}}\Big\}^{q}+q\Big\{\frac{\alpha_۱}{e^t-\bar{\alpha}_۱}\Big\}^{p}\Big\{\frac{\alpha}{e^t-\bar{\alpha}}\Big\}^{q-۱}\\ &- (n-۱)\Big\{\frac{\alpha_۱}{e^t-\bar{\alpha}_۱}\Big\}^{p}\Big\{\frac{\alpha}{e^t-\bar{\alpha}}\Big\}^{q}, \qquad x>۰,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{F}_{Y_{۲:n}}(x) &= p\Big\{\frac{\alpha_۲}{e^t-\bar{\alpha}_۲}\Big\}^{p-۱}\Big\{\frac{\alpha}{e^t-\bar{\alpha}}\Big\}^{q}+q\Big\{\frac{\alpha_۲}{e^t-\bar{\alpha}_۲}\Big\}^{p}\Big\{\frac{\alpha}{e^t-\bar{\alpha}}\Big\}^{q-۱}\\ &- (n-۱)\Big\{\frac{\alpha_۲}{e^t-\bar{\alpha}_۲}\Big\}^{p}\Big\{\frac{\alpha}{e^t-\bar{\alpha}}\Big\}^{q}, \qquad x>۰,\end{aligned}$$

نوشته شوند. توابع نرخ خطر متناظر با دو سیستم فوق، عبارتند از:

$$r_{X_{۲:n}}(x)=\frac{pA_۱\big(\frac{e^t-\bar{\alpha}_۱}{\alpha_۱}\big)+qA_۲\big(\frac{e^t-\bar{\alpha}}{\alpha}\big)-(n-۱)A}{p\big(\frac{e^t-\bar{\alpha}_۱}{\alpha_۱}\big)+q\big(\frac{e^t-\bar{\alpha}}{\alpha}\big)-(n-۱)},$$

که در آن $A_۱=(p-۱)\big\{\frac{e^t}{e^t-\bar{\alpha}_۱}\big\}+q\big\{\frac{e^t}{e^t-\bar{\alpha}}\big\}$، $A_۲=p\big\{\frac{e^t}{e^t-\bar{\alpha}_۱}\big\}+(q-۱)\big\{\frac{e^t}{e^t-\bar{\alpha}}\big\}$ و $A=p\big\{\frac{e^t}{e^t-\bar{\alpha}_۱}\big\}+q\big\{\frac{e^t}{e^t-\bar{\alpha}}\big\}$ است. همچنین

$$r_{Y_{۲:n}}(x)=\frac{pB_۱\big(\frac{e^t-\bar{\alpha}_۲}{\alpha_۲}\big)+qB_۲\big(\frac{e^t-\bar{\alpha}}{\alpha}\big)-(n-۱)B}{p\big(\frac{e^t-\bar{\alpha}_۲}{\alpha_۲}\big)+q\big(\frac{e^t-\bar{\alpha}}{\alpha}\big)-(n-۱)},$$

که در آن $B_۱=(p-۱)\big\{\frac{e^t}{e^t-\bar{\alpha}_۲}\big\}+q\big\{\frac{e^t}{e^t-\bar{\alpha}}\big\}$، $B_۲=p\big\{\frac{e^t}{e^t-\bar{\alpha}_۲}\big\}+(q-۱)\big\{\frac{e^t}{e^t-\bar{\alpha}}\big\}$ و $B=p\big\{\frac{e^t}{e^t-\bar{\alpha}_۲}\big\}+q\big\{\frac{e^t}{e^t-\bar{\alpha}}\big\}$ است. برای اثبات $X_{۲:n}\geq_{hr}Y_{۲:n}$ کافی است نشان داده شود $r_{X_{۲:n}}(x)\leq$

$r_{Y_{2:n}}(x)$. قرار دهید

$$\begin{aligned}
M_1 &= \Big\{p\big(\frac{e^t-\bar{\alpha}_1}{\alpha_1}\big)\big[(p-1)\{\frac{e^t}{e^t-\bar{\alpha}_1}\}+q\{\frac{e^t}{e^t-\bar{\alpha}}\}\big]\\
&+ q\big(\frac{e^t-\bar{\alpha}}{\alpha}\big)\big[p\{\frac{e^t}{e^t-\bar{\alpha}_1}\}+(q-1)\{\frac{e^t}{e^t-\bar{\alpha}}\}\big]\\
&- (n-1)\big[p\{\frac{e^t}{e^t-\bar{\alpha}_1}\}+q\{\frac{e^t}{e^t-\bar{\alpha}}\}\big]\Big\}\\
&\times \Big\{p\big(\frac{e^t-\bar{\alpha}_1}{\alpha_1}\big)+q\big(\frac{e^t-\bar{\alpha}}{\alpha}\big)-(n-1)\Big\}^{-1}\\
M_2 &= \Big\{p\big(\frac{e^t-\bar{\alpha}_2}{\alpha_2}\big)\big[(p-1)\{\frac{e^t}{e^t-\bar{\alpha}_1}\}+q\{\frac{e^t}{e^t-\bar{\alpha}}\}\big]\\
&+ q\big(\frac{e^t-\bar{\alpha}}{\alpha}\big)\big[p\{\frac{e^t}{e^t-\bar{\alpha}_1}\}+(q-1)\{\frac{e^t}{e^t-\bar{\alpha}}\}\big]\\
&- (n-1)\big[p\{\frac{e^t}{e^t-\bar{\alpha}_1}\}+q\{\frac{e^t}{e^t-\bar{\alpha}}\}\big]\Big\}\\
&\times \Big\{p\big(\frac{e^t-\bar{\alpha}_2}{\alpha_2}\big)+q\big(\frac{e^t-\bar{\alpha}}{\alpha}\big)-(n-1)\Big\}^{-1}\\
M_3 &= \Big\{p\big(\frac{e^t-\bar{\alpha}_2}{\alpha_2}\big)\big[(p-1)\{\frac{e^t}{e^t-\bar{\alpha}_2}\}+q\{\frac{e^t}{e^t-\bar{\alpha}}\}\big]\\
&+ q\big(\frac{e^t-\bar{\alpha}}{\alpha}\big)\big[p\{\frac{e^t}{e^t-\bar{\alpha}_2}\}+(q-1)\{\frac{e^t}{e^t-\bar{\alpha}}\}\big]\\
&- (n-1)\big[p\{\frac{e^t}{e^t-\bar{\alpha}_2}\}+q\{\frac{e^t}{e^t-\bar{\alpha}}\}\big]\Big\}\\
&\times \Big\{p\big(\frac{e^t-\bar{\alpha}_2}{\alpha_2}\big)+q\big(\frac{e^t-\bar{\alpha}}{\alpha}\big)-(n-1)\Big\}^{-1}.
\end{aligned}$$

بنابراین کافی است نشان داده شود $M_1 \leq M_3$. اگر $\alpha_2 \geq \alpha_1$ باشد آنگاه

$$\begin{aligned}
M_3-M_2 &\overset{sgn}{=} p\big(\frac{e^t}{e^t-\bar{\alpha}_2}-\frac{e^t}{e^t-\bar{\alpha}_1}\big)\\
&\times \big[(p-1)\big(\frac{e^t-\bar{\alpha}_2}{\alpha_2}\big)+q\big(\frac{e^t-\bar{\alpha}}{\alpha}\big)-(n-1)\big]\\
&\geq p\big(\frac{e^t}{e^t-\bar{\alpha}_2}-\frac{e^t}{e^t-\bar{\alpha}_1}\big)\big[(p+q-1-(n-1)\big]=0
\end{aligned}$$

که نتیجه می‌دهد $M_۲ \leq M_۳$. اکنون فرض کنید

$$\begin{aligned} a &= q\big(\frac{e^t-\bar{\alpha}}{\alpha}\big)\big[p\big\{\frac{e^t}{e^t-\bar{\alpha}_۱}\big\}+(q-۱)\big\{\frac{e^t}{e^t-\bar{\alpha}}\big\}\big]-(n-۱)\big[p\big\{\frac{e^t}{e^t-\bar{\alpha}_۱}\big\}+q\big\{\frac{e^t}{e^t-\bar{\alpha}}\big\}\big],\\ b &= p\big[(p-۱)\big\{\frac{e^t}{e^t-\bar{\alpha}_۱}\big\}+q\big\{\frac{e^t}{e^t-\bar{\alpha}}\big\}\big],\\ c &= q\big(\frac{e^t-\bar{\alpha}}{\alpha}\big)-(n-۱). \end{aligned}$$

و $d=p$. اگر $\alpha_۱ \geq \alpha$ باشد آنگاه

$$bc-ad = pq\big[\big\{\frac{e^t}{e^t-\bar{\alpha}}\big\}-\big\{\frac{e^t}{e^t-\bar{\alpha}_۱}\big\}\big]\big(\frac{e^t-\bar{\alpha}}{\alpha}\big)+p(n-۱)\big\{\frac{e^t}{e^t-\bar{\alpha}_۱}\big\}\geq ۰.$$

همچنین برای $\alpha_۱ \geq \alpha_۲$ داریم:

$$\begin{aligned} M_۲-M_۱ &\overset{sgn}{=} (bc-ad)\big(\big(\frac{e^t-\bar{\alpha}_۲}{\alpha_۲}\big)-\big(\frac{e^t-\bar{\alpha}_۱}{\alpha_۱}\big)\big),\\ &\overset{sgn}{=} (bc-ad)\big(\frac{۱}{\bar{F}(t_۲)}-\frac{۱}{\bar{F}(t_۱)}\big)\geq ۰, \end{aligned}$$

که نشان می‌دهد $M_۱ \leq M_۲$. بنابراین $M_۱ \leq M_۳$ و نتیجه لازم حاصل می‌شود.

قضیه ۲. فرض کنید $X_۱,\ldots,X_n$ متغیرهای تصادفی مستقلی باشند که از مدل نرخ خطر متناسب اصلاح شده با چندین دورافتاده با توابع بقای $\big(\frac{\alpha_۱\bar{F}^\lambda(x)}{۱-\bar{\alpha}_۱\bar{F}^\lambda(x)}\mathbf{1}_p, \frac{\alpha\bar{F}^\lambda(x)}{۱-\bar{\alpha}\bar{F}^\lambda(x)}\mathbf{1}_q\big)$ تبعیت می‌کنند که در آن $p+q=n$ است. همچنین فرض کنید $Y_۱,\ldots,Y_n$ متغیرهای تصادفی مستقلی باشند که از مدل نرخ خطر متناسب اصلاح شده با چندین دورافتاده با توابع بقای $\big(\frac{\alpha_۱\bar{F}^\lambda(x)}{۱-\bar{\alpha}_۱\bar{F}^\lambda(x)}\mathbf{1}^*_p, \frac{\alpha_۲\bar{F}^\lambda(x)}{۱-\bar{\alpha}_۲\bar{F}^\lambda(x)}\mathbf{1}^*_q\big)$ تبعیت می‌کنند که در آن $p^*+q^*=n^*$ و $p^*,q^*\geq ۱$ است. اگر $\alpha_۱\geq\alpha_۲$ باشد آنگاه تحت $p^*\leq p\leq q\leq q^*$ داریم: $(p,q)\preceq_w(p^*,q^*)\Longrightarrow$ $X_{۲:n}\geq_{hr}Y_{۲:n^*}$.

برهان: تابع بقای سیستم‌های $(n-۱)$ از n، به ازای $x>۰$، به ترتیب عبارتند از:

$$\begin{aligned} \bar{F}_{X_{۲:n}}(x) &= p\,\big\{\frac{\alpha_۱\bar{F}^\lambda(x)}{۱-\bar{\alpha}_۱\bar{F}^\lambda(x)}\big\}^{p-۱}\big\{\frac{\alpha_۲\bar{F}^\lambda(x)}{۱-\bar{\alpha}_۲\bar{F}^\lambda(x)}\big\}^{q}\\ &+ q\,\big\{\frac{\alpha_۱\bar{F}^\lambda(x)}{۱-\bar{\alpha}_۱\bar{F}^\lambda(x)}\big\}^{p}\big\{\frac{\alpha_۲\bar{F}^\lambda(x)}{۱-\bar{\alpha}_۲\bar{F}^\lambda(x)}\big\}^{q-۱}\\ &- (n-۱)\,\big\{\frac{\alpha_۱\bar{F}^\lambda(x)}{۱-\bar{\alpha}_۱\bar{F}^\lambda(x)}\big\}^{p}\big\{\frac{\alpha_۲\bar{F}^\lambda(x)}{۱-\bar{\alpha}_۲\bar{F}^\lambda(x)}\big\}^{q}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{F}_{Y_{2:n}}(x) &= p^*\Big\{\frac{\alpha_1\bar{F}^\lambda(x)}{1-\bar{\alpha}_1\bar{F}^\lambda(x)}\Big\}^{p^*-1}\Big\{\frac{\alpha_2\bar{F}^\lambda(x)}{1-\bar{\alpha}_2\bar{F}^\lambda(x)}\Big\}^{q^*}\\ &+ q^*\Big\{\frac{\alpha_1\bar{F}^\lambda(x)}{1-\bar{\alpha}_1\bar{F}^\lambda(x)}\Big\}^{p^*}\Big\{\frac{\alpha_2\bar{F}^\lambda(x)}{1-\bar{\alpha}_2\bar{F}^\lambda(x)}\Big\}^{q^*-1}\\ &- (n^*-1)\Big\{\frac{\alpha_1 F^\lambda(x)}{1-\bar{\alpha}_1\bar{F}^\lambda(x)}\Big\}^{p^*}\Big\{\frac{\alpha_2\bar{F}^\lambda(x)}{1-\bar{\alpha}_2\bar{F}^\lambda(x)}\Big\}^{q^*}.\end{aligned}$$

اکنون فرض کنید $\bar{F}^\lambda(x) = e^{-\left(-\lambda\ln\left(\bar{F}(x)\right)\right)}$ و $t = -\lambda\ln\left(\bar{F}(x)\right)$ باشد. در این صورت توابع بقای فوق، می‌توانند به صورت

$$\begin{aligned}\bar{F}_{X_{2:n}}(x) &= p\Big\{\frac{\alpha_1}{e^t-\bar{\alpha}_1}\Big\}^{p-1}\Big\{\frac{\alpha_2}{e^t-\bar{\alpha}_2}\Big\}^{q} + q\Big\{\frac{\alpha_1}{e^t-\bar{\alpha}_1}\Big\}^{p}\Big\{\frac{\alpha_2}{e^t-\bar{\alpha}_2}\Big\}^{q-1}\\ &- (n-1)\Big\{\frac{\alpha_1}{e^t-\bar{\alpha}_1}\Big\}^{p}\Big\{\frac{\alpha_2}{e^{\lambda t}-\bar{\alpha}_2}\Big\}^{q}, \qquad x>0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{F}_{Y_{2:n}}(x) &= p^*\Big\{\frac{\alpha_1}{e^t-\bar{\alpha}_1}\Big\}^{p^*-1}\Big\{\frac{\alpha_2}{e^t-\bar{\alpha}_2}\Big\}^{q^*} + q^*\Big\{\frac{\alpha_1}{e^t-\bar{\alpha}_1}\Big\}^{p^*}\Big\{\frac{\alpha_2}{e^{\lambda t}-\bar{\alpha}_2}\Big\}^{q^*-1}\\ &- (n^*-1)\Big\{\frac{\alpha_1}{e^t-\bar{\alpha}_1}\Big\}^{p^*}\Big\{\frac{\alpha_2}{e^t-\bar{\alpha}_2}\Big\}^{q^*}, \qquad x>0,\end{aligned}$$

بازنویسی شوند. توابع نرخ خطر متناظر با دو سیستم فوق، عبارتند از:

$$r_{X_{2:n}}(x) = \frac{pD_1\big(\frac{e^t-\bar{\alpha}_1}{\alpha_1}\big) + qD_2\big(\frac{e^t-\bar{\alpha}_2}{\alpha_2}\big) - (n-1)D}{p\big(\frac{e^t-\bar{\alpha}_1}{\alpha_1}\big) + q\big(\frac{e^t-\bar{\alpha}_2}{\alpha_2}\big) - (n-1)},$$

که در آن $D_1 = (p-1)\big\{\frac{e^t}{e^t-\bar{\alpha}_1}\big\} + q\big\{\frac{e^t}{e^t-\bar{\alpha}_2}\big\}$، $D_2 = p\big\{\frac{e^t}{e^t-\bar{\alpha}_1}\big\} + (q-1)\big\{\frac{e^t}{e^t-\bar{\alpha}_2}\big\}$ و $D = p\big\{\frac{e^t}{e^t-\bar{\alpha}_1}\big\} + q\big\{\frac{e^t}{e^t-\bar{\alpha}_2}\big\}$ است. همچنین

$$r_{Y_{2:n}}(x) = \frac{p^*D_1^*\big(\frac{e^t-\bar{\alpha}_1}{\alpha_1}\big) + q^*D_2^*\big(\frac{e^t-\bar{\alpha}_2}{\alpha_2}\big) - (n^*-1)D^*}{p^*\big(\frac{e^t-\bar{\alpha}_1}{\alpha_1}\big) + q^*\big(\frac{e^t-\bar{\alpha}_2}{\alpha_2}\big) - (n^*-1)}$$

که در آن $D_1^* = (p^*-1)\big\{\frac{e^t}{e^t-\bar{\alpha}_1}\big\} + q^*\big\{\frac{e^t}{e^t-\bar{\alpha}_2}\big\}$، $D_2^* = p^*\big\{\frac{e^t}{e^t-\bar{\alpha}_1}\big\} + (q^*-1)\big\{\frac{e^t}{e^t-\bar{\alpha}_2}\big\}$ و $D^* = p^*\big\{\frac{e^t}{e^t-\bar{\alpha}_1}\big\} + q^*\big\{\frac{e^t}{e^t-\bar{\alpha}_2}\big\}$ است. برای اثبات $X_{2:n} \geq_{hr} Y_{2:n}$، باید نشان داده شود $r_{X_{2:n}}(x) \leq$

$r_{Y_{۲:n}}(x)$. قرار دهید $u_i = \frac{e^t}{e^t-\bar{\alpha}_i}$، $v_i = \left(\frac{e^t-\bar{\alpha}_i}{\alpha_i}\right)$ و $w_{ij} = u_i v_j$ باشد $(i,j=۱,۲)$. همچنین قرار دهید

$$\begin{aligned} k(p,q) &= \frac{pD_۱\left(\frac{e^t-\bar{\alpha}_۱}{\alpha_۱}\right)+qD_۲\left(\frac{e^t-\bar{\alpha}_۲}{\alpha_۲}\right)-(n-۱)D}{p\left(\frac{e^t-\bar{\alpha}_۱}{\alpha_۱}\right)+q\left(\frac{e^t-\bar{\alpha}_۲}{\alpha_۲}\right)-(n-۱)} \\ &= \frac{p(p-۱)w_{۱۱}+pqw_{۲۱}+pqw_{۱۲}+q(q-۱)w_{۲۲}-(n-۱)(pu_۱+qu_۲)}{pv_۱+qv_۲-(n-۱)}. \end{aligned}$$

اکنون فرض کنید $\alpha_۱ \geq \alpha_۲$ باشد. کافی است تحت فرضیات $p^* \leq p \leq q \leq q^*$ و $(p,q) \preceq_w (p^*,q^*)$، نشان داده شود $k(p,q) \leq k(p^*,q^*)$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial k(p,q)}{\partial p}-\frac{\partial k(p,q)}{\partial q} \overset{sgn}{=}& \Big[pw_{۲۱}+(q-۱)w_{۲۲}-(p-۱)w_{۱۱}-qw_{۱۲} \\ -& (n-۱)(u_۲-u_۱)\Big] \\ \times& \big[pv_۱+qv_۲-(n-۱)\big]+(pw_{۱۱}+qw_{۲۲})(v_۲-v_۱) \\ \geq& \Big[pw_{۲۱}+(q-۱)w_{۲۲}-(p-۱)w_{۱۱}-qw_{۱۲} \\ -& (n-۱)(u_۲-u_۱)\Big] \\ \times& \big[pv_۱+qv_۲-(n-۱)\big]+(pv_۱+qv_۲)(u_۱v_۲-u_۱v_۱) \\ \geq& (u_۲-u_۱)\big[pv_۱+(q-۱)v_۲-(n-۱)\big] \\ +& (n-۱)(w_{۱۲}-w_{۱۱}) \geq ۰, \end{aligned}$$

که در آن دو نابرابری آخر، براساس $u_۲ \geq u_۱ \geq ۰$ و $v_۲ \geq v_۱ \geq ۱$ است. بنابراین

$$\frac{\partial k(p,q)}{\partial p} \geq \frac{\partial k(p,q)}{\partial q} \geq ۰.$$

اکنون نتیجه لازم با استفاده از لم ۱ حاصل می‌شود.

قضیه ۳. فرض کنید $X_۱,\ldots,X_n$ متغیرهای تصادفی مستقلی باشند که از مدل نرخ خطر متناسب اصلاح شده با چندین دورافتاده با توابع بقای $\left(\frac{\alpha\bar{F}^{\lambda_۱}(x)}{۱-\bar{\alpha}\bar{F}^{\lambda_۱}(x)}\mathbf{1}_p, \frac{\alpha\bar{F}^{\lambda}(x)}{۱-\bar{\alpha}\bar{F}^{\lambda}(x)}\mathbf{1}_q\right)$ تبعیت می‌کنند و $Y_۱,\ldots,Y_n$ متغیرهای تصادفی مستقلی باشند که از مدل نرخ خطر متناسب اصلاح شده با چندین دورافتاده با توابع بقای $\left(\frac{\alpha\bar{F}^{\lambda_۲}(x)}{۱-\bar{\alpha}\bar{F}^{\lambda_۲}(x)}\mathbf{1}_p, \frac{\alpha\bar{F}^{\lambda}(x)}{۱-\bar{\alpha}\bar{F}^{\lambda}(x)}\mathbf{1}_q\right)$ تبعیت می‌کنند که در آن $p+q=n$ و $p,q \geq ۱$ است. اگر $\lambda_۱ \leq \min\{\lambda_۲,\lambda\}$ باشد آنگاه $X_{۲:n} \geq_{hr} Y_{۲:n}$.

برهان: فرض کنید $\bar{F}(x) = e^{-\left(-\ln\left(\bar{F}(x)\right)\right)}$ و $t = -\ln\left(\bar{F}(x)\right)$ باشد. در این صورت توابع بقای

سیستم‌های $(n-1)$ از n، می‌توانند به صورت

$$\begin{aligned}\bar{F}_{X_{2:n}}(x) &= p\left\{\frac{\alpha}{e^{\lambda_1 t}-\bar{\alpha}}\right\}^{p-1}\left\{\frac{\alpha}{e^{\lambda t}-\bar{\alpha}}\right\}^{q}+q\left\{\frac{\alpha}{e^{\lambda_1 t}-\bar{\alpha}}\right\}^{p}\left\{\frac{\alpha}{e^{\lambda t}-\bar{\alpha}}\right\}^{q-1}\\ &- (n-1)\left\{\frac{\alpha}{e^{\lambda t}-\bar{\alpha}}\right\}^{p}\left\{\frac{\alpha}{e^{\lambda t}-\bar{\alpha}}\right\}^{q}, \qquad x>0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{F}_{Y_{2:n}}(x) &= p\left\{\frac{\alpha}{e^{\lambda_2 t}-\bar{\alpha}}\right\}^{p-1}\left\{\frac{\alpha}{e^{\lambda t}-\bar{\alpha}}\right\}^{q}+q\left\{\frac{\alpha}{e^{\lambda_2 t}-\bar{\alpha}}\right\}^{p}\left\{\frac{\alpha}{e^{\lambda t}-\bar{\alpha}}\right\}^{q-1}\\ &- (n-1)\left\{\frac{\alpha}{e^{\lambda_2 t}-\bar{\alpha}}\right\}^{p}\left\{\frac{\alpha}{e^{\lambda t}-\bar{\alpha}}\right\}^{q} \qquad x>0,\end{aligned}$$

نوشته شوند. در نتیجه توابع نرخ خطر متناظر با دو سیستم فوق، عبارتند از:

$$r_{X_{2:n}}(x) = \frac{pA_1\left(\frac{e^{\lambda_1 t}-\bar{\alpha}}{\alpha}\right)+qA_2\left(\frac{e^{\lambda t}-\bar{\alpha}}{\alpha}\right)-(n-1)A}{p\left(\frac{e^{\lambda_1 t}-\bar{\alpha}}{\alpha}\right)+q\left(\frac{e^{\lambda t}-\bar{\alpha}}{\alpha}\right)-(n-1)},$$

که در آن $A_1 = (p-1)\left\{\frac{\lambda_1 e^{\lambda_1 t}}{e^{\lambda_1 t}-\bar{\alpha}}\right\}+q\left\{\frac{\lambda e^{\lambda t}}{e^{\lambda t}-\bar{\alpha}}\right\}$، $A_2 = p\left\{\frac{\lambda_1 e^{\lambda_1 t}}{e^{\lambda_1 t}-\bar{\alpha}}\right\}+(q-1)\left\{\frac{\lambda e^{\lambda t}}{e^{\lambda t}-\bar{\alpha}}\right\}$ و $A = p\left\{\frac{\lambda_1 e^{\lambda_1 t}}{e^{\lambda_1 t}-\bar{\alpha}}\right\}+q\left\{\frac{\lambda e^{\lambda t}}{e^{\lambda t}-\bar{\alpha}}\right\}$ است. همچنین

$$r_{Y_{2:n}}(x) = \frac{pB_1\left(\frac{e^{\lambda_2 t}-\bar{\alpha}}{\alpha}\right)+qB_2\left(\frac{e^{\lambda t}-\bar{\alpha}}{\alpha}\right)-(n-1)B}{p\left(\frac{e^{\lambda_2 t}-\bar{\alpha}}{\alpha}\right)+q\left(\frac{e^{\lambda t}-\bar{\alpha}}{\alpha}\right)-(n-1)},$$

که در آن $B_1 = (p-1)\left\{\frac{\lambda_2 e^{\lambda_2 t}}{e^{\lambda_2 t}-\bar{\alpha}}\right\}+q\left\{\frac{\lambda e^{\lambda t}}{e^{\lambda t}-\bar{\alpha}}\right\}$، $B_2 = p\left\{\frac{\lambda_2 e^{\lambda_2 t}}{e^{\lambda_2 t}-\bar{\alpha}}\right\}+(q-1)\left\{\frac{\lambda e^{\lambda t}}{e^{\lambda t}-\bar{\alpha}}\right\}$ و $B = p\left\{\frac{\lambda_2 e^{\lambda_2 t}}{e^{\lambda_2 t}-\bar{\alpha}}\right\}+q\left\{\frac{\lambda e^{\lambda t}}{e^{\lambda t}-\bar{\alpha}}\right\}$ است. برای اثبات $X_{2:n} \geq_{hr} Y_{2:n}$ باید نشان داده شود $r_{X_{2:n}}(x) \leq r_{Y_{2:n}}(x)$. قرار دهید

$$\begin{aligned}M_1 &= \Big\{p\big[(p-1)\big\{\frac{y_1 e^{y_1}}{e^{y_1}-\bar{\alpha}}\big\}+q\big\{\frac{y e^{y}}{e^{y}-\bar{\alpha}}\big\}\big]\big(\frac{e^{y_1}-\bar{\alpha}}{\alpha}\big)+q\Big[p\big\{\frac{y_1 e^{y_1}}{e^{y_1}-\bar{\alpha}}\big\}\\ &+ (q-1)\big\{\frac{y e^{y}}{e^{y}-\bar{\alpha}}\big\}\Big]\big(\frac{e^{y}-\bar{\alpha}}{\alpha}\big)-(n-1)\big[p\big\{\frac{y_1 e^{y_1}}{e^{y_1}-\bar{\alpha}}\big\}+q\big\{\frac{y e^{y}}{e^{y}-\bar{\alpha}}\big\}\big]\Big\}\\ &\times \Big\{p\big(\frac{e^{y_1}-\bar{\alpha}}{\alpha}\big)+q\big(\frac{e^{y}-\bar{\alpha}}{\alpha}\big)-(n-1)\Big\}^{-1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}M_2 &= \Big\{p\big[(p-1)\big\{\frac{y_1 e^{y_1}}{e^{y_1}-\bar{\alpha}}\big\}+q\big\{\frac{y e^{y}}{e^{y}-\bar{\alpha}}\big\}\big]\big(\frac{e^{y_2}-\bar{\alpha}}{\alpha}\big)+q\Big[p\big\{\frac{y_1 e^{y_1}}{e^{y_1}-\bar{\alpha}}\big\}\\ &+ (q-1)\big\{\frac{y e^{y}}{e^{y}-\bar{\alpha}}\big\}\Big]\big(\frac{e^{y}-\bar{\alpha}}{\alpha}\big)-(n-1)\big[p\big\{\frac{y_1 e^{y_1}}{e^{y_1}-\bar{\alpha}}\big\}+q\big\{\frac{y e^{y}}{e^{y}-\bar{\alpha}}\big\}\big]\Big\}\\ &\times \Big\{p\big(\frac{e^{y_2}-\bar{\alpha}}{\alpha}\big)+q\big(\frac{e^{y}-\bar{\alpha}}{\alpha}\big)-(n-1)\Big\}^{-1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_۳ &= \Big\{p\big[(p-۱)\{\frac{y_۲e^{y_۲}}{e^{y_۲}-\bar{\alpha}}\}+q\{\frac{ye^y}{e^y-\bar{\alpha}}\}\big](\frac{e^{y_۲}-\bar{\alpha}}{\alpha})+q\Big[p\{\frac{y_۲e^{y_۲}}{e^{y_۲}-\bar{\alpha}}\} \\ &+ (q-۱)\{\frac{ye^y}{e^y-\bar{\alpha}}\}\Big](\frac{e^y-\bar{\alpha}}{\alpha})-(n-۱)\big[p\{\frac{y_۲e^{y_۲}}{e^{y_۲}-\bar{\alpha}}\}+q\{\frac{ye^y}{e^y-\bar{\alpha}}\}\big]\Big\} \\ &\times \Big\{p(\frac{e^{y_۱}-\bar{\alpha}}{\alpha})+q(\frac{e^{yt}-\bar{\alpha}}{\alpha})-(n-۱)\Big\}^{-۱} \end{aligned}$$

که در آن $y_۱=\lambda_۱t_۱$، $y_۲=\lambda_۲t_۲$ و $y=\lambda t$ است. فرض کنید $\lambda_۱\leq\min\{\lambda_۲,\lambda\}$ آنگاه $y_۱\leq\min\{y_۲,y\}$ است. بنابراین کافی است نشان داده شود $M_۱\leq M_۳$. بدین منظور داریم:

$$\begin{aligned} M_۳-M_۲ &\overset{sgn}{=} p\big(\frac{y_۲e^{y_۲}}{e^{y_۲}-\bar{\alpha}}-\frac{y_۱e^{y_۱}}{e^{y_۱}-\bar{\alpha}}\big) \\ &\times \big[(p-۱)(\frac{e^{y_۲}-\bar{\alpha}}{\alpha})+q(\frac{e^y-\bar{\alpha}}{\alpha})-(n-۱)\big] \\ &\geq p\big(\frac{y_۲e^{y_۲}}{e^{y_۲}-\bar{\alpha}}-\frac{y_۱e^{y_۱}}{e^{y_۱}-\bar{\alpha}}\big)\big[(p+q-۱-(n-۱)\big]=\circ \end{aligned}$$

که نتیجه می‌دهد $M_۲\leq M_۳$. فرض کنید

$$\begin{aligned} a &= +q\big[p\{\frac{y_۱e^{y_۱}}{e^{y_۱}-\bar{\alpha}}\}+(q-۱)\{\frac{ye^y}{e^y-\bar{\alpha}}\}\big](\frac{e^y-\bar{\alpha}}{\alpha}) \\ &- (n-۱)\big[p\{\frac{y_۱e^{y_۱}}{e^{y_۱}-\bar{\alpha}}\}+q\{\frac{ye^y}{e^y-\bar{\alpha}}\}\big] \\ b &= p\big[(p-۱)\{\frac{y_۱e^{y_۱}}{e^{y_۱}-\bar{\alpha}}\}+q\{\frac{ye^{yt}}{e^y-\bar{\alpha}}\}\big], \\ c &= q(\frac{e^y-\bar{\alpha}}{\alpha})-(n-۱), \qquad \text{و} \qquad d=p. \end{aligned}$$

اگر $\lambda\geq\lambda_۱$، آنگاه

$$bc-ad=pq\big[\{\frac{ye^y}{e^y-\bar{\alpha}}\}-\{\frac{y_۱e^{y_۱}}{e^{y_۱}-\bar{\alpha}}\}\big](\frac{e^y-\bar{\alpha}}{\alpha})+p(n-۱)\{y_۱\frac{e^{y_۱}}{e^{y_۱}-\bar{\alpha}}\}\geq\circ.$$

همچنین برای $\lambda_۲\geq\lambda_۱$ داریم:

$$M_۲-M_۱\overset{sgn}{=}\big(bc-ad\big)\big[(\frac{e^{y_۲}-\bar{\alpha}}{\alpha})-(\frac{e^{y_۱}-\bar{\alpha}}{\alpha})\big]\geq\circ$$

که نشان می‌دهد $M_۱\leq M_۲$. بنابراین $M_۱\leq M_۳$ و نتیجه لازم حاصل می‌شود.

قضیه ۴. فرض کنید $X_1,\ldots,X_n$ متغیرهای تصادفی مستقلی باشند که از مدل نرخ خطر متناسب اصلاح شده با چندین دورافتاده با توابع بقای $\left(\frac{\alpha\bar{F}^{\lambda_1}(x)}{1-\bar{\alpha}\bar{F}^{\lambda_1}(x)}\mathbf{1}_p, \frac{\alpha\bar{F}^{\lambda_2}(x)}{1-\bar{\alpha}\bar{F}^{\lambda_2}(x)}\mathbf{1}_q\right)$ تبعیت می‌کنند که در آن $p+q=n$ است. همچنین فرض کنید $Y_1,\ldots,Y_n$ متغیرهای تصادفی مستقلی باشند که از مدل نرخ خطر متناسب اصلاح شده با چندین دورافتاده با توابع بقای $\left(\frac{\alpha\bar{F}^{\lambda_1}(x)}{1-\bar{\alpha}\bar{F}^{\lambda_1}(x)}\mathbf{1}^*_p, \frac{\alpha\bar{F}^{\lambda_2}(x)}{1-\bar{\alpha}\bar{F}^{\lambda_2}(x)}\mathbf{1}^*_q\right)$ تبعیت می‌کنند که در آن $p^*+q^*=n^*$ و $p^*,q^*\geq 1$ است. اگر $\lambda_2\geq\lambda_1$ باشد آنگاه تحت $p^*\leq p\leq q\leq q^*$ داریم $(p,q)\preceq_w(p^*,q^*)\Longrightarrow X_{2:n}\geq_{hr}Y_{2:n^*}$.

برهان: فرض کنید $\bar{F}(x)=e^{-\left(-\ln\left(\bar{F}(x)\right)\right)}$ و $t=-\ln\left(\bar{F}(x)\right)$ باشد. در این صورت توابع بقای سیستم‌های $(n-1)$ از n، می‌توانند به صورت

$$\begin{aligned}\bar{F}_{X_{2:n}}(x) &= p\left\{\frac{\alpha}{e^{\lambda_1 t}-\bar{\alpha}}\right\}^{p-1}\left\{\frac{\alpha}{e^{\lambda_2 t}-\bar{\alpha}}\right\}^{q}+q\left\{\frac{\alpha}{e^{\lambda_1 t}-\bar{\alpha}}\right\}^{p}\left\{\frac{\alpha}{e^{\lambda_2 t}-\bar{\alpha}}\right\}^{q-1}\\ &- (n-1)\left\{\frac{\alpha}{e^{\lambda_1 t}-\bar{\alpha}}\right\}^{p}\left\{\frac{\alpha}{e^{\lambda_2 t}-\bar{\alpha}}\right\}^{q},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{F}_{Y_{2:n}}(x) &= p^*\left\{\frac{\alpha}{e^{\lambda_1 t}-\bar{\alpha}}\right\}^{p^*-1}\left\{\frac{\alpha}{e^{\lambda_2 t}-\bar{\alpha}}\right\}^{q^*}+q^*\left\{\frac{\alpha}{e^{\lambda_1 t}-\bar{\alpha}}\right\}^{p^*}\left\{\frac{\alpha}{e^{\lambda_2 t}-\bar{\alpha}}\right\}^{q^*-1}\\ &- (n^*-1)\left\{\frac{\alpha}{e^{\lambda_1 t}-\bar{\alpha}}\right\}^{p^*}\left\{\frac{\alpha}{e^{\lambda_2 t}-\bar{\alpha}}\right\}^{q^*},\end{aligned}$$

نوشته شوند. بنابراین توابع نرخ خطر متناظر با دو سیستم فوق، عبارتند از:

$$r_{X_{2:n}}(x) = \frac{pD_1\left(\frac{e^{\lambda_1 t}-\bar{\alpha}}{\alpha}\right)+qD_2\left(\frac{e^{\lambda_2 t}-\bar{\alpha}}{\alpha}\right)-(n-1)D}{p\left(\frac{e^{\lambda_1 t}-\bar{\alpha}}{\alpha}\right)+q\left(\frac{e^{\lambda_2 t}-\bar{\alpha}}{\alpha}\right)-(n-1)},$$

که در آن $D_1=(p-1)\left\{\frac{\lambda_1 e^{\lambda_1 t}}{e^{\lambda_1 t}-\bar{\alpha}}\right\}+q\left\{\frac{e^{\lambda_2\lambda_2 t}}{e^{\lambda_2 t}-\bar{\alpha}}\right\}$، $D_2=p\left\{\frac{\lambda_1 e^{\lambda_1 t}}{e^{\lambda_1 t}-\bar{\alpha}_1}\right\}+(q-1)\left\{\frac{\lambda_2 e^{\lambda_2 t}}{e^{\lambda_2 t}-\bar{\alpha}}\right\}$ و $D=p\left\{\frac{\lambda_1 e^{\lambda_1 t}}{e^{\lambda_1 t}-\bar{\alpha}}\right\}+q\left\{\frac{\lambda_2 e^{\lambda_2 t}}{e^{\lambda_2 t}-\bar{\alpha}}\right\}$ است. همچنین

$$r_{Y_{2:n}}(x) = \frac{p^*D_1^*\left(\frac{e^{\lambda_1 t}-\bar{\alpha}}{\alpha}\right)+q^*D_2^*\left(\frac{e^{\lambda_2 t}-\bar{\alpha}}{\alpha}\right)-(n^*-1)D^*}{p^*\left(\frac{e^{\lambda_1 t}-\bar{\alpha}}{\alpha}\right)+q^*\left(\frac{e^{\lambda_2 t}-\bar{\alpha}}{\alpha}\right)-(n^*-1)},$$

که در آن

$$D_1^*=(p^*-1)\left\{\frac{\lambda_1 e^{\lambda_1 t}}{e^{\lambda_1 t}-\bar{\alpha}}\right\}+q^*\left\{\frac{e^{\lambda_2\lambda_2 t}}{e^{\lambda_2 t}-\bar{\alpha}}\right\},$$

$$D_2^*=p^*\left\{\frac{\lambda_1 e^{\lambda_1 t}}{e^{\lambda_1 t}-\bar{\alpha}_1}\right\}+(q^*-1)\left\{\frac{\lambda_2 e^{\lambda_2 t}}{e^{\lambda_2 t}-\bar{\alpha}}\right\}$$

و $D^*=p^*\left\{\frac{\lambda_1 e^{\lambda_1 t}}{e^{\lambda_1 t}-\bar{\alpha}}\right\}+q^*\left\{\frac{\lambda_2 e^{\lambda_2 t}}{e^{\lambda_2 t}-\bar{\alpha}}\right\}$ است. برای اثبات $X_{2:n}\geq_{hr}Y_{2:n}$، باید نشان داده شود

$r_{X_{2:n}}(x) \le r_{Y_{2:n}}(x)$. فرض کنید $u_i = \frac{\lambda_i e^{\lambda_i t}}{e^{\lambda_i t}-\bar{\alpha}}$، $v_i = \left(\frac{e^{\lambda_i t}-\bar{\alpha}}{\alpha}\right)$ و $w_{ij} = u_i v_j$ به ازای $i,j = 1,2$ باشد. اکنون قرار دهید

$$\begin{aligned} k(p,q) &= \frac{\partial\{-\ln(\bar{F}_{X_{2:n}}(x))\}}{\partial x} \\ &= \frac{p(p-1)w_{11} + pqw_{21} + pqw_{12} + q(q-1)w_{22} - (n-1)(pu_1 + qu_2)}{pv_1 + qv_2 - (n-1)}. \end{aligned}$$

فرض کنید $\lambda_2 \le \lambda_1$ باشد. بنابراین تحت فرضیات $p^* \le p \le q \le q^*$ و $(p,q) \preceq_w (p^*,q^*)$، کافی است نشان داده شود $k(p,q) \le k(p^*,q^*)$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial k(p,q)}{\partial p} - \frac{\partial k(p,q)}{\partial q} &\overset{sgn}{=} \Big[pw_{21} + (q-1)w_{22} - (p-1)w_{11} - qw_{12} \\ &- (n-1)(u_2 - u_1)\Big] \\ &\times [pv_1 + qv_2 - (n-1)] + (pw_{11} + qw_{22})(v_2 - v_1) \\ &\ge \Big[pw_{21} + (q-1)w_{22} - (p-1)w_{11} - qw_{12} \\ &- (n-1)(u_2 - u_1)\Big] \\ &\times [pv_1 + qv_2 - (n-1)] + (pv_1 + qv_2)(u_1v_2 - u_1v_1) \\ &= [pw_{21} + (q-1)w_{22} - pw_{11} - (q-1)w_{12} - (n-1)(u_2 - u_1)] \\ &\times [pv_1 + qv_2 - (n-1)] + (n-1)(w_{12} - w_{11}) \\ &\ge (u_2 - u_1)\big[pv_1 + (q-1)v_2 - (n-1)\big] + (n-1)(w_{12} - w_{11}) \ge 0, \end{aligned}$$

که در آن دو نابرابری آخر، براساس $0 \le u_1 \le u_2$ و $1 \le v_1 \le v_2$ برقرار است. لذا

$$\frac{\partial k(p,q)}{\partial p} \ge \frac{\partial k(p,q)}{\partial q} \ge 0.$$

اکنون نتیجه لازم با استفاده از لم ۱ حاصل می‌شود.

بحث و نتیجه‌گیری

در این مقاله، ترتیب نرخ خطر میان سیستم‌های $(n-۱)$ از n مورد بحث قرار گرفته است. تحت شرایطی روی پارامترهای مقیاس و بیشاندن ضعیف از پایین میان بردار اندازه نمونه‌ها، ترتیب نرخ خطر میان سیستم‌های $(n-۱)$ از n متشکل از مولفه‌های نرخ خطر متناسب اصلاح شده، اثبات شده است.

تقدیر و تشکر

نویسندگان از پیشنهادات ارزنده سردبیر ارجمند و داوران گرامی که باعث اصلاحات سازنده و ارتقای مقاله شده است کمال قدردانی را دارند. این مقاله با حمایت مالی دانشگاه زابل با شماره گرنت $GR-UOZ-۳۳۸۹$ انجام شده است.

مراجع

امینی سرشت، ا. برمال‌زن، ق. (۱۳۹۹)، ترتیب نسبت درست‌نمایی میان سیستم‌های k از n متشکل از مولفه‌های مقیاس با چندین دورافتاده، مجله علوم آماری، ۱۴، ۳۳۵-۳۵۰.

امینی سرشت، ا. برمال‌زن، ق. (۱۴۰۰)، مقایسه‌های تصادفی سیستم‌های موازی و سری متشکل از مولفه‌های مقیاس با چندین دورافتاده، مجله علوم آماری، ۱۵، ۳۴۱-۳۶۲.

برمال‌زن، ق. حیدری، ع. معصومی‌فرد، خ. (۱۳۹۴)، مقایسه تصادفی سیستم‌های سری و موازی در مدل مقیاس، مجله علوم آماری، ۹، ۲۰۶-۱۸۹.

Amini-Seresht, E., Qiao, J., Zhang, Y. and Zhao, P. (2016), On the Skewness of Order Statistics in Multiple-Outlier PHR Models, *Metrika*, **79**, 817-836.

Balakrishnan, N., Barmalzan, G. and Haidari, A. (2018), Modified Proportional Hazard Rates and Proportional Reversed Hazard Rates Models via Marshall-Olkin Distribution and Some Stochastic Comparisons, *Journal of the Korean Statistical Society,* **47**, 127-138.

Balakrishnan, N., Haidari, A. and Barmalzan, G. (2015), Improved Ordering Results for Fail-Safe Systems with Exponential Components, *Communications in Statistics-Theory and Methods*, **44**, 2010-2023.

Balakrishnan, N. and Lai, C-D. (2009), *Continuous Bivariate Distributions*. Second edition. Springer, New York.

Barlow, R. E. and Proschan, F. (1996), Mathematical Theory of Reliability, *Society for Industrial and Applied Mathematics*. Philadelphia.

Cai, X., Zhang, Y. and Zhao, P. (2017), Hazard Rate Ordering of the Second Order Statistics from Multiple-Outlier PHR Samples, *Statistics*, **51**, 615-626.

Cordeiro, G. M., Lemonte, A. J. and Ortega, E. M. M. (2014), The Marshall-Olkin Family of Distributions: Mathematical Properties and New Models, *Journal of Statistical Theory and Practice*, **8**, 343-366.

Cordeiro, G.M. and Lemonte, A.J. (2013), On the Marshall-Olkin Extended Weibull Distribution, *Statistical Papers*, **54**, 333-353.

Ghitany, M.E., Al-Awadhi, F.A. and Alkhalfan, L.A. (2007), Marshall-Olkin Extended Lomax Distribution and Its Application to Censored Data, *Communications in Statistics-Theory and Methods*, **36**, 1855-1866.

Ghitany, M.E. and Kotz. S. (2007), Reliability Properties of Extended Linear Failure Rate Distributions, *Probability in the Engineering and Informational Sciences*, **21**, 441-450.

Kirmani, S.N.U.A. and Gupta, R.C. (2001), On the Proportional Odds Model in Survival Analysis.*Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, **53**, 203-216.

Marshall, A.W. and Olkin, I. (1997), A New Method of Adding a Parameter to a Family of Distributions with Applications to the Exponential and Weibull Families, *Biometrika*, **84**, 641-652.

Marshall, A.W. and Olkin, I. (2007), *Life Distributions*, Springer, New York.

Marshall, A.W., Olkin, I. and Arnold, B.C. (2011), *Inequalities: Theory of Majorization and Its Applications*, Springer, New York.

Müller, A. and Stoyan, D. (2002), *Comparison Methods for Stochastic Models and Risks.* John Wiley & Sons, New York.

Nanda, A. K. and Das, S. (2013), Some Ageing Properties of Marshall-Olkin Extended Distribution, *International Journal of Mathematics and Statistics,* **13**, 93-107.

Shaked, M. and Shanthikumar, J. G. (2007), *Stochastic Orders*, Springer, New York.

Zhang, Y., Amini-Seresht, E. and Zhao, P. (2019), On Fail-Safe Systems under Random Shocks, *Applied Stochastic Models in Business and Industry*, **35**, 591-602.

Zhao, P. and Balakrishnan, N. (2012), Stochastic Comparisons of Largest Order Statistics from Multiple-Outlier Exponential Models, *Probability in the Engineering and Informational Sciences*, **26**, 159-182.

Zhao, P. and Balakrishnan, N. (2015), Comparisons of Largest Order Statistics from Multiple-Outlier Gamma Models, *Methodology and Computing in Applied Probability*, **17**, 617-645.