Journal of Statistical Sciences, Spring and Summer, 2022
Vol. 16, No. 1, pp 165-188
DOI: 10.29252/jss.16.1.165

Inverse Weibull-Poisson Distribution and Estimation of its Parameters in Type-II Censored Data

Obeidi, R., Nasiri, P.
Department of Statistics, Payame Noor University, Tehran, Iran.

Corresponding author: P. Nasiri, pnasiri@pnu.ac.ir

Received: 3 March 2022 **Revised:** 25 June 2022 **Accepted and Published Online:** 7 July 2022.

Introduction

In lifetime studies consider that different components cause the failure of the unit/item under study but of the same type that is not entirely observed. In this case, the failure time of the unit/item is recorded and evaluated based on the information obtained from the observation and as the minimum value among other components affecting failure. The experimenter cannot identify the component that led to the unit's failure. In the study of series systems, the minimum component lifetime among the effective components leads to failure and is observed. In recent literature, Adamidis and Loukas (1998) used the geometric distribution function as the number of failure components and introduced a two-parameter exponential-geometric distribution with a descending failure rate. In applying compounding distributions of lifetime study, the experimenter may face the phenomenon of censoring. Because there are cases in which the units/items, although alive, are lost or removed. In this study, type-II of censoring has been investigated. Recently, the inverse Weibull distribution in censored data has been studied by Ateya (2017), Singh and Tripathi (2018). This paper presents the inverse Weibull-Poisson distribution function in the series system of the type-II censored sample.

Material and Methods

This paper considers the classical and Bayesian estimation of parameters of inverse Weibull-Poisson distribution function under the type-II censoring. Since the normal equations are not solved analytically, the EM algorithm, as the numerical method, is used in estimating the maximum likelihood methods. Little and Rubin (1983) showed that the EM algorithm is more reliable than the Newton-Raphson method in the case of incomplete data. Then, the Fisher information matrix for censored data is obtained with the principle of Louis (1982), and the approximate confidence intervals can be calculated. Parameters are estimated under the square error and LINEX loss functions while Gamma distribution is prior distribution. In Bayesian estimation, since the posterior distribution is not obtained in closed form, parameters are estimated with Markov chain Monte Carlo techniques and samples are generated by Gibbs sampling via the Metropolis-Hastings algorithm. Finally, the Bayesian confidence intervals are obtained using Kundu (2008), and the HPD intervals are constructed with Chen and Shao (1999) methods.

Results and Discussion

To evaluate the performance of estimators in terms of MSE's and their corresponding confidence intervals, it is generated 10000 samples for different sample sizes and three censoring schemes.

Conclusion

The simulation results show that with decreasing number of censors for a fixed sample size, the estimation of the parameters is closer to the actual values, and the MSE are reduced. Moreover, with an increasing sample size, the MSE of parameters is reduced for a fixed censoring scheme. For the 30% censoring scheme, Bayesian estimators of the parameters under the square error loss function have small MSE. The maximum likelihood estimators of parameters for the 10% censoring scheme have small MSE. The simulation results using confidence intervals show that the length of confidence intervals is reduced for a fixed sample size with decreasing number of censored. Moreover, the classical confidence intervals have the shortest interval length for all censoring schemes. The length of the HPD confidence intervals is shorter than the Bayesian confidence intervals.

Keywords: Compound Distribution, Inverse Weibull Distribution, Type-II Censoring.

Mathematics Subject Classification (2010): 62F15, 62N01.

مجله علوم آماری، بهار و تابستان ۱۴۰۱
جلد ۱۶، شماره ۱، ص ۱۶۵ – ۱۸۸
DOI: 10.29252/jss.16.1.165
مقاله پژوهشی

توزیع وایبول وارون–پواسن و برآورد پارامترهای آن تحت داده‌های سانسورشده نوع دوم

رئوف عبیدی، پرویز نصیری

گروه آمار، دانشگاه پیام نور، تهران، ایران.

نویسنده مسئول : پرویز نصیری، pnasiri@pnu.ac.ir

تاریخ دریافت: ۱۴۰۰/۱۲/۱۲ تاریخ بازنگری: ۱۴۰۱/۳/۱۲ تاریخ پذیرش و انتشار: ۱۴۰۱/۴/۱۶

چکیده: مطالعه برازش داده‌های طول عمر به کمک توزیع‌های مرکب از جمله توزیع‌های مرکب وایبول وارون اخیراً مورد توجه تعداد زیادی از محققان قرار گرفته است. در این مقاله پس از ارائه توزیع مرکب وایبول وارون–پواسن، برازش داده‌های طول عمر سانسورشده مورد بررسی قرار می‌گیرد. حضور پارامترهای مقیاس، شکل و نرخ شکست در این توزیع، نیازمند بررسی از حیث برآورد و آزمون فرضیه از اهمیت خاصی برخوردار است، لذا پارامترها تحت سانسور نوع دوم با استفاده از روش‌های ماکسیمم درستنمایی و بیزی برآورد می‌شوند. در برآورد بیزی پارامترها تحت توابع زیان مختلف براساس توزیعهای پیشین مناسب برآورد می‌شوند. در بخش شبیه‌سازی، فاصله اطمینان متقارن و فاصله اطمینان بیزی با بالاترین چگالی پسین ارائه و برآوردگرها با استفاده از معیارهای آماری مورد مقایسه قرار می‌گیرد. در پایان نیکویی برازش توزیع وایبول وارون–پواسن با استفاده از یک مجموعه داده واقعی در مقایسه با سایر توزیع‌های مرکب مورد ارزیابی قرار می‌گیرد.

واژه‌های کلیدی: توزیع مرکب، وایبول‌وارون، سانسور نوع دوم.
کد موضوع‌بندی ریاضی (۲۰۱۰): 62F15، 62N01.

۱ مقدمه

در مطالعات مربوط به طول عمر، شرایطی را درنظر بگیرید که دلیل شکست واحد مورد مطالعه معلول مؤلفه‌های مختلف ولی از نوع یکسان است که به طور کامل قابل مشاهده نمی‌باشند. در این حالت زمان شکست واحد بر اساس

اطلاعات حاصل از مشاهده و به عنوان کمترین مقدار در بین دیگر مؤلفه‌های مؤثر در شکست، مورد ثبت و بررسی قرار می‌گیرد. از آنجا که آزمایشگر نمی‌تواند عوامل متعددی را که منجر به شکست واحد یا واحدها می‌شود مورد مطالعه قرار دهد، آن را پنهان یا به عنوان ریسک مکمل[1] مدنظر قرار می‌دهد. برای نمونه در بررسی سیستم‌های سری[2] در قابلیت اعتماد، کمترین مقدار طول عمر یک مؤلفه از بین مؤلفه‌های مؤثر، منجر به شکست شده و قابل رؤیت است. برای مطالعه بیشتر به کاکس و اکس (۱۹۸۴)، کرادر و همکاران (۱۹۹۱) و لاولس (۲۰۰۳) مراجعه شود. اخیرا محققان زیادی به مطالعه توزیع‌های مرکب[3] با تعداد مؤلفه‌های شکست گسسته پرداخته‌اند. آدامیدیس و لوکاس (۱۹۹۸) توزیع تعداد مؤلفه‌های شکست را هندسی قرار داده و به معرفی توزیع دو پارامتری مرکب نمایی-هندسی با نرخ شکست نزولی پرداختند. کاس (۲۰۰۷) از ترکیب دو توزیع نمایی و پواسن توزیعی دو پارامتری با نرخ شکست نزولی را معرفی کرد. طهماسبی و رضایی (۲۰۰۸) توزیع نمایی را با توزیع لگاریتمی ترکیب و توزیع دو پارامتری با نرخ شکست نزولی معرفی کرده‌اند. چهکندی و گنجعلی (۲۰۰۹) با ترکیب توزیع‌های نمایی و سری‌های توانی[4] به یک توزیع دو پارامتری و نرخ شکست نزولی دست یافتند. همچنین بارتو-سوزا و کاریباری-نتو (۲۰۰۹)، سیلوا و همکاران (۲۰۱۰)، بارتو-سوزا و همکاران (۲۰۱۱)، همتی و همکاران (۲۰۱۱)، محمودی و سپهدار (۲۰۱۳)، شفیعی و همکاران (۲۰۱۶) و چاکرابارتی و چودهوری (۲۰۱۹) مطالعاتی در خصوص توزیع‌های مرکب نمایی تعمیم‌یافته- پواسن، نمایی تعمیم‌یافته-هندسی، وایبول-هندسی، وایبول-پواسن، وایبول تعمیم‌یافته-پواسن، وایبول وارون-سری‌های توانی و وایبول وارون-هندسی و پواسن پرداختند.

در کاربرد توزیع‌های مرکب، یکی از مواردی که آزمایشگر درخصوص مطالعات طول عمر با آن مواجه است، پدیده سانسور است، که در آن واحدهای آزمایش علی‌رغم سالم بودن، گم شده یا از آزمایش خارج می‌شوند. در این پژوهش، سانسور نوع دوم مورد بررسی قرار گرفته است. در این حالت آزمایش تا زمان وقوع شکست $r-$ امین واحد ادامه می‌یابد، به طوری که مقدار r ثابت و از پیش تعیین شده است. در این صورت تابع درستنمایی مشاهدات $y_1 < \cdots < y_r$ برای تابع چگالی مفروض به صورت

$$L(\boldsymbol{\eta};\mathbf{y}) = \frac{n!}{(n-r)!}\prod_{i=1}^{r} f(y_i;\boldsymbol{\eta})[1-F(y_r;\boldsymbol{\eta})]^{n-r} \qquad (1)$$

است، که در آن $\boldsymbol{\eta}$ پارامترهای توزیع و y_r زمان شکست $r-$امین واحد آزمایش است.

مرادی و همکاران (۱۳۹۳) برآورد پارامترهای توزیع بور نوع سوم نمایی با در نظر گرفتن سانسور نوع دوم برای طول عمر مبتلایان به سرطان گلبول سفید مورد بررسی قرار دادند. سولطان و همکاران (۲۰۱۴) به بررسی برآورد پارامترهای توزیع وایبول وارون در داده‌های سانسور فزاینده[5] پرداختند. عطی‌یا (۲۰۱۷) توزیع وایبول وارون

[1] Complementary risk
[2] Series system
[3] Compound
[4] Power series
[5] Progressive censoring

را برای بررسی قدرت کشش فیبرهای کربن به کار برد و سینگ و تریپاتی (۲۰۱۸) آن را برای داده‌های بدست آمده از مطالعات بیماران HIV برازش دادند. در مورد دیگر مدل‌های سانسورشده نیز سینگ و همکاران (۲۰۱۴)، کومار و همکاران (۲۰۱۵، ۲۰۱۸) و پتک و همکاران (۲۰۲۲) به ترتیب در توزیع‌های نمایی، گامای نمایی شده، توزیع مرکب نمایی وارون-پواسن و توزیع مرکب وایبول-پواسن مورد بررسی قرار دادند. کهنسال و همکاران (۱۳۹۹) به برآورد بیزی پارامتر تنش و مقاومت[1] در توزیع لوماکس تحت سانسور فزاینده پیوندی پرداختند. بر اساس بررسی‌های انجام گرفته تاکنون پژوهشی در خصوص برآورد پارامترهای توزیع مرکب وایبول وارون-پواسن در داده‌های سانسور نوع دوم صورت نگرفته است. بنابراین در این مقاله به برآورد ماکسیمم درستنمایی پارامترها با استفاده از الگوریتم EM و برآوردهای بیزی پارامترهای مدل تحت توابع زیان مختلف پرداخته شده است. ادامه مقاله به این صورت است، که در بخش ۲ ضمن معرفی تابع توزیع مرکب وایبول وارون-پواسن، ویژگی‌های آن مورد بررسی قرار می‌گیرد. در بخش ۳، برآورد ماکسیمم درستنمایی پارامترها با توجه به داده‌های سانسور شده با استفاده از الگوریتم EM ارائه می‌شود. در بخش ۴ برآورد بیزی پارامترها بر اساس توزیع‌های پیشین گاما انجام گرفته است. در بخش ۵ مطالعه شبیه‌سازی، در بخش ۶ مطالعه داده‌های واقعی و در بخش ۷ به ارائه بحث و نتیجه‌گیری پرداخته شده است.

۲ توزیع وایبول وارون-پواسن

فرض کنید متغیر تصادفی N بیانگر تعداد مؤلفه‌های شکست با تابع احتمال پواسن بریده شده در صفر به صورت

$$P(N=n)=\frac{e^{-\mu}\mu^n}{n!(1-e^{-\mu})}\quad,\quad \mu>0, n=1,2,\dots \tag{2}$$

باشد. با فرض اینکه نمونه تصادفی X_i، $i=1,\dots,N$ دارای تابع توزیع وایبول وارون با پارامتر شکل $\alpha>0$ و پارامتر مقیاس $\lambda>0$، نشان‌دهنده زمان‌های مؤلفه‌های شکست سیستم با تابع چگالی $f(\cdot)$ و تابع توزیع تجمعی $F(\cdot)$ به صورت

$$f(x;\alpha,\lambda)=\alpha\lambda x^{-(\alpha+1)}e^{-\lambda x^{-\alpha}}\quad x>0, \alpha,\lambda>0 \tag{3}$$

$$F(x;\alpha,\lambda)=e^{-\lambda x^{-\alpha}}\quad x>0, \alpha,\lambda>0 \tag{4}$$

[1] Stress-strength

باشد. اگر متغیر تصادفی $Y=\min\{X_i\}$، $1\leq i\leq N$ مستقل از N باشد، آنگاه توابع توزیع و چگالی شرطی آن به ترتیب عبارتند از

$$F_{Y|N=n}(y;\alpha,\lambda)=1-(1-e^{-\lambda y^{-\alpha}})^n,\ \ y>0,\ \alpha,\lambda>0$$
$$f_{Y|N=n}(y;\alpha,\lambda)=n\alpha\lambda e^{-\lambda y^{-\alpha}}y^{-(\alpha+1)}(1-e^{-\lambda y^{-\alpha}})^{n-1},\ \ y>0,\ \alpha,\lambda>0$$

در این حالت توابع چگالی و توزیع متغیر تصادفی Y به ترتیب به صورت

$$f(y;\alpha,\lambda,\mu)=\frac{\alpha\lambda\mu}{e^{\mu}-1}y^{-(\alpha+1)}e^{-\lambda y^{-\alpha}}e^{\mu(1-e^{-\lambda y^{-\alpha}})},\ \ y>0,\ \alpha,\lambda,\mu>0 \tag{۵}$$

$$F(y;\alpha,\lambda,\mu)=\frac{1-e^{\mu e^{-\lambda y^{-\alpha}}}}{1-e^{-\mu}},\ \ y>0,\ \alpha,\lambda,\mu>0 \tag{۶}$$

هستند. اگر $\alpha=1$ و $\alpha=2$، در نظر گرفته شود، به ترتیب توزیع نمایی وارون-پواسن و توزیع رایلی وارون-پواسن به دست می‌آید و برای $\lambda=1$ توزیع فرچت-پواسن [1] و $\mu\to 0$ توزیع وایبول وارون بدست می‌آید. با قرار دادن روابط (۵) و (۶) در رابطه (۱)، تابع درستنمایی وایبول وارون-پواسن با داده‌های سانسور نوع دوم به صورت زیر حاصل خواهد شد.

$$\begin{aligned}L(\boldsymbol{\eta};\mathbf{y}) &= \frac{n!}{(n-r)!}(\alpha\lambda\mu)^r\frac{\left(\prod_{i=1}^r y_i\right)^{-(\alpha+1)}e^{-\lambda\sum_{i=1}^r y_i^{-\alpha}+\mu(n-\sum_{i=1}^r e^{-\lambda y_i^{-\alpha}})}}{(e^{\mu}-1)^n}\\ &\times\ (1-e^{-\mu e^{-\lambda y_r^{-\alpha}}})^{n-r}\end{aligned}$$

۳ برآورد ماکسیمم درستنمایی پارامترهای توزیع وایبول وارون-پواسن

فرض کنید $y_r<\cdots<y_1$ داده‌های سانسور شده حاصل از تابع چگالی وایبول وارون-پواسن (۵) باشد، در این صورت لگاریتم تابع درستنمایی، به صورت

$$\ell(\boldsymbol{\eta};\mathbf{y})=\ln\Big(\frac{n!}{(n-r)!}\Big)+r\ln(\alpha\lambda\mu)-(\alpha+1)\sum_{i=1}^r\ln(y_i)-\lambda\sum_{i=1}^r y_i^{-\alpha} \tag{۷}$$
$$(n-r)\mu+\mu\sum_{i=1}^r A_i-n\ln(e^{\mu}-1)+(n-r)\ln(1-e^{-\mu e^{-\lambda y_r^{-\alpha}}})$$

---
[1]Fréchet-Poisson

است، که در آن $A_i = 1 - e^{-\lambda y_i^{-\alpha}}$ و $A_r = 1 - e^{-\lambda y_r^{-\alpha}}$ است. مشتقات جزئی $\ell(\boldsymbol{\eta};\mathbf{y})$ نسبت به پارامترها به صورت

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \ell(\boldsymbol{\eta};\mathbf{y})}{\partial \alpha} &= \frac{r}{\alpha} - \sum_{i=1}^{r} \ln(y_i) + \lambda \sum_{i=1}^{r} \ln(y_i) y_i^{-\alpha}(1 - \mu e^{-\lambda y_i^{-\alpha}}) \\
&+ (n-r)\frac{\lambda\mu \ln(y_r) y_r^{-\alpha} e^{-\lambda y_r^{-\alpha} - \mu e^{-\lambda y_r^{-\alpha}}}}{1 - e^{-\mu e^{-\lambda y_r^{-\alpha}}}} = 0, \\
\frac{\partial \ell(\boldsymbol{\eta};\mathbf{y})}{\partial \lambda} &= \frac{r}{\lambda} - \sum_{i=1}^{r} y_i^{-\alpha} - \sum_{i=1}^{r} y_i^{-\alpha}(1 - \mu e^{-\lambda y_i^{-\alpha}}) \\
&- (n-r)\frac{\mu y_r^{-\alpha} e^{-\lambda y_r^{-\alpha} - \mu e^{-\lambda y_r^{-\alpha}}}}{1 - e^{-\mu e^{-\lambda y_r^{-\alpha}}}} = 0, \\
\frac{\partial \ell(\boldsymbol{\eta};\mathbf{y})}{\partial \mu} &= \frac{r}{\mu} - \frac{n}{e^{\mu} - 1} - \sum_{i=1}^{r} e^{-\lambda y_i^{-\alpha}} + (n-r)\frac{e^{-\lambda y_r^{-\alpha} - \mu e^{-\lambda y_r^{-\alpha}}}}{1 - e^{-\mu e^{-\lambda y_r^{-\alpha}}}} = 0.
\end{aligned}$$

هستند. چون این معادلات تابع صریحی از پارامترها نیستند، حل تحلیلی آنها میسر نیست و برای حل آنها می‌توان از روش‌های عددی مانند الگوریتم EM استفاده کرد. لیتل و روبین (۱۹۸۳) نشان دادند که این الگوریتم بر خلاف روش نیوتن-رافسون در شرایطی که داده‌ها گمشده‌اند، مقادیر بهتری را نتیجه می‌دهند.

۳.۱ الگوریتم EM

الگوریتم EM یک روش مؤثر در برآورد پارامترهای مدل در حالتی که داده‌های مشاهده شده کامل نیستند، بوده که توسط دمپستر و همکاران (۱۹۷۷) معرفی شده است. نظر به اینکه الگوریتم EM دارای دو گام است در گام اول که گام-E[1] نامیده می‌شود اقدام به محاسبه امید ریاضی تابع شبه لگاریتم درستنمایی نموده و در گام دوم که گام-M[2] نام دارد، نسبت به پارامترهای های مدل، ماکسیمم می‌شود. برای استفاده از الگوریتم EM تابع توزیع توام احتمال برای هر (n_i, y_i)، $i = 1, \ldots, n$ به صورت

$$f(n_i, y_i; \boldsymbol{\eta}) = \frac{\alpha\lambda\mu}{(n_i - 1)!(e^{\mu} - 1)} y_i^{-(\alpha+1)} e^{-\lambda y_i^{-\alpha}} \left(\mu(1 - e^{-\lambda y_i^{-\alpha}})\right)^{n_i - 1} \qquad (۸)$$
$$y_i > 0,\ \alpha, \lambda, \mu > 0,\ n_i = 1, 2, \ldots$$

---
[1] Expectation
[2] Maximization

نوشته می‌شود، که در آن n_i، تعداد مؤلفه‌های شکست در مشاهده iام است. حال لگاریتم تابع درستنمایی به صورت

$$\begin{aligned}\ell_c(\boldsymbol{\eta};\mathbf{y}) = n\ln(\alpha\lambda\mu) - \sum_{i=1}^{r}\ln(n_i-1)! - n\ln(e^{\mu}-1) - (\alpha+1)\sum_{i=1}^{r}\ln(y_i)\\ -\lambda\sum_{i=1}^{r}y_i^{-\alpha} + \sum_{i=1}^{r}(n_i-1)\ln\big(\mu(1-e^{-\lambda y_i^{-\alpha}})\big) - (\alpha+1)\sum_{i=r+1}^{n}\ln(y_i)\\ -\lambda\sum_{i=r+1}^{n}y_i^{-\alpha} + \sum_{i=r+1}^{n}(n_i-1)\ln\big(\mu(1-e^{-\lambda y_i^{-\alpha}})\big).\end{aligned}$$

خواهد شد. درگام-E امیدریاضی لگاریتم تابع درستنمایی، برای داده‌های سانسور شده به صورت زیر حاصل می‌شود.

$$\begin{aligned}E(\ell_c(\boldsymbol{\eta};\mathbf{y})) &= n\ln(\alpha\lambda\mu) - \sum_{i=1}^{r}\ln(n_i-1)! - n\ln(e^{\mu}-1) - (\alpha+1)\sum_{i=1}^{r}\ln(y_i)\\ &- \lambda\sum_{i=1}^{r}y_i^{-\alpha} + \sum_{i=1}^{r}\big(E(N_i|y_i)-1\big)\ln\big(\mu(1-e^{-\lambda y_i^{-\alpha}})\big)\\ &- (\alpha+1)\sum_{i=r+1}^{n}E\big(\ln(Y_i)|Y_i\geq y_r\big) - \lambda\sum_{i=r+1}^{n}E(Y_i^{-\alpha}|Y_i\geq y_r)\\ &+ \ln(\mu)\sum_{i=r+1}^{n}\big(E(N_i|Y_i\geq y_r)-1\big)\\ &+ \sum_{i=r+1}^{n}\big((E(N_i|Y_i\geq y_r)-1)\ln(1-e^{-\lambda y_i^{-\alpha}})\big). \qquad (9)\end{aligned}$$

قضیه ۱. اگر N دارای توزیع پواسن، Y دارای توزیع وایبول وارون-پواسن و (N,Y) دارای توزیع (۸) باشد، آنگاه
الف) برای مقادیر مشاهده شده،

$$E(N_i|y_i) = \mu A_i + 1,\quad i=1,\ldots,r \qquad (10)$$

ب) برای مقادیر سانسورشده،

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(\boldsymbol{\eta}) &= E(\ln(Y_i)|Y_i\geq y_r),\quad i=r+1,\ldots,n &(11)\\ \mathcal{F}(\boldsymbol{\eta}) &= E(Y_i^{-\alpha}|Y_i\geq y_r),\quad i=r+1,\ldots,n &(12)\\ E(N_i|Y_i\geq y_r) &= \frac{\mu A_r}{1-e^{-\mu A_r}},\quad i=r+1,\ldots,n &(13)\end{aligned}$$

برهان: الف) تابع چگالی شرطی $f(n_i|y_i)$ و $E(N_i|y_i)$ به ترتیب عبارتند از

$$\begin{aligned}
f(n_i|y_i) &= \frac{e^{-\mu(1-e^{-\lambda y_i^{-\alpha}})}}{(n_i-1)!}\big(\mu(1-e^{-\lambda y_i^{-\alpha}})\big)^{n_i-1}, y_i>0, \alpha,\lambda,\mu>0, n_i=1,2,\ldots\\
E(N_i|y_i) &= \sum_{n_i=1}^{\infty} n_i \frac{e^{-\mu(1-e^{-\lambda y_i^{-\alpha}})}}{(n_i-1)!}\big(\mu(1-e^{-\lambda y_i^{-\alpha}})\big)^{n_i-1}\\
&= e^{-\mu(1-e^{-\lambda y_i^{-\alpha}})}\sum_{n_i=1}^{\infty}\frac{n_i(n_i-1)}{n_i!}\big(\mu(1-e^{-\lambda y_i^{-\alpha}})\big)^{n_i-1}\\
&+ e^{-\mu(1-e^{-\lambda y_i^{-\alpha}})}\sum_{n_i=1}^{\infty}\frac{\big(\mu(1-e^{-\lambda y_i^{-\alpha}})\big)^{n_i-1}}{(n_i-1)!}\\
&= e^{-\mu(1-e^{-\lambda y_i^{-\alpha}})}\big\{\mu(1-e^{-\lambda y_i^{-\alpha}})e^{\mu(1-e^{-\lambda y_i^{-\alpha}})}+e^{\mu(1-e^{-\lambda y_i^{-\alpha}})}\big\}\\
&= \mu(1-e^{-\lambda y_i^{-\alpha}})+1=\mu A_i+1.
\end{aligned}$$

ب) با توجه به رابطه (۵)،

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}(\boldsymbol{\eta}) &= E(\ln(Y_i^{-\alpha})|Y_i\geq y_r)) = \int_{y_r}^{\infty}\ln(y_i)f(y_i|Y_i\geq y_r)dy\\
&= \int_{y_r}^{\infty}\ln(y_i)\frac{f(y_i;\boldsymbol{\eta})}{P(Y_i\geq y_r)}dy\\
&= \frac{\alpha\lambda\mu}{e^{\mu(1-e^{-\lambda y_i^{-\alpha}})}}\int_{y_r}^{\infty}\ln(y_i)y_i^{-(\alpha+1)}e^{-\lambda y_i^{-\alpha}}e^{\mu(1-e^{-\lambda y_i^{-\alpha}})}dy,
\end{aligned}$$

با درنظر گرفتن $\upsilon=\frac{y_r}{y_i}$، می‌توان نوشت

$$\mathcal{E}(\boldsymbol{\eta}) = \frac{\alpha\lambda\mu y_r^{-\alpha}}{e^{\mu(1-e^{-\lambda y_r^{-\alpha}})}-1}\int_0^1\ln(\frac{y_r}{\upsilon})\upsilon^{\alpha-1}e^{-\lambda(\frac{y_r}{\upsilon})^{-\alpha}}e^{\mu\left(1-e^{-\lambda(\frac{y_r}{\upsilon})^{-\alpha}}\right)}d\upsilon.$$

همچنین با توجه به رابطه (۱۲)،

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(\boldsymbol{\eta}) &= E(Y_i^{-\alpha}|Y_i\geq y_r) = \int_{y_r}^{\infty}y_i^{-\alpha}f(y_i|Y_i\geq y_r)dy = \int_{y_r}^{\infty}y_i^{-\alpha}\frac{f(y_i;\boldsymbol{\eta})}{P(Y_i\geq y_r)}dy\\
&= \frac{\alpha\lambda\mu}{e^{\mu(1-e^{-\lambda y_r^{-\alpha}})}-1}\int_{y_r}^{\infty}y_i^{-(2\alpha+1)}e^{-\lambda y_r^{-\alpha}}e^{\mu(1-e^{-\lambda y_r^{-\alpha}})}dy,
\end{aligned}$$

با درنظر گرفتن $\upsilon = \frac{y_r}{y_i}$، می‌توان نوشت؛

$$\mathcal{F}(\boldsymbol{\eta}) = \frac{\alpha\lambda\mu y_r^{-۲\alpha}}{e^{\mu(۱-e^{-\lambda y_r^{-\alpha}})} - ۱} \int_۰^۱ \upsilon^{۲\alpha-۱} e^{-\lambda(\frac{y_r}{\upsilon})^{-\alpha}} e^{\mu\left(۱-e^{-\lambda(\frac{y_r}{\upsilon})^{-\alpha}}\right)} d\upsilon.$$

با توجه به رابطه (۸)،

$$\begin{aligned} f(n_i|Y_i \geq y_r) &= \int f(n_i, y_i|Y_i \geq y_r)dy = \int_{y_r}^{\infty} \frac{f(n_i, y_i)}{P(Y_i \geq y_r)}dy \\ &= \frac{\left(\mu(۱-e^{-\lambda y_r^{-\alpha}})\right)^{n_i}}{n_i!\left(e^{\mu(۱-e^{-\lambda y_r^{-\alpha}})} - ۱\right)}. \end{aligned}$$

بنابراین

$$\begin{aligned} E(N_i|Y_i \geq y_r) &= \sum_{n_i=۱}^{\infty} n_i f(n_i|Y \geq y_r) \\ &= \frac{\mu(۱-e^{-\lambda y_r^{-\alpha}})}{e^{\mu(۱-e^{-\lambda y_r^{-\alpha}})} - ۱} \sum_{n_i=۱}^{\infty} \frac{\left(\mu(۱-e^{-\lambda y_r^{-\alpha}})\right)^{n_i-۱}}{(n_i-۱)!} \\ &= \frac{\mu(۱-e^{-\lambda y_r^{-\alpha}})}{۱-e^{-\mu(۱-e^{-\lambda y_r^{-\alpha}})}} = \frac{\mu A_r}{۱-e^{-\mu A_r}}. \end{aligned}$$

پس از جایگذاری روابط (۱۰) تا (۱۳) در رابطه (۹)، درگام-M نسبت به پارامترها ماکسیمم شده و با حل معادلات

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ell_c(\boldsymbol{\eta};\mathbf{y})}{\partial \alpha} =& \frac{n}{\alpha^{(t+۱)}} - \sum_{i=۱}^{r} \ln(y_i) + \lambda^{(t+۱)} \sum_{i=۱}^{r} \ln(y_i) y_i^{-\alpha^{(t+۱)}} \\ & - \sum_{i=۱}^{r} \frac{\lambda^{(t+۱)}\mu^{(t)} A_i^{(t)} y_i^{-\alpha^{(t+۱)}} \ln(y_i)(۱-A_i^{(t+۱)})}{A_i^{(t+۱)}} - (n-r)\mathcal{E}(\boldsymbol{\eta}^{(t)}) = ۰ \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \ell_c(\boldsymbol{\eta};\mathbf{y})}{\partial \lambda} = \frac{n}{\lambda^{(t+۱)}} - \sum_{i=۱}^{r} y_i^{-\alpha^{(t+۱)}} + \sum_{i=۱}^{r} \frac{\mu^{(t)} A_i^{(t)} y_i^{-\alpha^{(t+۱)}} e^{-\lambda^{(t+۱)}}}{A_i^{(t+۱)}} - (n-r)\mathcal{F}(\boldsymbol{\eta}^{(t)}) = ۰$$

$$\frac{\partial \ell_c(\boldsymbol{\eta};\mathbf{y})}{\partial \mu} = \frac{-ne^{\mu^{(t+۱)}}}{e^{\mu^{(t+۱)}} - ۱} + \sum_{i=۱}^{r} \frac{\mu^{(t)}\left(۱-e^{-\lambda^{(t)}} y_i^{-\alpha^{(t)}}\right)}{\mu^{(t+۱)}} + \frac{(n-r)\mu^{(t)} A_r^{(t)}}{\mu^{(t+۱)}\left(۱-e^{-\mu^{(t)} A_r^{(t)}}\right)} = ۰$$

مقادیر $\big(\alpha^{(t+1)}, \lambda^{(t+1)}, \mu^{(t+1)}\big)$ بدست می‌آیند. بنابراین برآورد پارامترها به صورت زیر خواهند بود؛

$$\begin{aligned}\alpha^{(t+1)} =& n\{\sum_{i=1}^{r}\ln(y_i) - \lambda^{(t+1)}\sum_{i=1}^{r}\ln(y_i)y_i^{-\alpha^{(t+1)}}\\ &+\sum_{i=1}^{r}\frac{\lambda^{(t+1)}\mu^{(t)}A_i^{(t)}y_i^{-\alpha^{(t+1)}}\ln(y_i)(1-A_i^{(t+1)})}{A_i^{(t+1)}}\\ &+(n-r)\mathcal{E}(\boldsymbol{\eta}^{(t)})\}^{-1},\\ \lambda^{(t+1)} =& n\{-\sum_{i=1}^{r}y_i^{-\alpha^{(t+1)}}+\sum_{i=1}^{r}\frac{\mu^{(t)}A_i^{(t)}y_i^{-\alpha^{(t+1)}}e^{-\lambda^{(t+1)}}}{A_i^{(t+1)}}\\ &-(n-r)\mathcal{F}(\boldsymbol{\eta}^{(t)})\}^{-1},\end{aligned}$$

$$\mu^{(t+1)} = \frac{e^{\mu^{(t+1)}}-1}{ne^{\mu^{(t+1)}}}\{\sum_{i=1}^{r}\mu^{(t)}A_i^{(t)}+\frac{(n-r)\mu^{(t)}A_r^{(t)}}{(1-e^{-\mu^{(t)}A_r^{(t)}})}\}.$$

ذکر این نکته ضروری است که در حالتی که داده سانسور شده در نظر گرفته نشود، این برآوردگرها همان برآوردگرهای ارائه شده در چاکرابارتی و چودهوری (۲۰۱۹) هستند.

۳.۲ ماتریس اطلاع فیشر

در این بخش ماتریس اطلاع فیشر داده‌های مشاهده شده تحت سانسور نوع دوم بر اساس اصل لوئیس (۱۹۸۲) در داده‌های گمشده، ارائه می‌شود. از این روش می توان به محاسبه فاصله اطمینان مجانبی با استفاده از ماتریس اطلاع فیشر نمونه مشاهده شده تحت سانسور نوع دوم پرداخت. به این منظور اگر داده‌های کامل با W، داده‌های مشاهده شده با Y و داده‌های گمشده با $Y|Y\geq y_r$ نشان داده شوند، در این صورت اصل لوئیس به صورت $I_Y(\boldsymbol{\eta}) = I_W(\boldsymbol{\eta}) - I_{Y|Y\geq y_r}(\boldsymbol{\eta})$ است، که در آن $\boldsymbol{\eta}$ بردار پارامترها، $I_W(\boldsymbol{\eta}) = -nE\big(\frac{\partial^2\ln(f(Y;\boldsymbol{\eta}))}{\partial\boldsymbol{\eta}^2}\big)$، $f(y;\boldsymbol{\eta})$ تابع چگالی وایبول وارون-پواسن و $I_{Y|Y\geq y_r} = -(n-r)E\big(\frac{\partial^2\ln(f(Y|Y\geq y_r;\boldsymbol{\eta}))}{\partial\boldsymbol{\eta}^2}\big)$ است. در این صورت ماتریس اطلاع فیشر برای داده‌های کامل به صورت

$$I_W(\boldsymbol{\eta}) = \begin{bmatrix} I_W(\alpha,\alpha) & I_W(\alpha,\lambda) & I_W(\alpha,\mu)\\ I_W(\lambda,\alpha) & I_W(\lambda,\lambda) & I_W(\lambda,\mu)\\ I_W(\mu,\alpha) & I_W(\mu,\lambda) & I_W(\mu,\mu)\end{bmatrix}$$

است بطوری که عناصر آن به صورت

$$\begin{aligned}
I_W(\alpha,\alpha) =& \frac{n}{\alpha^{۲}} + \frac{n\alpha\lambda^{۲}\mu e^{\mu}}{e^{\mu}-۱}\int_{۰}^{\infty} w^{-(۲\alpha+۱)}(\ln(w))^{۲} e^{-(\lambda w^{-\alpha}+\mu e^{-\lambda w^{-\alpha}})}dw \\
&- \frac{n\alpha\lambda^{۲}\mu^{۲}e^{\mu}}{e^{\mu}-۱}\int_{۰}^{\infty} w^{-(۲\alpha+۱)}(\ln(w))^{۲} e^{-(۲\lambda w^{-\alpha}+\mu e^{-\lambda w^{-\alpha}})}dw \\
&+ \frac{n\alpha\lambda^{۳}\mu^{۲}e^{\mu}}{e^{\mu}-۱}\int_{۰}^{\infty} w^{-(۳\alpha+۱)}(\ln(w))^{۲} e^{-(۲\lambda w^{-\alpha}+\mu e^{-\lambda w^{-\alpha}})}dw, \\
I_W(\alpha,\lambda) = I_w(\lambda,\alpha) =& \frac{n\alpha\lambda\mu e^{\mu}}{e^{\mu}-۱}\int_{۰}^{\infty} w^{-(۲\alpha+۱)}(\ln(w)) e^{-(\lambda w^{-\alpha}+\mu e^{-\lambda w^{-\alpha}})}dw \\
&+ \frac{n\alpha\lambda\mu^{۲}e^{\mu}}{e^{\mu}-۱}\int_{۰}^{\infty} w^{-(۲\alpha+۱)}(\ln(w)) e^{-(۲\lambda w^{-\alpha}+\mu e^{-\lambda w^{-\alpha}})}dw \\
&- \frac{n\alpha\lambda^{۲}\mu^{۲}e^{\mu}}{e^{\mu}-۱}\int_{۰}^{\infty} w^{-(۳\alpha+۱)}(\ln(w)) e^{-(۲\lambda w^{-\alpha}+\mu e^{-\lambda w^{-\alpha}})}dw, \\
I_W(\alpha,\mu) = I_w(\mu,\alpha) =& \frac{n\alpha\lambda^{۲}\mu e^{\mu}}{e^{\mu}-۱}\int_{۰}^{\infty} w^{-(۲\alpha+۱)}\ln(w) e^{-(۲\lambda w^{-\alpha}+\mu e^{-\lambda w^{-\alpha}})}dw, \\
I_W(\lambda,\lambda) =& \frac{n}{\lambda^{۲}} + \frac{n\alpha\lambda\mu^{۲}e^{\mu}}{e^{\mu}-۱}\int_{۰}^{\infty} w^{-(۳\alpha+۱)}\ln(w) e^{-(۲\lambda w^{-\alpha}+\mu e^{-\lambda w^{-\alpha}})}dw, \\
I_W(\lambda,\mu) = I_w(\mu,\lambda) =& -\frac{n\alpha\lambda\mu e^{\mu}}{e^{\mu}-۱}\int_{۰}^{\infty} w^{-(۲\alpha+۱)} e^{-(۲\lambda w^{-\alpha}+\mu e^{-\lambda w^{-\alpha}})}dw, \\
I_W(\mu,\mu) =& \frac{n}{\mu^{۲}} + \frac{ne^{\mu}}{e^{\mu}-۱} - \frac{ne^{۲\mu}}{(e^{\mu}-۱)^{۲}},
\end{aligned}$$

و عناصر ماتریس $I_{Y|Y\geq y_r}(\boldsymbol{\eta})$ به صورت

$$\begin{aligned}
I_{Y|Y\geq y_r}(\alpha,\alpha) =& \frac{n-r}{\alpha^{۲}} + \frac{(n-r)\alpha\lambda^{۲}\mu e^{\mu}}{e^{\mu A_r}-۱}\int_{y_r}^{\infty} y^{-(۲\alpha+۱)}(\ln(y))^{۲} \\
&\times \left(۱-\mu e^{-\lambda y^{-\alpha}}(۱-\lambda y^{-\alpha})\right) e^{-(\lambda y^{-\alpha}+\mu e^{-\lambda y^{-\alpha}})}dy \\
&- (n-r)\lambda\mu y_r^{-\alpha}(\ln(y_r))^{۲} e^{۱-A_r(۱-\mu)} \\
&\times \frac{y_r^{-\alpha}\left(e^{\mu A_r}-۱+\mu e^{-\lambda y_r^{-\alpha}}\right)+۱-e^{\mu A_r}}{(e^{\mu A_r}-۱)^{۲}},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_{Y|Y\geq y_r}(\alpha,\lambda) =& I_{Y|Y\geq y_r}(\lambda,\alpha) = -\frac{(n-r)\alpha\lambda\mu e^{\mu}}{e^{\mu A_r}-1}\int_{y_r}^{\infty} y^{-(2\alpha+1)}\ln(y)\\
&\times\left(1-\mu e^{-\lambda y^{-\alpha}}(1-\lambda y^{-\alpha})\right)e^{-(\lambda y^{-\alpha}+\mu e^{-\lambda y^{-\alpha}})}dy\\
&+(n-r)\mu y_r^{-\alpha}\ln(y_r)e^{1-A_r(1-\mu)}\\
&\times\frac{\lambda y_r^{-\alpha}\left(e^{\mu A_r}-1+\mu e^{-\lambda y_r^{-\alpha}}\right)+1-e^{\mu A_r}}{(e^{\mu A_r}-1)^2},\\
I_{Y|Y\geq y_r}(\alpha,\mu) =& I_{Y|Y\geq y_r}(\mu,\alpha) = -\frac{(n-r)\alpha\lambda^2\mu e^{\mu}}{e^{\mu A_r}-1}\int_{y_r}^{\infty} y^{-(2\alpha+1)}\ln(y)\\
&\times e^{-2\lambda y^{-\alpha}+\mu e^{-\lambda y^{-\alpha}}}dy\\
&-(n-r)\mu y_r^{-\alpha}\ln(y_r)e^{1-A_r(1-\mu)}\\
&\times\frac{\mu(e^{-\lambda y_r^{-\alpha}}-1)+e^{\mu A_r}-1}{\left(e^{\mu(1-e^{-\lambda y_r^{-\alpha}})}-1\right)^2},\\
I_{Y|Y\geq y_r}(\lambda,\lambda) =& \frac{n-r}{\lambda^2}+\frac{(n-r)\alpha\lambda\mu^2 e^{\mu}}{e^{\mu A_r}-1}\int_{y_r}^{\infty} y^{-(3\alpha+1)}e^{2\lambda y^{-\alpha}+\mu e^{-\lambda y^{-\alpha}}}dy\\
&+(n-r)\mu y_r^{2-\alpha}e^{1-A_r(1-\mu)}\\
&\times\frac{\left(\mu(e^{-\lambda y_r^{-\alpha}}-1)(e^{\mu A_r}-1)-\mu e^{1-A_r(1-\mu)}\right)}{\left(e^{\mu A_r}-1\right)^2},\\
I_{Y|Y\geq y_r}(\lambda,\mu) =& I_{Y|Y\geq y_r}(\mu,\lambda) = -\frac{(n-r)\alpha\lambda\mu e^{\mu}}{e^{\mu A_r}-1}\\
&\times\int_{y_r}^{\infty} y^{-(2\alpha+1)}e^{-2\lambda y^{-\alpha}+\mu e^{-\lambda y^{-\alpha}}}dy\\
&+\frac{(n-r)y_r^{-\alpha}e^{1-A_r(1-\mu)}\left(\mu(e^{-\lambda y_r^{-\alpha}}-1)+e^{\mu A_r}-1\right)}{\left(e^{\mu A_r}-1\right)^2},\\
I_{Y|Y\geq y_r}(\mu,\mu) =& \frac{n-r}{\mu^2}-\frac{(n-r)e^{\mu A_r}(e^{-\lambda y_r^{-\alpha}}-1)}{\left(e^{\mu A_r}-1\right)^2},
\end{aligned}$$

محاسبه می‌شوند. ماتریس واریانس-کوواریانس مجانبی برآورد پارامترها در داده‌های مشاهده شده با وارون $I_Y(\hat{\boldsymbol{\eta}})$ بدست می‌آید، که در آن $\hat{\boldsymbol{\eta}}$ برآورد ماکسیمم درستنمایی پارامترها تحت سانسور نوع دوم است.

۴ برآورد بیزی

برای برآورد بیزی پارامترها، توزیع‌های پیشین گامای مستقل به صورت $\pi_1(\alpha) \propto \alpha^{a_1-1}e^{-b_1\alpha}$، $\pi_2(\lambda) \propto \lambda^{a_2-1}e^{-b_2\lambda}$ و $\pi_3(\mu) \propto \mu^{a_3-1}e^{-b_3\mu}$ در نظر گرفته می‌شود، به طوری که تمام ابرپارامترهای $a_i, b_i \;\; i = 1,2,3$ دارای مقادیر معلوم و نامنفی هستند. مشاهده می‌شود که توزیع‌های پیشین ناآگاهی بخش برای α، λ و μ، حالت خاص از توزیع‌های پیشین درنظر گرفته شده هستند. بنابراین براساس مقادیر مشاهده شده $y_1,\ldots,y_r$ از داده‌های تحت سانسور نوع دوم، توزیع پسین به صورت

$$\begin{aligned}\pi(\alpha,\lambda,\mu|y) \propto\ & \alpha^{r+a_1-1}\lambda^{r+a_2-1}\mu^{r+a_3+1}(e^{\mu}-1)^{-n}\\ & \times \exp\big(-\alpha(\sum_{i=1}^{r}\ln(y_i)+b_1)-\lambda(\sum_{i=1}^{r}y_i^{-\alpha}+b_2)\big)\\ & \times \exp\big(-\mu(b_3-\sum_{i=1}^{r}A_i)\big)\times\big(e^{\mu A_r}-1\big)^{n-r}.\end{aligned} \qquad (14)$$

خواهد بود. برای برآورد بیزی پارامترها از توابع زیان مربع خطا[1] (SEL) و لاینکس[2] استفاده شده است. این توابع زیان به ترتیب به صورت $L_s(\tau(\boldsymbol{\eta}),\hat\tau(\boldsymbol{\eta})) = (\hat\tau(\boldsymbol{\eta})-\tau(\boldsymbol{\eta}))^2$ و $L_L(\tau(\boldsymbol{\eta}),\hat\tau(\boldsymbol{\eta})) = e^{\delta(\hat\tau(\boldsymbol{\eta})-\tau(\boldsymbol{\eta}))} - \delta(\hat\tau(\boldsymbol{\eta})-\tau(\boldsymbol{\eta})) - 1 \quad \delta \neq 0$ تعریف می‌شوند که در آن $\hat\tau(\boldsymbol{\eta})$ نشان‌دهنده برآورد پارامتر $\tau(\boldsymbol{\eta})$ است. برآورد بیزی تحت تابع زیان مربع خطا، میانگین توزیع پسین $\tau(\boldsymbol{\eta})$ و تحت تابع زیان لاینکس از رابطه

$$\hat\tau_L(\boldsymbol{\eta}) = \frac{-1}{\delta}\ln(E(e^{-\delta\tau(\boldsymbol{\eta})}|y)) \quad \delta \neq 0 \qquad (15)$$

محاسبه می‌گردد. با توجه به رابطه (۱۴)، برآورد بیزی پارامترها، تحت تابع زیان مربع خطا به صورت

$$\begin{aligned}\hat\alpha_S =& E(\alpha|y) \propto \int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty \alpha^{r+a_1}\lambda^{r+a_2-1}\mu^{r+a_3-1}(e^{\mu}-1)^{-n}\\ & \times \exp\big(-\alpha(\sum_{i=1}^{r}\ln(y_i)+b_1)-\lambda(\sum_{i=1}^{r}y_i^{-\alpha}+b_2)-\mu(b_3-\sum_{i=1}^{r}A_i)\big)\\ & \times \big(e^{\mu A_r}-1\big)^{n-r}d\alpha\, d\lambda\, d\mu,\end{aligned}$$

[1] Square Error Loss
[2] LINEX

$$\begin{aligned}
\hat{\lambda}_S =& E(\lambda|y) \propto \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \alpha^{r+a_1-1}\lambda^{r+a_2}\mu^{r+a_3-1}(e^\mu - 1)^{-n} \\
& \times \exp\big(-\alpha(\sum_{i=1}^r \ln(y_i) + b_1) - \lambda(\sum_{i=1}^r y_i^{-\alpha} + b_2) - \mu(b_3 - \sum_{i=1}^r A_i)\big) \\
& \times \big(e^{\mu A_r} - 1\big)^{n-r} d\alpha \, d\lambda \, d\mu, \\
\hat{\mu}_S =& E(\mu|y) \propto \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \alpha^{r+a_1-1}\lambda^{r+a_2-1}\mu^{r+a_3}(e^\mu - 1)^{-n} \\
& \times \exp\big(-\alpha(\sum_{i=1}^r \ln(y_i) + b_1) - \lambda(\sum_{i=1}^r y_i^{-\alpha} + b_2) - \mu(b_3 - \sum_{i=1}^r A_i)\big) \\
& \times \big(e^{\mu A_r} - 1\big)^{n-r} d\alpha \, d\lambda \, d\mu,
\end{aligned}$$

محاسبه می‌شود. برآورد بیزی α، λ و μ تحت زیان لاینکس با استفاده از (۱۵) حاصل می‌شود که در آن

$$\begin{aligned}
E(e^{-\delta\alpha}|y) \propto & \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \alpha^{r+a_1-1}\lambda^{r+a_2-1}\mu^{r+a_3-1}(e^\mu - 1)^{-n} \\
& \times \exp\big(-\alpha(\sum_{i=1}^r \ln(y_i) + b_1 + \delta) - \lambda(\sum_{i=1}^r y_i^{-\alpha} + b_2)\big) \\
& \times \exp\big(-\mu(b_3 - \sum_{i=1}^r A_i)\big)\big(e^{\mu A_r} - 1\big)^{n-r} d\alpha \, d\lambda \, d\mu, \\
E(e^{-\delta\lambda}|y) \propto & \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \alpha^{r+a_1-1}\lambda^{r+a_2-1}\mu^{r+a_3-1}(e^\mu - 1)^{-n} \\
& \times \exp\big(-\alpha(\sum_{i=1}^r \ln(y_i) + b_1) - \lambda(\sum_{i=1}^r y_i^{-\alpha} + b_2 + \delta)\big) \\
& \times \exp\big(-\mu(b_3 - \sum_{i=1}^r A_i)\big)\big(e^{\mu A_r} - 1\big)^{n-r} d\alpha \, d\lambda \, d\mu, \\
E(e^{-\delta\mu}|y) \propto & \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \alpha^{r+a_1-1}\lambda^{r+a_2-1}\mu^{r+a_3-1}(e^\mu - 1)^{-n} \\
& \times \exp\big(-\alpha(\sum_{i=1}^r \ln(y_i) + b_1) - \lambda(\sum_{i=1}^r y_i^{-\alpha} + b_2)\big) \\
& \times \exp\big(-\mu(b_3 - \sum_{i=1}^r A_i + \delta)\big)\big(e^{\mu A_r} - 1\big)^{n-r} d\alpha \, d\lambda \, d\mu,
\end{aligned}$$

است. این نکته قابل ذکر است که برآوردهای بیزی پارامترها به فرم بسته قابل برآورد نیستند. لذا برای رفع این مشکل از روش‌های عددی که توسط تایرنی (۱۹۹۴) و بر اساس تکنیک‌های زنجیر مارکف مونت کارلو (MCMC) پیشنهاد شده است، استفاده می‌شود. در این روش با استفاده از نمونه‌گیری گیبز از طریق الگوریتم متروپولیس-هستینگس اقدام به تولید نمونه از توزیع پسین نموده و نسبت به برآورد پارامترها اقدام می‌شود. در روش نمونه‌گیری گیبز برای تولید نمونه، توزیع‌های پسین شرطی کامل برای α، λ و μ به صورت

$$\begin{aligned}\pi_1^*(\alpha|\lambda,\mu,\mathbf{y}) \propto & \alpha^{r+a_1-1}\exp\big(-\alpha(\sum_{i=1}^{r}\ln(y_i)+b_1)-\lambda\sum_{i=1}^{r}y_i^{-\alpha}\big)\\ & \times\exp(-\mu\sum_{i=1}^{r}e^{-\lambda y_i^{-\alpha}})\big(e^{\mu A_r}-1\big)^{n-r},\end{aligned} \tag{۱۶}$$

$$\begin{aligned}\pi_2^*(\lambda|\alpha,\mu,\mathbf{y}) \propto & \lambda^{r+a_2-1}\exp\big(-\lambda(\sum_{i=1}^{r}y_i^{-\alpha}+b_2)-\mu\sum_{i=1}^{r}e^{-\lambda y_i^{-\alpha}}\big)\\ & \times\big(e^{\mu A_r}-1\big)^{n-r},\end{aligned} \tag{۱۷}$$

$$\begin{aligned}\pi_3^*(\mu|\alpha,\lambda,\mathbf{y}) \propto & \mu^{r+a_3-1}(e^{\mu}-1)^{-n}\exp\big(-\mu(b_3-\sum_{i=1}^{r}A_i)\big)\\ & \times\big(e^{\mu A_r}-1\big)^{n-r}.\end{aligned} \tag{۱۸}$$

بدست می‌آیند. با توجه به روابط (۱۶) تا (۱۸) برآورد بیزی α، λ و μ براساس نمونه های تولید شده به روش MCMC طبق الگوریتم زیر برآورد می‌شوند؛

الگوریتم ۱. محاسبه برآورد پارامترهای α، λ و μ:

گام ۱- مقادیر α_0,λ_0,μ_0 به عنوان مقادیر اولیه تعیین می‌گردند.

گام ۲- با الگوریتم متروپولیس- هستینگس، α_i از توزیع $\pi_1^*(\alpha|\lambda_{i-1},\mu_{i-1},y)$ ، λ_i از توزیع $\pi_2^*(\lambda|\alpha_i,\mu_{i-1},y)$ و μ_i از توزیع $\pi_3^*(\mu|\alpha_i,\lambda_i,y)$ تولید می‌شوند.

گام ۳- گام ۲ برای مقادیر $i=1,\dots,N$ تکرار می‌شوند.

گام ۴- برآورد بیزی α، λ و μ تحت تابع زیان مربع خطا به صورت $\hat{H}_2=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\hat{\boldsymbol{\eta}}_i$ و تحت تابع زیان لاینکس به صورت $\hat{H}_L=-\frac{1}{\delta}\big(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}e^{-\delta\hat{\boldsymbol{\eta}}_i}\big)$ محاسبه می‌گردد که در آن $\boldsymbol{\eta}$ نشان‌دهنده پارامترها است.

در برآورد فاصله اطمینان بیزی پارامترها، با توجه به مقاله کوندو (۲۰۰۸)، برای محاسبه فواصل اطمینان پارامترهای α، λ و μ مقادیر بدست آمده از گام (۳) را به صورت $\alpha_1<\cdots<\alpha_N$ ، $\lambda_1<\cdots<\lambda_N$

و $\mu_N < \cdots < \mu_1$ می‌نویسیم. در این حالت فاصله اطمینان $100(1-\gamma)\%$ برای پارامترها به صورت $\left(\alpha_{(N\frac{\gamma}{2})}, \alpha_{(N(1-\frac{\gamma}{2}))}\right)$، $\left(\lambda_{(N\frac{\gamma}{2})}, \lambda_{(N(1-\frac{\gamma}{2}))}\right)$ و $\left(\mu_{(N\frac{\gamma}{2})}, \mu_{(N(1-\frac{\gamma}{2}))}\right)$ خواهد بود. همچنین برای ارائه یک مجموعه باور بیزی با بالاترین چگالی پسین (HPD) در سطح $100(1-\gamma)\%$ برای پارامترها، از روش چن و شائو (۱۹۹۹) استفاده می‌شود. بدین منظور، ابتدا مقادیر حاصل از گام ۳ را به صورت مرتب نوشته و سپس تمام مجموعه های باور $100(1-\gamma)\%$ پارامتر α به صورت $\left(\alpha_{(1)}, \alpha_{[N(1-\gamma)]+1}\right), \ldots, \left(\alpha_{(N\gamma)}, \alpha_{(N)}\right)$ را تشکیل داده که در آن $[T]$ بزرگترین عدد صحیح کوچکتر یا برابر با T است. در این صورت فاصله اطمینان HPD پارامتر α، کوچکترین فاصله در بین فاصله‌های اطمینان محاسبه شده است. به همین طریق برای دیگر پارامترها، فواصل HPD بدست می‌آید.

۵ مطالعه شبیه‌سازی

در این بخش نتایج شبیه‌سازی برآورد پارامترهای توزیع وایبول وارون-پواسن به روش ماکسیمم درستنمایی و برآورد بیزی تحت سانسور نوع دوم ارائه شده است. مراحل شبیه‌سازی به کمک نرم‌افزار R انجام شده است. تمامی نتایج با ۱۰۰۰۰ مرتبه تکرار بدست آمده‌اند. همچنین تعداد تکرارها در الگوریتم متروپولیس-هستینگس برابر با ۱۰۰۰۰ و در الگوریتم گیبز ۳۰۰۰ در نظر گرفته شده است. جهت بررسی عملکرد برآوردگرها $a_1 = 0/27$، $b_1 = 1$، $a_2 = 1/4$، $b_2 = 1$، $a_3 = 2/6$، $b_3 = 1$ و $\delta = 1$، اندازه‌های نمونه $n = 20, 50, 100$ و سه طرح سانسور ٪۱۰، ٪۲۰ و ٪۳۰ در نظر گرفته شده است. برای مقایسه روشهای برآورد ماکسیمم درستنمایی (MLE) و بیزی تحت تابع زیان مربع خطا (SEL) و تابع زیان لاینکس (LINEX) از معیار میانگین مربع خطا (MSE) برای ارزیابی استفاده شده است، که نتایج در جدول ۱ آورده شده است. با توجه به نتایج جدول ۱ قابل ذکر است، برای اندازه نمونه ثابت با کاهش تعداد داده‌های سانسورشده، میانگین مربع خطا برآوردگرها کاهش یافته و برآورد پارامترها به مقدار واقعی نزدیک می‌شوند. ضمناً با در نظر گرفتن طرح سانسور ثابت با افزایش اندازه نمونه، میانگین مربع خطا برآوردگرها کاهش می‌یابد. همچنین در داده‌هایی با ٪۳۰ (بیشترین) سانسور، برآوردگرهای بیزی پارامترها تحت تابع زیان مربع خطا، دارای کمترین میانگین مربع خطا و در داده‌هایی با ٪۱۰ (کمترین) سانسور، برآورد ماکسیمم درستنمایی تقریباً در همه موارد، دارای کمترین میانگین مربع خطا می‌باشند. در استفاده از فواصل اطمینان کلاسیک، بیزی و HPD نتایج در جدول‌های ۲ و ۳ آورده شده است. با مقایسه فواصل اطمینان مشاهده می‌شود که برای اندازه نمونه ثابت با کاهش تعداد داده‌های سانسورشده، طول بازه‌ها کاهش می‌یابند. در بین فواصل اطمینان، فاصله اطمینان کلاسیک پارامترها دارای کمترین طول بازه است. همچنین طول بازه فاصله اطمینان HPD از طول بازه فاصله اطمینان بیزی کمتر می‌باشد.

جدول ۱. برآورد پارامترها به همراه میانگین مربع خطا وقتی که $\alpha =$ ۰/۲۷، $\lambda =$ ۱/۴ و $\mu =$ ۲/۶

n	r	پارامتر	MLE	MSE	SEL	MSE	LINEX	MSE
		α	۰/۲۵۷۷	۰/۰۱۴۸	۰/۲۸۹۸	۰/۰۰۵۸	۰/۲۸۷۴	۰/۰۰۶۲
	۱۴	λ	۱/۲۳۹۰	۰/۰۵۳۵	۱/۳۴۳۵	۰/۰۴۹۱	۱/۳۰۷۴	۰/۰۶۰۶
		μ	۲/۲۷۹۱	۰/۰۴۶۳	۲/۴۸۱۰	۰/۰۴۱۹	۲/۴۱۲۴	۰/۰۴۴۶
		α	۰/۲۹۸۰	۰/۰۱۱۰	۰/۲۸۹۵	۰/۰۰۵۶	۰/۲۸۷۲	۰/۰۰۵۲
۲۰	۱۶	λ	۱/۲۱۲۰	۰/۰۵۲۷	۱/۳۶۵۶	۰/۰۴۸۹	۱/۳۲۷۲	۰/۰۵۹۲
		μ	۲/۲۲۲۸	۰/۰۳۸۲	۲/۴۸۲۳	۰/۰۳۹۴	۲/۴۱۶۹	۰/۰۴۲۱
		α	۰/۳۰۸۷	۰/۰۰۸۳	۰/۲۸۹۴	۰/۰۰۴۵	۰/۲۸۷۳	۰/۰۰۴۳
	۱۸	λ	۱/۲۶۴۸	۰/۰۵۰۵	۱/۳۷۲۷	۰/۰۴۷۷	۱/۳۳۹۰	۰/۰۵۸۷
		μ	۲/۳۰۴۶	۰/۰۳۶۱	۲/۵۰۰۴	۰/۰۳۶۴	۲/۴۳۵۱	۰/۰۳۸۴
		α	۰/۲۵۴۳	۰/۰۰۳۳	۰/۲۸۰۳	۰/۰۰۲۱	۰/۲۷۹۳	۰/۰۰۲۲
	۳۵	λ	۱/۲۶۱۸	۰/۰۵۵۶	۱/۳۷۸۷	۰/۰۴۱۰	۱/۳۵۶۳	۰/۰۵۲۷
		μ	۲/۳۰۹۳	۰/۰۵۹۸	۲/۵۲۱۴	۰/۰۳۶۹	۲/۴۵۶۰	۰/۰۳۹۲
		α	۰/۲۹۰۰	۰/۰۰۲۹	۰/۲۸۱۳	۰/۰۰۲۰	۰/۲۸۰۴	۰/۰۰۱۹
۵۰	۴۰	λ	۱/۲۳۰۵	۰/۰۵۵۲	۱/۳۶۱۰	۰/۰۴۰۴	۱/۳۳۹۳	۰/۰۵۱۵
		μ	۲/۲۷۲۳	۰/۰۲۱۷	۲/۴۷۹۹	۰/۰۳۴۳	۲/۴۱۲۴	۰/۰۳۸۰
		α	۰/۲۸۵۶	۰/۰۰۱۹	۰/۲۸۲۱	۰/۰۰۲۰	۰/۲۸۱۲	۰/۰۰۱۹
	۴۵	λ	۱/۳۲۸۲	۰/۰۳۰۰	۱/۳۶۷۷	۰/۰۴۰۱	۱/۳۴۶۲	۰/۰۵۱۰
		μ	۲/۴۹۷۶	۰/۰۱۲۷	۲/۴۸۹۱	۰/۰۳۵۳	۲/۴۲۴۲	۰/۰۳۸۰
	۷۰	α	۰/۱۶۸۳	۰/۰۰۱۸	۰/۲۷۷۳	۰/۰۰۱۲	۰/۲۷۶۸	۰/۰۰۱۳
		λ	۱/۴۱۸۱	۰/۰۲۳۶	۱/۳۷۳۵	۰/۰۳۸۵	۱/۳۵۸۶	۰/۰۳۹۶
		μ	۲/۵۶۲۷	۰/۰۴۴۸	۲/۵۱۶۹	۰/۰۳۴۳	۲/۴۵۳۹	۰/۰۳۶۸
۱۰۰	۸۰	α	۰/۲۵۳۰	۰/۰۰۱۳	۰/۲۷۶۹	۰/۰۰۱۲	۰/۲۷۶۴	۰/۰۰۱۲
		λ	۱/۳۵۰۶	۰/۰۱۵۸	۱/۳۷۸۲	۰/۰۳۷۶	۱/۳۶۳۸	۰/۰۳۸۲
		μ	۲/۵۲۱۶	۰/۰۱۲۱	۲/۵۳۳۸	۰/۰۳۳۸	۲/۴۶۳۸	۰/۰۳۶۲
	۹۰	α	۰/۲۸۵۹	۰/۰۰۱۰	۰/۲۷۶۰	۰/۰۰۱۱	۰/۲۷۵۵	۰/۰۰۱۱
		λ	۱/۳۲۹۵	۰/۰۱۴۵	۱/۳۸۵۰	۰/۰۳۶۳	۱/۳۷۰۵	۰/۰۳۶۹
		μ	۲/۴۶۶۰	۰/۰۱۱۳	۲/۵۰۶۵	۰/۰۳۲۵	۲/۴۴۳۳	۰/۰۳۵۸

۶ تحلیل داده‌های واقعی

داده‌ها شامل ۲۳ مشاهده زمان شکست بلبرینگ در آزمون طول عمر است که توسط لاولس (۲۰۰۳) ارائه شده است. این داده‌ها عبارتند از ۱۷/۸۸، ۲۸/۹۲، ۳۳، ۴۱/۵۲، ۴۲/۱۲، ۴۵/۶۰، ۴۸/۸۰، ۵۱/۸۴، ۵۱/۹۶، ۵۴/۱۲، ۵۵/۵۶، ۶۷/۸۰، ۶۸/۴۴، ۶۸/۶۴، ۶۸/۸۸، ۸۴/۱۲، ۹۳/۱۲، ۹۸/۶۴، ۱۰۵/۱۲، ۱۰۵/۸۴، ۱۲۷/۹۲، ۱۲۸/۰۴ و ۱۷۳/۴۰. دی و کوندو (۲۰۰۹) برازش دو تابع توزیع لوگ نرمال و لوگ لوجستیک و برومیده (۲۰۱۲) برای دو تابع توزیع وایبول و لوگ نرمال به کار برده‌اند.

چاکرابارتی و چودهوری (۲۰۱۹) نشان دادند که توزیع وایبول وارون-پواسن دارای مقدار AIC کمتری نسبت به دیگر مدل‌های رقیب است. با توجه به داده‌های کامل، برآورد ماکسیمم درستنمایی پارامترها $\hat{\alpha} =$ ۰/۴۴۷۱، $\hat{\lambda} =$ ۳۲/۳۲۳۴ و $\hat{\mu} =$ ۱۰۱/۴۴۴۶ است. بر اساس این داده‌ها، برآورد پارامترها به روش ماکسیمم درستنمایی و

جدول ۲. فواصل اطمینان کلاسیک و بیزی پارامترها وقتی که $\alpha = ۰/۲۷$، $\lambda = ۱/۴$ و $\mu = ۲/۶$

n	r	پارامتر	فاصله اطمینان کلاسیک		فاصله اطمینان بیزی تحت تابع زیان مربع خطا		فاصله اطمینان بیزی تحت تابع زیان لاینکس	
			کران بالا	کران پایین	کران بالا	کران پایین	کران بالا	کران پایین
		α	۰/۳۲۸۸	۰/۱۸۶۶	۰/۴۷۳۷	۰/۱۹۳۵	۰/۴۶۶۱	۰/۱۹۲۴
	۱۴	λ	۱/۳۹۴۸	۱/۰۸۳۲	۲/۰۵۸۸	۰/۸۶۵۸	۱/۹۶۸۵	۰/۷۸۸۴
		μ	۲/۴۹۰۵	۲/۰۶۷۷	۳/۸۷۳۵	۱/۳۰۵۳	۳/۶۵۲۶	۱/۱۴۸۳
		α	۰/۳۶۴۹	۰/۲۳۱۱	۰/۴۶۰۵	۰/۱۹۷۲	۰/۴۵۴۲	۰/۱۹۵۹
۲۰	۱۶	λ	۱/۳۴۶۹	۱/۰۷۷۱	۲/۰۱۷۷	۰/۸۳۱۳	۱/۹۹۸۱	۰/۸۴۰۸
		μ	۲/۴۰۵۴	۲/۰۴۰۲	۳/۷۶۹۷	۱/۳۴۷۰	۳/۵۷۴۹	۱/۲۰۵۹
		α	۰/۳۶۹۲	۰/۲۴۸۲	۰/۴۳۴۱	۰/۱۹۹۷	۰/۴۳۰۰	۰/۱۹۸۷
	۱۸	λ	۱/۳۸۷۳	۱/۱۴۲۳	۱/۹۸۶۰	۰/۸۳۸۱	۱/۹۳۷۹	۰/۸۰۲۸
		μ	۲/۴۶۹۹	۲/۱۳۹۳	۳/۷۷۰۳	۱/۴۰۷۲	۳/۵۸۵۲	۱/۲۴۶۳
		α	۰/۲۸۲۵	۰/۲۲۶۱	۰/۳۸۲۶	۰/۲۱۲۵	۰/۳۸۰۸	۰/۲۱۱۹
	۳۵	λ	۱/۳۲۴۷	۱/۱۹۸۹	۱/۸۴۳۷	۰/۹۳۰۸	۱/۸۱۹۰	۰/۹۲۹۵
		μ	۲/۳۹۴۴	۲/۲۲۴۲	۳/۶۴۰۰	۱/۳۸۷۱	۳/۴۹۷۳	۱/۲۳۱۲
		α	۰/۳۱۶۴	۰/۲۶۳۶	۰/۳۸۱۱	۰/۲۱۲۶	۰/۳۷۹۲	۰/۲۱۲۱
۵۰	۴۰	λ	۱/۲۸۴۹	۱/۱۷۶۱	۱/۸۵۳۵	۰/۹۴۹۶	۱/۷۹۴۵	۰/۹۰۵۹
		μ	۲/۳۴۶۲	۲/۱۹۸۴	۳/۷۳۱۰	۱/۳۷۳۲	۳/۴۷۱۱	۱/۲۱۵۹
		α	۰/۳۰۸۹	۰/۲۶۲۳	۰/۳۷۴۲	۰/۲۱۳۳	۰/۳۷۲۵	۰/۲۱۲۷
	۴۵	λ	۱/۳۷۸۴	۱/۲۷۸۰	۱/۸۱۸۵	۰/۹۶۱۷	۱/۷۹۰۸	۰/۹۴۰۶
		μ	۲/۵۶۶۴	۲/۴۲۸۸	۳/۶۲۲۲	۱/۳۹۱۵	۳/۶۱۲۹	۱/۱۸۶۳
		α	۰/۱۷۹۸	۰/۱۵۶۸	۰/۳۵۵۵	۰/۲۱۹۹	۰/۳۵۴۴	۰/۲۱۹۶
	۷۰	λ	۱/۴۵۱۴	۱/۳۸۴۸	۱/۷۸۳۵	۰/۹۷۹۹	۱/۷۶۵۸	۰/۹۶۴۱
		μ	۲/۶۰۷۵	۲/۵۱۷۹	۳/۷۷۶۵	۱/۴۳۹۵	۳/۴۸۶۰	۱/۲۳۲۵
		α	۰/۲۶۵۳	۰/۲۴۰۷	۰/۳۵۲۲	۰/۲۲۷۵	۰/۳۵۱۳	۰/۲۲۷۲
۱۰۰	۸۰	λ	۱/۳۷۹۱	۱/۳۲۲۱	۱/۷۸۱۱	۰/۹۹۹۰	۱/۷۵۹۴	۰/۹۸۰۴
		μ	۲/۵۶۰۵	۲/۴۸۲۷	۳/۶۶۱۹	۱/۴۵۴۸	۳/۶۰۰۵	۱/۲۵۲۵
		α	۰/۲۹۷۵	۰/۲۷۴۳	۰/۳۴۳۱	۰/۲۲۰۳	۰/۳۴۱۸	۰/۲۱۹۹
	۹۰	λ	۱/۳۵۴۶	۱/۳۰۴۴	۱/۷۷۴۴	۱/۰۲۱۹	۱/۷۵۶۲	۰/۹۹۸۷
		μ	۲/۵۰۰۲	۲/۴۳۱۸	۳/۶۲۷۶	۱/۴۱۷۱	۳/۴۹۱۸	۱/۲۷۴۹

بیزی برای هر سه طرح سانسور و تابع چگالی پیشین ناآگاهی بخش ($a_i = b_i = ۰ \quad i = ۱,۲,۳$) و $\delta = ۱$ در جدول ۴ محاسبه شده است. با بررسی نتایج در طرح سانسور ٪۳۰ ($r = ۱۶$)، برآورد بیزی پارامترها تحت تابع زیان مربع خطا، به مقادیر برآورد حاصل از داده‌های کامل نزدیکتر هستند. با کاهش سانسور، برای طرح سانسور ٪۱۰($r = ۲۱$)، مقادیر برآورد حاصل از روش ماکسیمم درستنمایی به مقادیر برآورد حاصل از داده‌های کامل نزدیکتر هستند.

جدول ۳. فواصل اطمینان HPD پارامترها وقتی که $\alpha = ۰/۲۷$، $\lambda = ۱/۴$ و $\mu = ۲/۶$

n	r	پارامتر	فاصله اطمینان HPD تحت تابع زیان مربع خطا		فاصله اطمینان HPD تحت تابع زیان لاینکس	
			کران بالا	کران پایین	کران بالا	کران پایین
		α	۰/۴۳۶۰	۰/۱۷۳۴	۰/۴۳۷۳	۰/۱۷۹۹
	۱۴	λ	۲/۰۱۷۷	۰/۸۳۵۵	۱/۹۹۲۶	۰/۸۳۶۳
		μ	۳/۶۷۲۱	۱/۲۱۰۷	۳/۶۰۹۹	۱/۱۲۸۱
		α	۰/۴۳۴۵	۰/۱۹۲۶	۰/۴۲۶۸	۰/۱۸۹۵
۲۰	۱۶	λ	۱/۹۷۸۴	۰/۸۰۵۶	۱/۸۶۶۱	۰/۷۲۱۴
		μ	۳/۶۶۶۱	۱/۲۸۵۵	۳/۵۵۴۷	۱/۱۸۴۶
		α	۰/۴۲۹۰	۰/۱۹۸۴	۰/۴۲۳۲	۰/۱۹۵۷
	۱۸	λ	۱/۹۷۷۴	۰/۸۳۰۲	۱/۹۱۱۶	۰/۷۸۴۵
		μ	۳/۶۴۱۵	۱/۳۱۸۱	۳/۵۹۱۵	۱/۲۸۰۵
		α	۰/۳۷۲۹	۰/۲۰۹۵	۰/۳۷۱۰	۰/۲۰۹۰
	۳۵	λ	۱/۸۰۶۰	۰/۹۱۴۶	۱/۷۶۲۶	۰/۸۷۱۸
		μ	۳/۷۱۶۶	۱/۳۵۰۱	۳/۶۲۱۲	۱/۲۳۳۲
		α	۰/۳۶۱۰	۰/۲۰۰۲	۰/۳۵۹۳	۰/۱۹۹۷
۵۰	۴۰	λ	۱/۷۷۹۱	۰/۹۰۰۲	۱/۷۸۱۳	۰/۹۰۵۸
		μ	۳/۶۷۲۵	۱/۳۹۸۸	۳/۴۸۷۶	۱/۲۰۷۱
		α	۰/۳۶۷۶	۰/۲۰۸۳	۰/۳۶۸۸	۰/۲۱۰۹
	۴۵	λ	۱/۸۲۶۹	۰/۹۷۱۴	۱/۷۹۸۲	۰/۹۵۱۷
		μ	۳/۶۴۳۰	۱/۴۱۶۵	۳/۴۵۹۸	۱/۲۱۲۴
		α	۰/۳۴۵۸	۰/۲۱۶۹	۰/۳۴۵۱	۰/۲۱۶۶
	۷۰	λ	۱/۷۴۴۳	۰/۹۵۶۱	۱/۷۳۱۵	۰/۹۴۳۴
		μ	۳/۷۴۳۹	۱/۴۰۴۷	۳/۵۵۷۶	۱/۲۰۶۵
		α	۰/۳۴۴۴	۰/۲۲۰۹	۰/۳۴۳۶	۰/۲۲۰۷
۱۰۰	۸۰	λ	۱/۷۸۱۰	۰/۹۹۷۹	۱/۷۵۰۱	۰/۹۷۶۳
		μ	۳/۶۰۶۷	۱/۴۰۶۴	۳/۵۱۳۱	۱/۲۷۰۵
		α	۰/۳۳۵۸	۰/۲۱۵۳	۰/۳۳۵۳	۰/۲۱۵۰
	۹۰	λ	۱/۷۹۱۵	۱/۰۴۰۴	۱/۷۷۲۵	۱/۰۲۶۴
		μ	۳/۶۲۱۲	۱/۴۴۳۹	۳/۴۹۱۲	۱/۲۷۴۲

جدول ۴. برآورد پارامترهای توزیع وایبول وارون-پواسن سانسورشده وقتی که $r = ۱۶, ۱۸, ۲۱$

$n = ۲۳$	$r = ۱۶$			$r = ۱۸$			$r = ۲۱$		
پارامتر	MLE	SEL	LINEX	MLE	SEL	LINEX	MLE	SEL	LINEX
α	۰/۳۵۸۰	۰/۳۲۰۷	۰/۳۲۰۶	۰/۳۸۶۶	۰/۳۶۰۴	۰/۳۶۰۳	۰/۴۶۲۸	۰/۴۶۵۸	۰/۴۶۵۷
λ	۱۷/۸۰۷۰	۱۸/۰۵۷۱	۱۷/۸۷۷۷	۲۱/۰۷۵۳	۲۱/۰۷۲۱	۲۱/۰۷۱۷	۳۲/۱۲۰۸	۳۴/۸۳۱۵	۹۴/۸۲۵۱
μ	۷۹/۲۷۳۰	۸۰/۴۷۱۹	۸۰/۴۷۱۶	۸۱/۸۷۵۱	۸۱/۸۷۳۵	۸۱/۸۷۲۹	۹۴/۸۷۸۶	۹۴/۸۲۵۱	۹۴/۷۹۰۴

۷ بحث و نتیجه‌گیری

برآورد کلاسیک و بیزی پارامترهای توزیع وایبول وارون-پواسن تحت سانسور نوع دوم مورد بررسی قرار گرفته است. در برآورد بیزی پارامترها از توابع زیان مربع خطا و لاینکس استفاده شده است. برای تولید نمونه از تابع چگالی

هدف با استفاده از روش نمونه‌گیری گیبز و الگوریتم متروپولیس-هستینگس اقدام گردیده است. فواصل اطمینان کلاسیک و بیزی با استفاده از روش‌های عددی محاسبه شده‌اند. با استفاده از شبیه‌سازی مونت کارلو، برآوردگرهای مختلف و فواصل اطمینان متناظر آنها برای اندازه نمونه‌های مختلف در سه طرح سانسور بررسی و مورد مقایسه قرار گرفته‌اند. نتایج حاصل از شبیه‌سازی بیانگر آن است که برای اندازه نمونه ثابت با کاهش تعداد سانسور، برآورد پارامترها به مقدار واقعی نزدیکتر و به تبع آن میانگین مربع خطا و طول بازه فواصل اطمینان کاهش می‌یابند. برای طرح سانسور ٪۳۰، برآورد بیزی پارامترها تحت تابع زیان مربع خطا، دارای کمترین میانگین مربع خطا می‌باشند. با کاهش سانسور و طرح سانسور ٪۱۰، برآورد پارامترها به روش ماکسیمم درستنمایی دارای کمترین میانگین مربع خطا می‌باشند. در بین فواصل اطمینان، فاصله اطمینان کلاسیک پارامترها دارای دارای کمترین طول بازه است.

تقدیر و تشکر

نویسندگان از سردبیر، داوران و ویراستار محترم مجله که با نظرات ارزشمند خود در بهبود کیفیت مقاله نقش مهمی داشته‌اند کمال تشکر و سپاسگزاری را دارند.

مراجع

کهنسال، ا، آل محمد، ن. و عزیززاده، ف. (۱۳۹۹)، برآورد بیزی پارامتر تنش-مقاومت تحت نمونه‌های سانسور فزاینده پیوندی در توزیع لوماکس، علوم آماری، ۱۴، ۲، ۵۰۵-۵۳۴.

مرادی، ن.، سیاره، ع. و پناهی، ه. (۱۳۹۳)، برآورد پارامترهای توزیع بور نوع سوم نمایی تحت داده‌های سانسوریده نوع دوم، علوم آماری، ۸، ۱، ۹۳-۱۰۹.

Adamidis, K. and Loukas, S. (1998), A Lifetime Distribution with Decreasing Failure Rate, *Statistics & Probability Letters*, **39**, 1, 35-42.

Ateya, S. F. (2017), Estimation under Inverse Weibull Distribution based on Balakrishnan's Unified Hybrid Censored Scheme, *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, **46**, 5, 3645-3666.

Barreto-Souza, W. and Cribari-Neto, F. (2009), A Generalization of the Exponential-Poisson Distribution, *Statistics & Probability Letters*, **79**, 24, 2493-2500.

Barreto-Souza, W., de Morais, A. L. and Cordeiro, G. M. (2011), The Weibull-

Geometric Distribution, *Journal of Statistical Computation and Simulation*, **81**, 5, 645-657.

Bromideh, A. A. (2012), Discriminating Between Weibull and Log-normal Distributions Based on Kullback-Leibler Divergence, *Istanbul University Econometrics and Statistics e-Journal*, **16**, 44-54.

Chahkandi, M. and Ganjali, M. (2009), On Some Lifetime Distributions with Decreasing Failure Rate, *Computational Statistics & Data Analysis*, **53**, 12, 4433-4440.

Chakrabarty, J. B. and Chowdhury, S. (2019), Compounded Inverse Weibull Distributions: Properties, Inference and Applications, *Communications in Statistics - Simulation and Computation*, **48**, 7, 2012-2033.

Chen, M.-H. and Shao, Q.-M. (1999), Monte Carlo Estimation of Bayesian Credible and HPD Intervals, *Journal of Computational and Graphical Statistics*, **8**, 1, 69-92.

Cox, D. R. and Oakes, D. (1984), *Analysis of Survival Data*, Chapman and Hall, London.

Crowder, M., Kimber, A., Smith, R. and Sweeting, T. (1991), *Statistical Analysis of Reliability Data*, Chapman and Hall, London.

Dempster, A. P., Laird, N. M. and Rubin, D. B. (1977), Maximum Likelihood from Incomplete Data via the EM Algorithm, *Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Methodological)*, **39**, 1, 1-22.

Dey, A. K. and Kundu, D. (2009), Discriminating Between the Log-normal and Log-logistic Distributions, *Communications in Statistics-Theory and Methods*, **39**, 2, 280-292.

Hassan, A. S., Assar, M. and Ali, K. A. (2016), The Compound Family of Generalized Inverse Weibull Power Series Distributions, *British journal of Applied Sciences & Technology*, **14**, 3, 1-18.

Hemmati, F., Khorram, E. and Rezakhah, S. (2011), A New Three-Parameter Ageing Distribution, *Journal of Statistical Planning and Inference*, **141**, 7, 2266-2275.

Kumar, D., Singh, U., Singh, S. K. and Bhattacharyya, G. (2015), Bayesian Estimation of Exponentiated Gamma Parameter for Progressive Type II Censored Data With Binomial Removals, *Journal of Statistics Applications & Probability*, **4**, 2, 265-273.

Kumar, M., Singh, S. K. and Singh, U. (2018), Bayesian Inference for Poisson-Inverse Exponential Distribution under Progressive Type-II Censoring with Binomial Removal, *International Journal of System Assurance Engineering and Management*, **9**, 6, 1235-1249.

Kundu, D. (2008), Bayesian Inference and Life Testing Plan for the Weibull Distribution in Presence of Progressive Censoring, *Technometrics*, **50**, 2, 144-154.

Kuş, C. (2007), A New Lifetime Distribution, *Computational Statistics & Data Analysis*, **51**, 9, 4497-4509.

Lawless, J. F. (2003), *Statistical Models and Methods for Lifetime Data*, Wiley, New York.

Little, R. J. A. and Rubin, D. B. (1983), Incomplete Data, In Encyclopedia of Statistical Sciences, (Eds S. Kotz and N. L. Johnson), New York: Wiley.

Louis, T. A. (1982), Finding the Observed Information Matrix When Using the EM Algorithm, *Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Methodological)*, **44**, 2, 226-233.

Mahmoudi, E. and Sepahdar, A. (2013), Exponentiated Weibull–Poisson Distribution: Model, Properties and Applications, *Mathematics and Computers in Simulation*, **92**, 76-97.

Pathak, A., Kumar, M., Singh, S. K. and Singh, U. (2022), Bayesian Inference: Weibull Poisson Model for Censored Data Using the Expectation–Maximization

Algorithm and its Application to Bladder Cancer Data, *Journal of Applied Statistics*, **49**, 926-948.

Shafiei, S., Darijani, S. and Saboori, H. (2016), Inverse Weibull Power Series Distributions: Properties and Applications, *Journal of Statistical Computation and Simulation*, **86**, 6, 1069-1094.

Silva, R. B., Barreto-Souza, W. and Cordeiro, G. M. (2010), A New Distribution with Decreasing, Increasing and Upside-down Bathtub Failure Rate, *Computational Statistics & Data Analysis*, **54**, 4, 935-944.

Singh, S. K., Singh, U., Kumar, M. and Vishwakarma, P. K. (2014), Classical and Bayesian Inference for an Extension of the Exponential Distribution under Progressive Type-II Censored Data with Binomial Removals, *Journal of Statistics Applications & Probability*, **1**, 75-86.

Singh, S. and Tripathi, Y. M. (2018), Estimating the Parameters of an Inverse Weibull Distribution under Progressive Type-I Interval Censoring, *Statistical Papers*, **59**, 1, 21-56.

Sultan, K. S., Alsadat, N. H. and Kundu, D. (2014), Bayesian and Maximum Likelihood Estimations of the Inverse Weibull Parameters under Progressive type-II Censoring, *Journal of Statistical Computation and Simulation*, **84**, 10, 2248-2265.

Tahmasbi, R. and Rezaei, S. (2008), A Two-Parameter Lifetime Distribution with Decreasing Failure Rate, *Computational Statistics & Data Analysis*, **52**, 8, 3889-3901.

Tierney, L. (1994), Markov Chains for Exploring Posterior Distributions, *The Annals of Statistics*, **24**, 4, 1701-1728.