Journal of Statistical Sciences, Spring and Summer, 2022
Vol. 16, No. 1, pp 209-238
DOI: 10.29252/jss.16.1.209

Statistical Inference of Two-Parameter Weibull Distribution under Progressive Type-II Censoring with Random Removals

Ghahramani, M.[1], Sharafi, M.[2], Hashemi, R.[2]
[1] Department of Statistics, Science and Research Branch, Islamic Azad University, Theran, Iran.
[2] Department of Statistics, Faculty of Science, Razi University, Kermanshah, Iran.

Corresponding author: M. Sharafi, mmaryamsharafi@gmail.com

Received: 6 June 2021 **Revised:** 31 December 2021 **Accepted and Published Online:** 21 January 2022.

Introduction

A general censoring scheme called progressive Type-II right censoring has been considered. The removal plan can be fixed or random, chosen according to a discrete probability distribution. In many practical problems, not only does an experiment process determines inevitably to use random removals, but also a fixed removal assumption may be cumbersome to analyze some results of statistical inference. The scenario of random removals has been introduced by Yuen and Tse (1996) under the Weibull lifetime distribution and the discrete Uniform distribution for random removals. Tse et al. (2000) discussed Binomial removals even though the parameter p enormously impressed the experiment time, and the Uniform and Binomial distributions were independent of the lifetime distribution. The limitations mentioned above motivate us to propose a new method for determining removals based on the failure times.

Material and Methods

Let the lifetimes of the n units placed on the life-test be distributed as two-parameter Weibull distribution. The proposed random removals use the relationship between the Weibull and Exponential and are based on two approaches: the normalized spacings with random and fixed coefficients according to progressively Type-II censored order statistics from the Exponential

distribution. Wherein the time distance between consecutive failure times depends on the type of lifetime distribution and the number of units that will be removed after each failure are proportional to a root function of the difference between two last failure times divided by the time of the first failure. The joint probability mass functions of random removals are also derived. The estimations of parameters are derived using different estimation procedures such as the maximum likelihood, maximum product spacing, and least-squares methods. The proposed random removal schemes are compared to the discrete Uniform and the Binomial removal schemes via a Monte Carlo simulation study in terms of their biases; root mean squared errors of estimators, expected total test times and the Ratio of the Expected Experiment Time (REET) values. Finally, an innovative technique is introduced for deriving progressive type II censoring samples from a real data set.

Results and Discussion

From comparing the REET values, it is evident that a slight reduction in expected experiment time occurs when a large number of units are tested for lifetimes under Uniform and Binomial distributions with a considerable probability, p, especially for cases with decreasing failure rate $\beta > 1$. Although the Binomial distribution with $p < 0.5$ has relatively acceptable performance, two proposed approaches have smaller $REET$ values, which decreases significantly as the sample size n increases. However, binomial removals perform better than uniform removals in terms of $E(X_{m:m:n})$. Still, the expected test time depends very much on the value of removal probability p.

Conclusion

It is shown that the expected total time under the random coefficients has the most negligible value concerning other approaches and reduces the expected full time on the test.

Keywords: Expected experiment time, Lifetime data, Maximum likelihood estimation, Maximum product spacing estimation, Random removal.

Mathematics Subject Classification (2010): 62F10, 62N01.

مجله علوم آماری، بهار و تابستان ۱۴۰۱
جلد ۱۶، شماره ۱، ص ۲۰۹ – ۲۳۸
DOI: 10.29252/jss.16.1.209
مقاله پژوهشی

استنباط آماری توزیع وایبل دو پارامتری تحت سانسور فزاینده نوع دو با برداشت‌های تصادفی

معصومه قهرمانی[1]، مریم شرفی[2]، رضا هاشمی[2]

[1] گروه آمار، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات تهران

[2] گروه آمار، دانشکده علوم، دانشگاه رازی کرمانشاه

نویسنده مسئول : مریم شرفی، m.sharafi@razi.ac.ir

تاریخ دریافت: ۱۴۰۰/۰۳/۱۶ تاریخ بازنگری: ۱۴۰۰/۱۰/۲۱ تاریخ پذیرش و انتشار: ۱۴۰۰/۱۱/۰۱

چکیده: یکی از مهم‌ترین چالش‌ها در بحث داده‌های سانسور فزاینده نوع دو، تعیین طرح برداشت است. طرح برداشت می‌تواند ثابت باشد یا به صورت تصادفی، برطبق توزیع احتمال گسسته‌ای، انتخاب شود. در این مقاله ابتدا، دو توزیع توأم گسسته برای برداشت‌های تصادفی تحت توزیع طول عمر وایبل دو پارامتری معرفی می‌شوند. روش‌های پیشنهادی مبتنی بر فواصل نرمالیده آماره‌های مرتب سانسور فزاینده نوع دو نمایی است. همچنین امید ریاضی زمان مورد انتظار تحت روش‌های پیشنهادی به دست آمده است. برآورد پارامترها بر اساس روش‌های ماکسیمم درستنمایی، کمترین توان های دوم و ماکسیمم حاصل‌ضرب فاصله‌ای حاصل می شوند. در ادامه، با استفاده از روش‌های شبیه‌سازی مونت کارلو، الگوهای برداشت پیشنهادی با الگوهای برداشت یکنواخت گسسته، دوجمله‌ای و طرح‌های برداشت ثابت از لحاظ اریبی، مجذور میانگین مربع خطای برآوردگرها و امید ریاضی زمان کل مورد انتظار آزمایش مقایسه می شوند. همچنین، نسبت امید ریاضی زمان مورد انتظار تحت سانسور فزاینده نوع دو نیز به، حالت بدون برداشت بررسی می‌شود. سرانجام، عملکرد رهیافت‌های پیشنهادی، در یک مجموعه داده واقعی نشان داده می‌شود.

واژه‌های کلیدی: برآورد ماکسیمم حاصلضرب فاصله‌ای، برآورد ماکسیمم درستنمایی، برداشت تصادفی، داده طول عمر، زمان مورد انتظار آزمایش.

کد موضوع‌بندی ریاضی (۲۰۱۰): 62F10، 62N01.

۱ مقدمه

در بسیاری از مطالعات طول عمر، با مواردی روبه‌رو می‌شویم که واحدهای آزمایشی قبل از اتمام آزمایش از مطالعه خارج می‌شوند. به عبارت دیگر آزمایشگر، اطلاعات کاملی برای تمام واحدهای تحت مطالعه به دست نمی‌آورد؛ به طوری که داده‌ها قبل از مشاهده زمان شکست از آزمایش حذف می‌شوند. این حذف شدن ممکن است به صورت غیر عمدی یا عمدی توسط آزمایشگر قبل از انجام آزمایش طراحی شود. به چنین داده‌هایی، داده‌های سانسورشده گفته می‌شود. سانسور انواع مختلفی دارد. یکی از انواع سانسورها، سانسور نوع دو است. در این نوع سانسور، تعداد واحدهایی که باید مشاهده شوند، از پیش تعیین می‌شوند. تعمیمی از سانسور نوع دو، سانسور فزاینده نوع دو است، که امکان حذف واحدهای تحت مطالعه را در طول آزمایش فراهم می‌کند. در حالت کلی دو رهیافت کلی برای تعیین طرح سانسور وجود دارد. ۱) از پیش تعیین شده و ثابت، ۲) به صورت تصادفی. که در این حالت، بر اساس توزیع احتمال گسسته‌ای که روی مجموعه مقادیر ممکن سانسور تعریف می‌شود، عدم قطعیت متغیر تصادفی برداشت، کنترل می‌گردد. لازم به ذکر است که، در بسیاری از موقعیت‌های عملی طرح سانسور تصادفی به آزمایش مورد نظر تحمیل می‌شود. به عنوان مثال، تعداد بیمارانی که در یک آزمایش بالینی در هر مرحله حذف می‌شوند، ممکن است تصادفی باشد . این امر اغلب به این دلیل رخ می‌دهد که، پس از مرگ یک بیمار، برخی از بیماران درمان را ادامه نمی‌دهند؛ چرا که ممکن است، اعتماد آن‌ها به پزشک (یا تیم پزشکی) از بین برود و یا آن‌که بخواهند دوره درمانی بهتری را در پیش بگیرند. همچنین در برخی آزمایش‌های صنعتی و قابلیت اعتماد، یک آزمایشگر ممکن است به این نتیجه برسد که، ادامه اجرای آزمون طول عمر برای برخی واحدهای تحت مطالعه که به طور کامل شکست نخورده‌اند، خطرناک یا نامناسب است. ابتدا این نوع طرح، توسط یوان و سی (۱۹۹۶) مطرح، و به نام طرح سانسور تصادفی ارائه شد. آن‌ها به بررسی مسأله برآورد پارامترها زمانی که توزیع طول عمر داده‌ها وایبل دو پارامتری و تحت سانسور فزاینده نوع دو با برداشت‌های تصادفی هستند، پرداختند. با این‌که توزیع یکنواخت گسسته هیچ پارامتر اضافی را به مدل تحمیل نمی‌کند و در نتیجه استنباط آماری پیچیده‌تر و پر زحمت‌تر نمی‌شود، اما الگوی برداشت یکنواخت گسسته صرف‌نظر از تعداد واحدهای برداشت‌شده، شانس احتمال یکسانی را به هر پیشامد برداشت اختصاص می‌دهد، که این ممکن است در تحلیل داده‌های واقعی مناسب نباشد. به عنوان مثال در طی یک آزمایش بالینی، شانس این‌که همه بیماران از آزمایش حذف شوند بایستی متفاوت باشد، که معمولاً کوچکتر است، از حالتی که فقط تعداد کمی از بیماران حذف می‌شوند. بنابراین همین انگیزه خوب و مناسبی برای سی و همکاران (۲۰۰۰) شد که، تفاوت در احتمال را به منظور تعداد متفاوت برداشت‌ها در نظر بگیرند و به نوعی پژوهش یوان و سی (۱۹۹۶) را تعمیم دهند. آن‌ها به جای استفاده از توزیع یکنواخت گسسته از توزیع دوجمله‌ای استفاده نمودند. ین مسئله انگیزه مناسبی را در بین بسیاری از محققان ایجاد نمود که، برای توزیع‌های متفاوت طول عمر، مطالعه و تحلیل آماری داده‌هایی که از طرح‌های برداشت تصادفی یکنواخت و دو جمله‌ای تبعیت می‌کنند را، مورد توجه قرار دهند. از جمله می‌توان به، سی و همکاران (۲۰۰۸)، سینگ و همکاران (۲۰۱۶)، شرفی (۲۰۱۹) و قهرمانی و همکاران (۲۰۲۰) اشاره نمود. در نوشتگان مربوط به موضوع برداشت تصادفی اغلب از توزیع دوجمله ای برای تعیین طرح سانسور استفاده

می‌شود، حال آن یکی از انتقادهایی که براین توزیع وارد می شود این است که، نتایج استنباطی مبتنی بر آن به شدت به مقدار پارامتر آزمایش برنولی وابسته است و ملاک قابل قبولی برای تعیین آن وجود ندارد. همچنین این توزیع مستقل از توزیع طول عمر داده‌ها است. قهرمانی و همکاران (۲۰۲۰) برای اولین بار دو توزیع توأم را برای بردار برداشت معرفی نمودند که وابسته به طول عمر مشاهدات است. با فرض این که توزیع داده‌های طول عمر نمایی است، آن‌ها از فاصله زمانی دو شکست متوالی برای تعیین طرح سانسور فزاینده استفاده نمودند. سپس، تابع احتمال توأم بردار سانسور را تحت دو رهیافت متفاوت به دست آوردند. اولین رهیافت پیشنهادی آن‌ها، بر اساس فاصله زمانی نرمالیده با ضریب تصادفی است و دیگری مبتنی بر فاصله زمانی نرمالیده با ضریب ثابت است.

در تحلیل آماری داده‌های طول عمر، توابع چگالی متفاوتی پیشنهاد شده است. یکی از پر کاربردترین توابع چگالی در قابلیت اعتماد و تحلیل بقا تابع چگالی احتمال وایبل است. ما در این مقاله با فرض این که توزیع داده‌های طول عمر وایبل است ، به معرفی دو الگوی جدید برداشت تصادفی وابسته به این توزیع می‌پردازیم. ایده پیشنهادی ما، تابعی از جذر فواصل متوالی نرمالیده آماره‌های ترتیبی سانسور فزاینده نوع دو، با ضرایب ثابت و تصادفی است. در ادامه، مطالب جدیدی راجع به استنباط آماری در حوزه برآوردیابی نقطه‌ای تحت توزیع وایبل دو پارامتری در حالت سانسور فزاینده نوع دو با طرح برداشت تصادفی ارائه شده است. سازماندهی این مقاله به این ترتیب است که، ابتدا در بخش ۲ توزیع وایبل دو پارامتری آورده شده است. معرفی الگوهای جدید برداشت تصادفی به بخش ۳ اختصاص داده شده است. در بخش ۴ توابع جرم احتمال مدل‌های پیشنهادی برای برداشت‌های تصادفی به‌دست آمده است. در بخش ۵ برآورد ماکسیمم درستنمایی، ماکسیمم حاصلضرب فاصله‌ای و کمترین توان های دوم، با فرض توزیع وایبل دو پارامتری و تحت سانسور فزاینده نوع دو بیان شده است. امید ریاضی زمان مورد انتظار آزمایش تحت طرح‌های پیشنهادی در بخش ۶ به ظرافت بیان شده است. در بخش ۷ با استفاده از روش‌های شبیه‌سازی مونت کارلو به ارزیابی طرح‌های پیشنهادی با دو طرح برداشت تصادفی یکنواخت و دو جمله‌ای پرداخته می‌شود. مبنای مقایسه‌ها قدر مطلق اریبی، جذر میانگین مربع خطا[1] $(RMSE)$ انواع برآوردگرها و امید ریاضی زمان مورد انتظار آزمایش است که، تحت سانسور فزاینده نوع دو، به‌دست آورده شده است. سپس، نسبت امید ریاضی زمان مورد انتظار تحت سانسور فزاینده نوع دو به حالت بدون برداشت بیان می‌شود. در بخش ۸ با استفاده از یک مجموعه داده واقعی، نمونه های سانسور فزاینده نوع دو ساخته شده و رهیافت‌های مورد نظر از لحاظ زمان پایان آزمایش مقایسه می‌شوند. در پایان نیز، نتیجه‌گیری کلی ارائه می‌گردد.

۲ توزیع وایبل دو پارامتری

توزیع وایبل از اهمیت ویژه‌ای در تحقیقات و مطالعات علمی برخوردار است. از جمله کاربردهای آن در حوزه علم مواد، می توان به توصیف تنش شکست فیبرهای کربن، مقاومت کششی نانو لوله‌های کربنی، در علم محیط زیست به منظور توصیف و بررسی فرایند رسوب قیر ساحل، در پزشکی برای مطالعه زمان جذب مولکول دارو در بدن موجود

[1] Root-Mean-Square Error

زنده اشاره نمود. به طور کلی در صنعت به منظور مدل بندی طول عمر مؤلفه‌هایی مانند بلبرینگ، خازن، سرامیک و دی الکتریک‌ها نیز از این توزیع استفاده می‌شود. از این رو ما در این مقاله فرض می کنیم که طول عمر مشاهدات از توزیع وایبل پیروی می‌کند.

فرض کنید $X_1, \ldots, X_n$ طول عمرهای n مولفه مستقل و هم‌توزیع از توزیع وایبل دو پارامتری، با پارامترهای θ و β باشند. به عبارت دیگر $X \sim W(\theta, \beta)$، آنگاه توابع چگالی احتمال و توزیع تجمعی X بترتیب به صورت

$$f(x;\theta,\beta) = \frac{\beta}{\theta}(\frac{x}{\theta})^{\beta-1}\exp[-(\frac{x}{\theta})^{\beta}]; \quad x \geq 0, \beta > 0, \theta > 0, \tag{1}$$

$$F(x;\theta,\beta) = 1 - \exp[-(\frac{x}{\theta})^{\beta}]; \quad x \geq 0, \beta > 0, \theta > 0, \tag{2}$$

بیان می‌شوند، که در آن θ پارامتر مقیاس و β پارامتر شکل (یا شیب) هستند.

۳ معرفی دو مدل برداشت تصادفی

فرض کنید n مولفه مستقل و هم‌توزیع با طول عمرهای تصادفی $X_1, \ldots, X_n$ در یک آزمایش طول عمر قرار می‌گیرند. با مشاهده اولین شکست، یعنی $X_{1:m:n}$ ، R_1 واحد از $n-1$ واحدهای سالم باقیمانده، به تصادف از روند آزمایش کنارگذاشته می‌شود. در این‌جا R_1 متغیری تصادفی و مقدارش محدود به $\{0, 1, \ldots, n-m\}$ است. با مشاهده دومین شکست، $X_{2:m:n}$ ، R_2 واحد از $n - R_1 - 2$ واحد باقی‌مانده به تصادف از آزمایش کنارگذاشته خواهند شد، به‌طوری که R_2 یک متغیر تصادفی و مقدارش محدود به $\{0, 1, \ldots, n-m-R_1\}$ است. در زمان شکست بعدی یعنی $X_{3:m:n}$، R_3 واحد به‌طور تصادفی از میان $n - R_1 - R_2 - 3$ واحد سالم باقی‌مانده تحت آزمایش کنارگذاشته می‌شوند. R_3 متغیری تصادفی و مقدارش محدود به دامنه $\{0, 1, \ldots, n-m-R_1-R_2\}$ است. به‌طور مشابه این فرایند تا زمان $m-1$امین شکست، یعنی $X_{m-1:m:n}$، و برداشت تصادفی R_{m-1} واحد از واحدهای سالم باقی‌مانده ادامه دارد. توجه کنید به طور کلی در این نوع طرح، R_i، برای $i = 1, \ldots, m-1$، وابسته به بردار تصادفی $(R_1, \ldots, R_{i-1})$ است. دامنه R_i محدود به $\{0, \ldots, n-m-\sum_{j=1}^{i-1} R_j\}$ است. در نهایت در زمان مشاهده mامین شکست، R_m برابر $n-m-\sum_{j=1}^{m-1} R_j$ است، یعنی تمام واحدهای سالم باقی‌مانده، بعد از mامین شکست، حذف می‌شوند. پس مجموعه قابل قبول برای برداشت R_iها به صورت

$$\zeta_{n,m}^{m} = \{(r_1, r_2, \ldots, r_m) \in N_0^{n,m} | \sum_{i=1}^{m} r_i = n-m\}, \tag{3}$$

است، که در آن $r_i \in \{0, \ldots, n-m-\sum_{j=1}^{i-1} r_j\}$ و $N_0^{n,m} = \{0, \ldots, n-m\}$ است. طرح سانسور تصادفی فزاینده نوع دو با نماد $\mathbf{R}_m = (R_1, \ldots, R_m)$ و زمان‌های مرتب شکست با نماد $\mathbf{X}_m =$

$(X_{1:m:n},\ldots,X_{m:m:n})$، نمایش داده می‌شوند.

حال، فرض کنید $\mathbf{X}_m$ آماره‌های مرتب یک نمونه سانسور فزاینده نوع دو از توزیع وایبل دو پارامتری با بردار برداشت تصادفی متناظر $\mathbf{R}_m$ باشد. به‌طوری‌که m تعداد شکست‌های مشاهده شده، عددی ثابت و از پیش تعیین شده با $m \le n$ است. حال، برای $i=1,\ldots,m$ ، تبدیل $Y_{i:m:n}=(\frac{X_{i:m:n}}{\theta})^{\beta}$ را در نظر بگیرید. بنابراین $(Y_{1:m:n},\ldots,Y_{m:m:n})$ نمونه سانسور فزاینده نوع دو از توزیع نمایی با میانگین یک است. بر اساس این نمونه، فاصله نرمالیده W_i^d به صورت

$$W_i^d=\begin{cases} nY_{1:m:n} & i=1,\\ \varphi_{d.i}(Y_{i:m:n}-Y_{i-1:m:n}) & i=2,\ldots,m,\end{cases} \tag{4}$$

تعریف می‌شود، که در آن

$$\varphi_{d.i}=\begin{cases} n-\sum_{j=1}^{i-1}R_j-(i-1), & d=1\\ n-\sum_{j=1}^{i-1}r_j-(i-1), & d=2.\end{cases}$$

سپس برای $d=1,2$، نسبت $V_i^d=W_i^d/W_1^d$، را تعریف می‌کنیم. i–امین برداشت تصادفی روی مجموعه قابل برداشت $\zeta_{n,m}^m$ در (۳) به صورت $R_i^d=\lfloor\sqrt{V_i^d}\rfloor$، $i=1,\ldots,m$، پیشنهاد می‌شود، که در آن $\lfloor\cdot\rfloor$ نماد جزء صحیح، و $d=1,2$ است. همچنین R_1^d، در نقطه ۱ تباهیده و تعداد برداشت R_m^d به صورت $R_m^d=\varphi_{d.m}=n-m-\sum_{j=2}^{m-1}R_j^d$ تعیین می‌شود. توجه کنید اگر در رابطه (۴) $d=1$، فاصله نرمالیده با ضریب‌های تصادفی به‌دست می‌آید. در بخش بعدی توابع جرم احتمال توأم $\mathbf{R}_{m-1}^d=(R_2^d,\ldots,R_{m-1}^d)$ تحت دو روش پیشنهادی، به‌دست آورده می‌شوند. به منظور سادگی در نماد گذاری، مدل فاصله نرمالیده با ضریب تصادفی، یعنی زمانی‌که $d=1$ است با نماد MRC[1] بیان می‌شود. برای حالت $d=2$، روش دوم مدل برداشت بر اساس فاصله نرمالیده با ضرایب ثابت، به اختصار MFC[2] نامیده می‌شود. دو روش پیشنهادی با بردارهای برداشت تصادفی $\mathbf{R}_{m-1}^{MRC}$ و $\mathbf{R}_{m-1}^{MFC}$ نشان داده می‌شود. لازم به ذکر است که قهرمانی و همکاران (۲۰۲۰) از خود V_i استفاده نمودند.

۴ تابع جرم احتمال مدل‌های برداشت تصادفی

برای $i=2,\ldots,k$ و $d=1,2$ نسبت $V_i^d=\frac{W_i^d}{W_1^d}$ را در نظر بگیرید، که در آن W_i^d در (۴) تعریف شده است.

[1] The Model with Random Coefficients
[2] The Model with Fixed Coefficients

لم ۱. تابع چگالی توأم $V_{\text{۲}}^d$، ...، V_k^d برای $d = \text{۱},\text{۲}$ و $k = \text{۲},\dots,m-\text{۱}$ عبارت است از

$$f_{(V_{\text{۲}}^d,\dots,V_k^d)}(v_{\text{۲}}^d,\dots,v_k^d) = \frac{\Gamma(k)}{(\text{۱}+\sum_{j=\text{۲}}^k v_j)^k}.$$

برهان: از توماس و ویلسون (۱۹۷۲) و کرامر و ایلیاپلوس (۲۰۱۰)، متغیرهای تصادفی $W_{\text{۱}}^d,\dots,W_m^d$ مستقل و دارای توزیع یکسان نمایی با میانگین ۱ برای $d = \text{۱},\text{۲}$ هستند. بنابراین تابع چگالی V_i^d به صورت $f_{V_i^d}(v_i) = \frac{\text{۱}}{(\text{۱}+v_i)^{\text{۲}}}$ است، که همان توزیع فیشر با پارامترهای $(\text{۲},\text{۲})$ است. همچنین با انتخاب $Z \equiv W_{\text{۱}}^d$ و با استفاده از روش تبدیل ژاکوبین خواهیم داشت:

$$f_{Z,V_{\text{۲}}^d,\dots,V_k^d}(z,v_{\text{۲}},\dots,v_k) = z^{k-\text{۱}}\lambda^k e^{-z(\lambda(\sum_{j=\text{۲}}^k v_j+\text{۱}))},$$

در ادامه با انتگرال‌گیری نسبت به z نتیجه مطلوب حاصل می‌شود.
حال با استفاده از لم ۱ تابع جرم احتمال توأم $\mathbf{R}_k^{MRC} \equiv (R_{\text{۲}},\dots,R_k)$ برای $k = \text{۲},\dots,m-\text{۱}$، به نام روش MRC، به‌دست آورده می‌شود.

قضیه ۱. تابع جرم احتمال توأم $\mathbf{R}_k^{MRC}$، برای $k = \text{۲},\dots,m-\text{۱}$، به صورت

$$Pr(\mathbf{R}_k^{MRC}) \;=\; \tau_k^{-\text{۱}} \sum_{i=\text{۱}}^{\text{۲}^{k-\text{۱}}} \frac{(-\text{۱})^{\sum_{j=\text{۱}}^{k-\text{۱}} a_{i,j}}}{\text{۱}+\sum_{j=\text{۱}}^{k-\text{۱}}(r_{j+\text{۱}}+a_{i,j})^{\text{۲}}}. \qquad (\text{۵})$$

است، که در آن برای $i = \text{۱},\dots,\text{۲}^{k-\text{۱}}$ و $j = \text{۱},\dots,k-\text{۱}$، $a_{i,j}$، j امین مولفه سطر i ام، ماتریس $A_{k-\text{۱}}$ است که از تمام جایگشت‌های ممکن $k-\text{۱}$ تایی روی مجموعه $\{\text{۰},\text{۱}\}$ تشکیل شده است. همچنین $\tau_k^{-\text{۱}}$ ثابت نرمال‌ساز است به طوری که

$$\begin{aligned}\tau_k &= Pr\big(R_{\text{۲}}^{d=\text{۱}} \le \ell_\circ, R_{\text{۳}}^{d=\text{۱}} \le \ell_\circ - r_{\text{۲}},\dots,R_k^{d=\text{۱}} \le \ell_\circ - \sum_{j=\text{۲}}^{k-\text{۱}} r_j\big)\\ &= \sum_{r_{d_\circ}(d_\circ=\text{۲},\dots,k)=\circ}^{\ell_\circ+\text{۱}-\sum_{j=\text{۱}}^{d_\circ-\text{۱}} r_j} \; \sum_{i=\text{۱}}^{\text{۲}^{k-\text{۱}}} \frac{(-\text{۱})^{\sum_{j=\text{۱}}^{k-\text{۱}} a_{i,j}}}{\text{۱}+\sum_{j=\text{۱}}^{k-\text{۱}}(r_{j+\text{۱}}+a_{i,j})^{\text{۲}}},\end{aligned}$$

که در آن $\ell_\circ \equiv n-m-\text{۱}$ و $r_{\text{۱}} = \text{۱}$.

برهان: به منظور سادگی و بدون از دست دادن کلیت مساله، رابطه را برای $k=2$ بررسی می‌کنیم.

$$\begin{aligned} Pr(R_2^{d=1}=r_2) &= \tau_2^{-1} Pr([\sqrt{V_2^{d=1}}]=r_2) \\ &= \tau_2^{-1}\int_{r_2^2}^{(r_2+1)^2} \frac{1}{(1+v_2)^2} dv_2 \\ &= \tau_2^{-1}\sum_{i=1}^{2} \frac{(-1)^{\sum_{j=1}^{1} a_{i,j}}}{1+\sum_{j=1}^{1}(r_{j+1}+a_{i,j})^2}, \end{aligned}$$

در این‌جا $A_1^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$؛ که در آن A^t ترانهاده ماتریس A است. برای حالت $k=3$ خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} Pr(R_2^{d=1}=r_2, R_3^{d=1}=r_3) &= \tau_3^{-1}\int_{r_3^2}^{(r_3+1)^2}\int_{r_2^2}^{(r_2+1)^2} \Big[\frac{1}{(1+v_2+v_3)^3}\Big] dv_2 dv_3 \\ &= \tau_3^{-1}\sum_{i=1}^{4} \frac{(-1)^{\sum_{j=1}^{2} a_{i,j}}}{1+\sum_{j=1}^{2}(r_{j+1}+a_{i,j})^2}, \end{aligned}$$

که در آن $A_2^t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ و $\tau_3 = \sum_{r_{d_\circ}(d_\circ=2,3)=0}^{\ell_\circ+1-\sum_{j=1}^{d_\circ-1} r_j} \sum_{i=1}^{2^2} \frac{(-1)^{\sum_{j=1}^{2} a_{i,j}}}{1+\sum_{j=1}^{3-1}(r_{j+1}+a_{i,j})^2}$.
با تکرار این روابط برای حالت $k=4,\ldots,m-1$، نتیجه مطلوب حاصل می‌شود.

قضیه ۲. تابع جرم احتمال توأم $\mathbf{R}_k^{MFC}$، برای $k=2,\ldots,m-1$، به صورت

$$Pr(\mathbf{R}_k^{MFC}) \quad = \quad \delta_k^{-1}\prod_{i=2}^{k}\Big(\frac{1}{1+r_i^2} - \frac{1}{1+(1+r_i)^2}\Big) \tag{۶}$$

است، که در آن $\delta_k = \sum_{r_{d_\circ}(d_\circ=2,\ldots,k)=0}^{\ell_\circ+1-\sum_{j=1}^{d_\circ-1} r_j} \prod_{i=2}^{k}\big(\frac{1}{(1+r_i^2)} - \frac{1}{1+(1+r_i)^2}\big)$ و $\ell_\circ = n-m-1$.
برهان: برای $i=2,\ldots,k$ و $k=2,\ldots,m-1$، داریم

$$\begin{aligned} & Pr(R_i^{d=2}=r_i \mid R_2^{d=2}=r_2,\ldots,R_{i-1}^{d=2}=r_{i-1}) \\ & = \delta_i^{-1}\int_{r_i^2}^{(r_i+1)^2} \frac{1}{(1+v_i)^2} dv_i = \delta_i^{-1}\Big\{\frac{1}{1+r_i^2} - \frac{1}{1+(1+r_i)^2}\Big\}, \end{aligned} \tag{۷}$$

به‌طوری که ثابت نرمال‌ساز برای $i=2,\dots,k$ و $k=2,\dots,m-1$، به صورت

$$\delta_i = \sum_{r_j=0}^{\ell_0+1-\sum_{\ell=1}^{i-1} r_\ell} \left(\frac{1}{1+r_j^2} - \frac{1}{1+(1+r_j)^2}\right) = \frac{(n-m-\sum_{\ell=1}^{i-1} r_\ell + 1)^2}{1+(n-m-\sum_{\ell=1}^{i-1} r_\ell + 1)^2}.$$

تعریف می‌شود. می‌دانیم $r_1=1$ است. از طرف دیگر تابع جرم احتمال توأم به صورت

$$\begin{aligned} Pr(R_2^{d=2}=r_2,\dots,R_k^{d=2}=r_k) = {} & Pr(R_2^{d=2}=r_2) \\ & \times Pr(R_3^{d=2}=r_3 \mid R_2^{d=2}=r_2) \\ & \times Pr(R_4^{d=2}=r_4 \mid R_2^{d=2}=r_2, R_3^{d=2}=r_3) \times \dots \\ & \times Pr(R_k^{d=2}=r_k \mid R_2^{d=2}=r_2,\dots,R_{k-1}^{d=2}=r_{k-1}). \end{aligned}$$

به‌دست می‌آید و با جایگذاری (۷) در آن اثبات قضیه کامل می‌شود.

۵ برآورد پارامترهای مدل

فرض کنید $(X_{1:m:n},R_1),\dots,(X_{m:m:n},R_m)$ نمونه سانسور فزاینده نوع دو از توزیع طول عمر وایبل دو پارامتری است؛ به‌طوری که تابع جرم احتمال توأم R_iها توسط چهار تابع متفاوت تعریف شده است. دو تابع پیشنهادی که در بخش ۳ معرفی شدند، به همراه توابع یکنواخت گسسته و دو جمله‌ای که در بخش شبیه‌سازی در ادامه بحث می‌شوند.

۵.۱ برآورد ماکسیمم درستنمایی

تابع درستنمایی مدل به صورت

$$L_1(\theta,\beta;\mathbf{x}_m,\mathbf{r}_m) = L_2(\theta,\beta;\mathbf{X}_m=\mathbf{x}_m \mid \mathbf{R}_m=\mathbf{r}_m) Pr(\mathbf{R}_m=\mathbf{r}_m).$$

است. از طرفی چون $Pr(\mathbf{R}_m=\mathbf{r}_m)$ شامل پارامترهای θ و β نمی‌شود؛ از این رو برآوردگرهای ماکسیمم درستنمایی از ماکسیمم سازی معادله $L_2(\theta,\beta;\mathbf{X}_m=\mathbf{x}_m \mid \mathbf{R}_m=\mathbf{r}_m)$ به‌دست می‌آیند. لازم به ذکر است که

همچنین در روش‌های دیگر برآوردیابی، که در ادامه این بخش معرفی می‌شوند، به دلیل عدم وابستگی انواع توزیع‌های برداشت به پارامترهای مدل، مینیمم یا ماکسیمم سازی توابعی که بر اساس آن‌ها پارامترها برآورد میشوند؛ در حالت توأم و شرطی منجر به استباط یکسانی خواهند شد. از این رو فقط از توابعی که روی پیشامد $\{\mathbf{R}_m=\mathbf{r}_m\}$ شرطی شده در جهت برآوردیابی استفاده می‌شود. تابع درستنمایی سانسور فزاینده نوع دو به صورت

$$L_۲(\theta,\beta;\mathbf{x}_m\mid\mathbf{R}_m=\mathbf{r}_m)=c\prod_{i=۱}^{m}f(x_{i:m:n};\theta,\beta)(۱-F(x_{i:m:n};\theta,\beta))^{r_i},\qquad (۸)$$

است (کوهن ، ۱۹۶۳). که در آن $c_i=n-\sum_{j=۱}^{i-۱}(r_j+۱)$ برای $i=۱,\dots,m$، همچنین $\sum_{j=۱}^{۰}r_j\equiv ۰$ و $c=\prod_{i=۱}^{m}c_i$ است. با جایگذاری (۱) و (۲) در (۸)، لگاریتم تابع درستنمایی نمونه سانسور فزاینده نوع دو، وایبل دو پارامتری به صورت

$$\ell=\log c+m\log\frac{\beta}{\theta}+(\beta-۱)\sum_{i=۱}^{m}\log\big(\frac{x_{i:m:n}}{\theta}\big)-\sum_{i=۱}^{m}(r_i+۱)\big(\frac{x_{i:m:n}}{\theta}\big)^{\beta}.$$

به‌دست می‌آید. حال با مشتقگیری جزیی مرتبه اول از تابع لگاریتم درستنمایی نسبت به پارامترهای توزیع وایبل دو پارامتری و مساوی صفر قرار دادن آن ها، خواهیم داشت:

$$\frac{\partial\ell}{\partial\theta}=-m\frac{\beta}{\theta}+\sum_{i=۱}^{m}(r_i+۱)\frac{\beta}{\theta}\big(\frac{x_{i:m:n}}{\theta}\big)^{\beta}=۰,$$
$$\frac{\partial\ell}{\partial\beta}=\frac{m}{\beta}+\sum_{i=۱}^{m}\log(\frac{x_{i:m:n}}{\theta})-\sum_{i=۱}^{m}(r_i+۱)\left(\frac{x_{i:m:n}}{\theta}\right)^{\beta}\log\left(\frac{x_{i:m:n}}{\theta}\right)=۰.$$

می‌توان دو معادله درستنمایی را از لحاظ عددی حل کرد. یک روش مؤثر و قابل اعتماد به منظور به‌دست آوردن نقطه آغازین برآوردگرها، به‌کارگیری روش اِنگ و همکاران (۲۰۱۲) در حل عددی است، این الگوریتم برای به‌دست آوردن برآورد پارامترها در بخش شبیه‌سازی به کار رفته است. مؤلفه‌های ماتریس هسین تابع لگاریتم درستنمایی عبارتند از

$$I^o_{۱۱}=\frac{\partial^۲\ell}{\partial\theta^۲}=\frac{m\beta}{\theta^۲}-\frac{\beta(\beta+۱)}{\theta^۲}\sum_{i=۱}^{m}(r_i+۱)(\frac{x_{i:m:n}}{\theta})^{\beta}.$$
$$I^o_{۲۲}=\frac{\partial^۲\ell}{\partial\beta^۲}=\frac{-m}{\beta^۲}-\sum_{i=۱}^{m}(r_i+۱)(\frac{x_{i:m:n}}{\theta})^{\beta}(\log(\frac{x_{i:m:n}}{\theta}))^۲.$$
$$I^o_{۱۲}=\frac{\partial^۲\ell}{\partial\theta\partial\beta}=\frac{-m}{\theta}+\sum_{i=۱}^{m}\frac{(r_i+۱)}{\theta}(\frac{x_{i:m:n}}{\theta})^{\beta}[۱+\beta\log(\frac{x_{i:m:n}}{\theta})].$$

۵. ۲ برآورد ماکسیمم حاصلضرب فاصله‌ای

روش برآورد ماکسیمم حاصلضرب فواصل[۱] (MPS) برای پارامترهای توزیع‌های تک متغیره (چنگ و امین ، ۱۹۸۳) برگرفته از قضیه تبدیل انتگرال احتمال است که در آن متغیرهای تصادفی هر توزیع پیوسته‌ای، می‌توانند به متغیرهای توزیع یکنواخت تبدیل شوند. تابع حاصلضرب فواصل، برای داده‌های سانسور فزاینده نوع دو به صورت

$$\begin{aligned}\mathcal{S}(\theta,\beta;\mathbf{x}_m \mid \mathbf{R}_m=\mathbf{r}_m) &= \prod_{i=1}^{m+1}[F(x_{i:m:n};\theta,\beta)-F(x_{i-1:m:n};\theta,\beta)]\times \\ &\quad \prod_{i=1}^{m}[1-F(x_{i:m:n};\theta,\beta))]^{r_i} \\ &= [F(x_{m+1:m:n};\theta,\beta)-F(x_{m:m:n};\theta,\beta)]\times \\ &\quad \prod_{i=1}^{m}[F(x_{i:m:n};\theta,\beta)-F(x_{i-1:m:n};\theta,\beta)] \\ &\quad \times[1-F(x_{i:m:n};\theta,\beta))]^{r_i}, \qquad (9)\end{aligned}$$

است که در آن $F(x_{0:m:n})\equiv 0$ و $F(x_{m+1:m:n})\equiv 1$. بنابراین برآوردهای MPS، از ماکسیمم‌سازی تابع $\mathcal{S}(\theta,\beta)$ نسبت به پارامترهای θ و β به‌دست می‌آیند.

۵. ۳ برآورد کمترین توان‌های دوم

یوکیچ و همکاران (۲۰۰۸) و مارکوویچ و همکاران (۲۰۰۹) برآورد کمترین توان‌های دوم[۲] (LSE) وزنی غیر خطی را، بر اساس برآورد ناپارامتری تابع توزیع تجمعی برای توزیع وایبل سه پارامتری بررسی کردند. تحت سانسور فزاینده نوع دو، برآورد LSE، از مینیمم کردن فاصله مربع وزنی شده بین برآورد ناپارامتری تابع توزیع تجمعی و تابع توزیع تجمعی پارامتری نسبت به پارامترهای مجهول به‌دست می‌آید. تابعی که باید مینیمم شود به صورت

$$\mathcal{Q}(\theta,\beta;\mathbf{x}_m \mid \mathbf{R}_m=\mathbf{r}_m)=\sum_{i=1}^{m} w_i([F(x_{i:m:n};\theta,\beta)-\hat{F}(x_{i-1:m:n})])^2,$$

است که در آن $\hat{F}(x_{i:m:n})$ برآورد ناپارامتری تابع F و $w_i=1/Var\big(\hat{F}(x_{i:m:n})\big)$ است. برای انتخاب‌های متفاوت و ممکن، برآوردهای ناپارامتری تابع توزیع تجمعی، به یوکیچ و همکاران (۲۰۰۸) مراجعه شود. در این‌جا

[1] Maximum product of spacing estimation
[2] Least squares estimation

از برآوردگر کاپلان-مهیر به عنوان یکی از برآوردگرهای ناپارامتری تابع توزیع تجمعی و از فرمول گرین‌وود[1] برای برآورد واریانس استفاده می‌شود. تحت طرح سانسور فزاینده نوع دو برآوردگر کاپلان-مهیر $F(x_{i:m:n})$، به صورت

$$\hat{F}(x_{i:m:n}) = 1 - \prod_{j=1}^{i}(1 - \frac{1}{n_j^*}), \quad i = 1, \ldots, m,$$

است، که در آن $n_i^* = n - i + 1 - \sum_{j=0}^{i-1} r_j,$ و $r_0 \equiv 0$ است. همچنین برآورد واریانس بر اساس فرمول گرین‌وود عبارت است از

$$\widehat{Var}[\hat{F}(x_{i:m:n})] = \left[1 - \hat{F}(x_{i:m:n})\right]^2 \sum_{\ell=1}^{i}(\frac{1}{n_\ell^*(n_\ell^* - 1)}).$$

۶ امید ریاضی زمان مورد انتظار آزمایش

در کاربردهای عملی، هزینه‌های مرتبط با اجرای آزمون طول عمر، به طول مدت زمان آزمایش وابسته است. بنابراین برای یک آزمایشگر انتخاب طرحی که منجر به کاهش مدت زمان انتظار آزمایش شود، بسیار قابل توجه است. مقدار مدت زمان انتظار $X_{m:m:n}$ را می‌توان مبنایی برای مقایسه تأثیر طرح‌های متفاوت برداشت در نظر گرفته شود. مقدار مورد انتظار $X_{m:m:n}$ به شرط R_m یعنی مدت زمان مورد نیاز برای اتمام آزمایش تحت سانسور فزاینده نوع دو با بردار برداشت معلوم r_m، برابر است با:

$$\begin{aligned}
E\left[X_{m:m:n}|\mathbf{R}_m\right] &= C(\mathbf{r}) \sum_{\ell_1=0}^{r_1} \cdots \sum_{\ell_m=0}^{r_m} (-1)^{\sum_{i=1}^{m} \ell_i} \frac{\binom{r_1}{\ell_1} \cdots \binom{r_m}{\ell_m}}{\prod_{i=1}^{m-1} h(\ell_i)} \\
&\times \int_0^\infty x f(x) F^{h(\ell_i)-1}(x) dx \\
&= C(\mathbf{r}) \sum_{\ell_1=0}^{r_1} \cdots \sum_{\ell_m=0}^{r_m} (-1)^{\sum_{i=1}^{m} \ell_i} \frac{\binom{r_1}{\ell_1} \cdots \binom{r_m}{\ell_m}}{\prod_{i=1}^{m-1} h(\ell_i)} \\
&\times \sum_{k=0}^{h(\ell_i)-1} (-1)^k \binom{h(\ell_i) - 1}{k} (\frac{1}{k+1})^{\frac{1}{\beta}+1}, \qquad (10)
\end{aligned}$$

که در آن $C(\mathbf{r}) = n(n-r_1-1)(n-r_1-r_2-2)\ldots(n-\sum_{j=1}^{m-1}(r_i+1))$ و $h(\ell_i) = \sum_{j=1}^{i}(\ell_j+j)$ است. شایان ذکر است که هرگاه برای هر i، $r_i = 0$ عبارت (۱۰) برابر با زمان مورد انتظار طرح سانسور نوع دو است. طول مدت مورد انتظار آزمایش تحت سانسور فزاینده نوع دو با برداشت‌های تصادفی، با اعمال امید ریاضی

[1] Greenwood's formula

از طرفین رابطه (۱۰) نسبت به $\mathbf{R}_m$ به‌صورت

$$\begin{aligned} E(X_{m:m:n}) &= E_{\mathbf{R}_m}\left(E\left(X_{m:m:n}|\mathbf{R}_m=\mathbf{r}_m\right)\right) \\ &= \sum_{r_1=0}^{g(r_1)}\cdots\sum_{r_{m-1}=0}^{g(r_{m-1})} E\left[X_{m:m:n}|\mathbf{R}_m\right]Pr\left(\mathbf{R}_m=\mathbf{r}_m\right), \end{aligned} \qquad (۱۱)$$

حاصل می‌شود، که در آن $g(r_1)=n-m$ و برای $i=2,\dots,m-1$، $g(r_i)=n-m-\sum_{j=1}^{i-1}r_j$ است. $Pr\left(\mathbf{R}_m=\mathbf{r}_m\right)$ در چهار رابطه (۵)، (۶)، (۱۳) و (۱۴) آمده است. همچنین امید ریاضی زمان مورد انتظار با n واحد مورد آزمایش، در حالت نمونه‌گیری کامل، یعنی $n=m$ به صورت

$$E(X_m)=n\theta\Gamma(1+\frac{1}{\beta})\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i\binom{n-1}{i}(\frac{1}{i+1})^{\frac{1}{\beta}+1}, \qquad (۱۲)$$

است، که در آن $\Gamma(.)$ تابع گاما و به صورت $\Gamma(t)=\int_0^\infty y^{t-1}e^{-y}dy$ است. برای مقایسه معادلات (۱۱) و (۱۲)، معیار نسبت امید مورد انتظار[1]، (REET) بین نمونه سانسور فزاینده نوع دو در حالت برداشت تصادفی و حالت نمونه کامل، یعنی $REET=\frac{E(X_{m:m:n})}{E(X_m)}$، معرفی می‌شود. توجه شود که $REET$، به پارامتر مقیاس θ، وابسته نیست. فرض کنید در یک آزمون طول عمر، آزمایشگر علاقه‌مند به مشاهده حداقل m شکست کامل است و انتظار می‌رود که آزمون، تحت سانسور فزاینده نوع دو با برداشت‌های تصادفی انجام شود. در این حالت، $REET$ می تواند نقش مؤثر و تعیین کننده ای در پاسخ به این سؤال داشته باشد که، آیا زمان آزمایش می تواند به طور قابل توجهی کوتاه شود؛ اگر یک نمونه بسیار بزرگتر از n واحد آزمون مورد استفاده قرار گیرد و آزمون با مشاهده m شکست متوقف شود؟ واضح است که محاسبه تحلیلی طول مدت زمان مورد انتظار، سخت و طاقت‌فرسا است. یک راه جایگزین، محاسبه به صورت عددی است. در بخش بعدی $E[X_{m:m:n}]$ با شبیه‌سازی مونت کارلو برای مقادیر متفاوت n، m، p و β با الگوی‌های برداشت تصادفی متفاوت تحت نمونه‌های سانسور فزاینده نوع دو از توزیع طول عمر وایبل دو پارامتری محاسبه و با هم مقایسه شده‌اند. همچنین طرح‌های برداشت ثابتی که در مقاله اِنگ و همکاران (۲۰۱۲) معرفی شده شده در بخش نتایج شبیه‌سازی و عددی آورده شده و با طرح‌های برداشت تصادفی مقایسه شده‌اند.

۷ مطالعه شبیه‌سازی

در این بخش مدل‌های برداشت تصادفی پیشنهادی با مدل‌های موجود و همچنین طرح‌های برداشت ثابت مقایسه شده است. طرح‌های سانسور فزاینده تصادفی از چهار الگوی برداشت متفاوت تولید شده‌اند؛ به طوری که دو الگوی

[1] Ratio of the Expected Experiment Time

برداشت پیشنهادی MRC و MFC که در بخش ۳ معرفی شده‌اند و دو الگوی دیگر -که در ادامه به معرفی آن‌ها می‌پردازیم- در متون علمی مربوطه ارائه شده است. سومین الگوی برداشت مورد استفاده در این مقاله، برداشت تصادفی از توزیع یکنواخت گسسته است که توسط یوان و سی (۱۹۹۶) به صورت

$$Pr(R_i = r_i \mid R_1 = r_1, \ldots, R_{i-1} = r_{i-1}) = \frac{1}{n - m - \sum_{j=1}^{i-1} r_j + 1}, \tag{13}$$

معرفی شده است، به‌طوری که برای $i = 1, \ldots, m-1$، $0 \leq r_i \leq n - m - \sum_{j=1}^{i-1} r_j$. الگوی برداشت چهارم، برداشت تصادفی بر اساس توزیع دوجمله‌ای با پارامتر p است که توسط سی و همکاران (۲۰۰۰) به صورت

$$\begin{aligned} Pr(R_1 = r_1) &= \binom{n-m}{r_1} p^{r_1} (1-p)^{n-m-r_1} \\ Pr(R_i = r_i \mid R_1 = r_1, \ldots, R_{i-1} = r_{i-1}) &= \binom{n - m - \sum_{j=1}^{i-1} r_j}{r_i} p^{r_i} \\ &\times (1-p)^{n-m-\sum_{j=1}^{i-1} r_j}, \end{aligned} \tag{14}$$

ارائه شده است؛ که در آن برای $i = 1, \ldots, m-1$، $0 \leq r_i \leq n - m - \sum_{j=1}^{i-1} r_j$ است.

در گام نخست شبیه‌سازی طرح‌های سانسور $\mathbf{R}_m$ تحت چهار الگو برداشت ذکر شده با ۱۰۰۰ تکرار تولید می‌شوند. سپس نمونه‌های سانسور فزاینده نوع دو از توزیع وایبل دو پارامتری با پارامترهای $\theta = 100$ و برای $\beta = 0.5, 1, 2$ با استفاده از الگوریتم تعریف شده در بالاکریشنان و سندهو (۱۹۹۵) به دست آورده می‌شوند. در ادامه، برای هر مجموعه از داده‌های شبیه‌سازی شده، برآوردگرهای مورد بحث در بخش ۵ را محاسبه می‌کنیم. کدهای برنامه شبیه‌سازی، در نرم‌افزار R نسخه ۳.۵.۲ نوشته شده است. همچنین به منظور یافتن جواب‌های معادلات درستنمایی، از تابع $maxLik$، دربسته نرم‌افزاری $maxLik$ و برای همگرایی سریع‌تر، از بردارهای گرادیان و ماتریس هسین در بخش ۵ استفاده شده است. برای تعیین نقطه شروع θ_0 و β_0 روش اِنگ و همکاران (۲۰۱۲) به

جدول ۱. مدل‌های برداشت ثابت در شبیه‌سازی مونت کارلو

scheme	$(r_1, \ldots, r_m)$	(n, m)
[۱]	$(6, 3*0)$	(۴،۱۰)
[۲]	$(0, 6, 2*0)$	
[۳]	$(3, 6*0)$	(۷،۱۰)
[۴]	$(0, 3, 5*0)$	
[۵]	$(12, 7*0)$	(۸،۲۰)
[۶]	$(0, 12, 6*0)$	
[۷]	$(4, 15*0)$	(۱۶،۲۰)
[۸]	$(0, 4, 14*0)$	

کار رفته است. مقادیر شبیه‌سازی برای حجم‌های نمونه $n = ۱۰, ۲۰$، و با انتخاب متفاوت حجم نمونه‌های موثر m، پارامترهای متفاوت $\theta = ۱۰۰$ و $\beta = ۰٫۵, ۱, ۲$ و با احتمال موفقیت $p = ۰٫۴, ۰٫۷۵$ در توزیع برداشت دوجمله‌ای به‌دست آمده‌اند. همچنین طرح برداشت‌های ثابت در جدول ۱ فهرست شده است.

جدول ۲. نتایج روش‌های برداشت متفاوت تولید طرح‌های سانسور فزاینده نوع دو از توزیع وایبل با $\theta = ۱۰۰$ و $\beta = ۰٫۵$

	β		θ					
$\mathbf{E(X_{m:m:n})}$	RMSE	Bias	RMSE	Bias	Method	Plan	m	n
۵۱٫۹۸۵	۰٫۵۲۲	۰٫۰۹۸	۶۴٫۰۱۸	−۴۹٫۱۰۵	MPS	MRC	۴	۱۰
۴۷٫۵۸۳	۲٫۷۹۶	۰٫۴۴۰	۷۵٫۴۴۵	−۱۸٫۶۹۹	LSE			
۵۹٫۰۴۶	۰٫۸۵۰	۰٫۳۸۱	۶۵٫۷۰۷	−۲۴٫۵۴۷	MLE			
۶۰٫۶۷۵	۰٫۴۵۴	۰٫۱۰۶	۶۲٫۷۸۳	−۵۰٫۷۸۴	MPS	MFC		
۶۵٫۳۶۷	۱٫۷۳۸	۰٫۳۰۵	۷۳٫۱۰۲	−۱۶٫۳۴۱	LSE			
۵۵٫۲۸۰	۰٫۷۷۸	۰٫۴۱۰	۶۶٫۸۷۸	−۲۸٫۶۱۰	MLE			
۱۹۴٫۰۰۵	۰٫۳۷۵	−۰٫۰۲۱	۶۲٫۰۲۹	−۵۳٫۵۶۵	MPS	Uniform		
۱۹۸٫۲۵۲	۱٫۰۹۵	۰٫۰۱۰	۷۷٫۹۶۱۹	−۸٫۶۰۲	LSE			
۱۸۴٫۴۷۹	۰٫۶۸۸	۰٫۳۲۴	۶۶٫۳۸۵	−۲۴٫۵۷۸	MLE			
۱۸۴٫۷۶۹	۰٫۴۲۶	−۰٫۲۱۲	۵۸٫۴۲۷	−۵۰٫۰۶۲	MPS	$B(\cdot, ۴)$		
۱۷۷٫۲۸۲	۰٫۶۵۲	۰٫۲۱۶	۷۸٫۷۴۰	−۷٫۱۹۵	LSE			
۱۷۰٫۹۵۰	۰٫۷۸۳	۰٫۳۰۳	۶۹٫۷۳۷	−۲۰٫۴۰۵	MLE			
۴۲۹٫۸۶۰	۰٫۲۴۲	−۰٫۱۳۴	۶۱٫۱۸۶	−۵۵٫۸۷۲	MPS	$B(\cdot, ۰٫۷۵)$		
۳۹۹٫۶۹۱	۰٫۳۷۶	−۰٫۱۶۹	۸۶٫۳۹۲	۱۱٫۲۴۹	LSE			
۴۰۳٫۰۱۳	۰٫۴۰۸	۰٫۱۹۳	۶۸٫۰۶۰	−۱۸٫۶۶۴	MLE			
۴۸۵٫۲۸۰	۰٫۲۴۱۴	−۰٫۱۷۴	۶۶٫۵۱۰	−۶۳٫۲۸۸	MPS	[۱]		
۵۳۸٫۳۶۳	۰٫۴۰۹	−۰٫۱۶۸۰	۹۳٫۶۷۶	۱۵٫۴۸۴	LSE			
۴۶۷٫۱۳۳	۰٫۵۱۴	۰٫۱۹۳	۷۳٫۱۲۹	−۱۶٫۷۳۳	MLE			
۳۹۹٫۷۳۰	۰٫۲۷۳	−۰٫۱۴۲	۶۹٫۷۶۱	−۶۶٫۵۸۸	MPS	[۲]		
۴۲۱٫۴۷۸	۰٫۳۱۴۵	−۰٫۲۱۷	۷۹٫۶۵۰	−۱۵٫۰۴۸	LSE			
۴۳۱٫۱۸۴	۰٫۵۵۰	۰٫۲۶۲	۷۰٫۳۶۹	−۱۷٫۳۰۵	MLE			
۲۴۲٫۰۳۳	۰٫۲۰۶	−۰٫۰۳۹	۴۵٫۱۹۶	−۲۸٫۱۸۸	MPS	MRC	۷	۱۰
۲۶۷٫۱۵۹	۰٫۲۳۶	−۰٫۰۴۶	۸۱٫۳۸۹	۱۶٫۸۴۰	LSE			
۳۷۰٫۲۳۵	۰٫۲۷۵	۰٫۱۲۲	۶۰٫۴۱۴	−۱٫۹۴۶	MLE			
۴۷۷٫۳۲۷	۰٫۲۱۱	−۰٫۰۴۹	۴۵٫۴۷۹	−۳۳٫۴۱۹	MPS	MFC		
۴۹۸٫۱۲۶	۰٫۲۱۶	−۰٫۰۵۹	۷۹٫۵۳۷	۱۰٫۸۱۶	LSE			
۴۸۲٫۰۹۷	۰٫۲۸۶	۰٫۱۲۵	۶۱٫۶۱۵	−۳٫۲۱۹	MLE			
۶۹۸٫۶۷۷	۰٫۱۹۵	−۰٫۰۶۸	۴۸٫۱۲۱	−۳۸٫۵۸۲	MPS	Uniform		
۷۱۲٫۵۴۳	۰٫۲۴۵	−۰٫۰۲۶	۷۷٫۷۲۰	۳٫۷۷۸	LSE			
۶۸۷٫۳۹۶	۰٫۲۷۰	۰٫۱۲۳	۶۶٫۰۶۷	−۱٫۰۶۳	MLE			
۵۸۹٫۸۰۹	۰٫۱۷۶	−۰٫۰۷۳	۴۷٫۵۱۷	−۳۵٫۱۶۲۴	MPS	$B(\cdot, ۰٫۴)$		
۵۷۲٫۴۷۵	۰٫۲۵۳	−۰٫۰۲۳	۷۸٫۵۸۵	۸٫۲۳۰	LSE			
۵۷۰٫۸۵۴	۰٫۲۵۹	۰٫۱۲۲	۶۱٫۱۵۵	−۲٫۶۶۶	MLE			
۷۶۱٫۳۳۹	۰٫۱۷۶	−۰٫۰۹۸	۴۹٫۳۱۳	−۴۰٫۳۲۸	MPS	$B(\cdot, ۰٫۷۵)$		
۸۰۹٫۳۶۰	۰٫۲۲۶	−۰٫۰۲۱	۷۸٫۷۷۱	۴٫۶۷۱	LSE			
۷۴۲٫۶۸۶	۰٫۲۳۸	۰٫۱۱۲	۶۷٫۴۵۸	۱٫۶۷۰	MLE			
۷۷۱٫۱۰۴	۰٫۱۷۹	−۰٫۱۰۱	۵۰٫۵۹۰	−۴۲٫۹۶۳	MPS	[۳]		
۷۸۳٫۴۲۳	۰٫۲۴۷	−۰٫۰۴۹	۸۳٫۸۲۰	۷٫۹۴۶	LSE			
۸۲۸٫۱۳۵	۰٫۲۲۱	۰٫۱۰۱	۷۰٫۸۶۱	۴٫۷۲۷	MLE			
۸۰۰٫۹۷۰	۰٫۱۷۰	−۰٫۱۱۲	۵۱٫۴۱۲	−۴۴٫۸۵۱	MPS	[۴]		
۷۶۴٫۳۲۱	۰٫۲۸۷	−۰٫۰۲۴	۸۱٫۹۷۳	۵٫۹۱۶	LSE			
۷۶۶٫۶۹۴	۰٫۲۴۵	۰٫۱۱۲	۷۸٫۳۰۳	−۵٫۹۰۶	MLE			

جدول ۳. نتایج روش‌های برداشت متفاوت تولید طرح‌های سانسور فزاینده نوع دو از توزیع وایبل با $\theta = ۱۰۰$ و $\beta = ۰/۵$

$\mathbf{E(X_{m:m:n})}$	β RMSE	β Bias	θ RMSE	θ Bias	Method	Plan	m	n
۵۶/۷۴۶	۰/۲۰۸	۰/۰۲۸	۵۶/۴۱۰	−۴۳/۲۶۰	MPS	MRC	۸	۲۰
۶۰/۰۰۰	۰/۲۲۷	۰/۰۶۸	۶۲/۳۸۱	−۵/۷۸۸	LSE			
۵۸/۳۶۶	۰/۲۸۵	۰/۱۴۰	۶۰/۵۲۷	−۱/۱۶۶	MLE			
۷۱/۴۵۵	۰/۱۹۶۴	۰/۰۱۰۷	۵۶/۲۷۷	۴۴/۸۱۸	MPS	MFC		
۸۲/۸۷۰	۰/۲۶۴	۰/۰۶۶	۶۵/۰۷۱	−۴/۹۴۴	LSE			
۷۹/۲۹۷	۰/۲۹۴	۰/۱۴۲	۵۹/۶۲۹	−۱/۳۳۰	MLE			
۶۶۳/۳۰۲	۰/۱۷۲	−۰/۱۲۶	۵۳/۵۲۰	−۴۷/۵۴۱	MPS	Uniform		
۷۰۵/۰۶۰	۰/۲۴۳	−۰/۰۴۸	۶۹/۰۷۲	−۳/۹۵۴	LSE			
۶۶۲/۵۴۸	۰/۱۷۵	۰/۰۷۶	۶۲/۴۸۲	−۲/۲۵۹	MLE			
۵۷۶/۷۲۷	۰/۱۶۶	−۰/۱۲۲	۴۷/۴۸۱	−۳۹/۵۰۴	MPS	$B(\cdot, ۰/۴)$		
۵۷۸/۳۴۷	۰/۲۵۵	−۰/۰۳۵	۶۸/۳۷۰	−۵/۳۹۶	LSE			
۵۳۷/۹۱۶	۰/۱۷۹	۰/۰۷۴	۶۰/۰۶۵	−۲/۸۴۲	MLE			
۸۱۲/۶۳۹	۰/۱۷۳	−۰/۱۲۸	۵۱/۲۸۴	−۴۳/۶۹۲	MPS	$B(\cdot, ۰/۷۵)$		
۸۰۵/۴۷۴	۰/۲۲۱	−۰/۰۷۱	۷۲/۱۰۲	−۸/۰۹۲	LSE			
۷۸۱/۷۰۸	۰/۱۶۹	۰/۰۶۸	۶۱/۲۳۶	−۲/۵۷۹	MLE			
۸۴۲/۲۸۱	۰/۱۷۲	−۰/۱۳۳	۵۲/۰۹۶	−۴۶/۵۶۹	MPS	[۵]		
۸۳۶/۳۴۸	۰/۲۶۹	۰./۰۳۰	۷۷/۶۳۵	۸/۵۵۴	LSE			
۸۴۱/۲۴۸	۰/۱۶۹	۰/۰۷۲	۶۰/۷۶۷	−۲/۸۱۰	MLE			
۷۸۹/۰۷۹	۰/۱۸۳	−۰/۱۵۱	۵۷/۶۴۷	−۵۳/۱۳۳	MPS	[۶]		
۷۸۱/۱۹۸	۰/۲۳۲	−۰/۰۴۱	۶۹/۳۸۷	−۵/۹۴۵	LSE			
۸۰۷/۴۷۹	۰/۱۶۹	۰/۰۷۴	۶۲/۰۲۹	−۳/۶۵۶	MLE			
۵۷۴/۱۵۱	۰/۱۱۷	−۰/۰۵۹	۳۳/۹۸۷	−۱۹/۵۹۶	MPS	MRC	۱۶	۲۰
۵۷۰/۰۶۹	۰/۱۴۹	۰/۰۲۰	۵۶/۲۵۶	۹/۶۲۶	LSE			
۵۷۴/۱۵۱	۰/۱۲۷	۰/۰۴۷	۴۹/۶۷۹	۳/۰۹۱	MLE			
۹۰۹/۳۳۶	۰/۱۱۵	−۰/۰۴۸	۳۴/۰۹۳	−۱۹/۰۹۴	MPS	MFC		
۹۳۷/۷۱۶	۰/۲۰۵	۰/۰۷۷	۵۸/۲۰۰	۸/۶۹۳	LSE			
۹۰۹/۱۶۲	۰/۱۲۷	۰/۰۴۹	۵۲/۴۳۷	۳/۳۵۷	MLE			
۱۳۱۰/۲۹۷	۰/۱۱۳	−۰/۰۷۰	۳۵/۲۷۰	−۲۳/۴۹۷	MPS	Uniform		
۱۲۳۲/۹۰۵	۰/۱۸۵	۰/۰۸۴	۵۹/۴۷۴	۶/۳۷۵	LSE			
۱۲۶۵/۹۱۱	۰/۱۲۷	۰/۰۴۸	۵۲/۰۶۱	۴/۳۶۰	MLE			
۱۱۵۲/۰۳۸	۰/۱۱۳	−۰/۰۶۱	۳۵/۷۱۲	−۲۰/۴۵۲	MPS	$B(\cdot, ۰/۴)$		
۱۱۶۶/۳۲۶	۰/۱۹۱	۰/۰۸۴	۵۹/۴۹۲	۱۱/۳۵۳	LSE			
۱۱۵۰/۲۲۴	۰/۲۳۸	۰/۰۴۶	۵۰/۱۰۹	۳/۲۰۸	MLE			
۱۲۴۵/۶۶۷	۰/۱۱۷	−۰/۰۶۸	۳۶/۰۶۳	−۲۴/۳۸۱	MPS	$B(\cdot, ۰/۷۵)$		
۱۳۰۸/۳۹۴	۰/۲۱۰	۰/۰۹۴	۵۹/۲۶۲	۱۰/۴۲۶	LSE			
۱۲۸۶/۳۲۵	۰/۱۴۸	۰/۰۴۱	۵۷/۹۰۱	۷/۵۹۷	MLE			
۱۳۲۶/۷۱۹	۰/۱۱۴	−۰/۰۶۶	۳۷/۲۹۶	−۲۳/۲۲۴	MPS	[۷]		
۱۲۸۱/۷۵۰	۰/۱۹۲	۰/۰۹۰	۵۸/۳۶۰	۹/۴۲۳	LSE			
۱۲۹۴/۶۹۴	۰/۱۲۱	۰/۰۴۲	۵۱/۶۴۴	۳/۷۹۲	MLE			
۱۲۰۶/۷۹۲	۰/۱۱۵	−۰/۰۷۰	۳۷/۸۲۷	−۲۵/۲۷۲	MPS	[۸]		
۱۲۴۷/۵۶۹	۰/۲۱۴	۰/۰۹۲	۶۰/۵۲۰	۷/۹۳۱	LSE			
۱۲۶۶/۴۶۶	۰/۱۲۹	۰/۰۴۵	۵۰/۶۰۰	۳/۱۷۲	MLE			

در جداول ۲ − ۷ متوسط اریبی، ریشه دوم میانگین مجذور خطا ($RMSE$) برآوردگرهای ماکسیمم درستنمایی (MLE)، ماکسیمم حاصلضرب فواصل ($MPSE$)، کمترین توان های دوم (LSE) و همچنین امید ریاضی زمان کل مورد انتظار آزمایش، یعنی $E(X_{m:m:n})$ به دست آمده است.

جدول ۴. نتایج روش‌های برداشت متفاوت تولید طرح‌های سانسور فزاینده نوع دو از توزیع وایبل با $\theta = ۱۰۰$ و $\beta = ۱$

	β		θ					
$\mathbf{E(X_{m:m:n})}$	RMSE	Bias	RMSE	Bias	Method	Plan	m	n
۶۰/۹۸۵	۱/۱۱۰	۰/۲۲۳	۴۴/۷۶۱	−۲۷/۸۵۹	MPS	MRC	۴	۱۰
۶۰/۶۹۸	۵/۵۵۴	۰/۴۷۲	۴۸/۸۴۹	−۱۰/۱۹۳	LSE			
۶۲/۰۳۴	۱/۵۲۴	۰/۷۳۳	۴۷/۹۴۳	−۱۷/۵۷۸	MLE			
۶۶/۸۴۴	۱/۷۶۱	۰/۱۸۷	۴۲/۹۲۱	−۲۶/۲۹۹	MPS	MFC		
۶۶/۴۲۵	۳/۰۹۴	۰/۲۱۵	۵۶/۰۲۵	−۸/۳۰۲	LSE			
۶۴/۶۶۲	۲/۲۷۶	۰/۸۴۲۵	۴۶/۸۰۰	−۱۶/۳۵۸	MLE			
۱۰۹/۰۰۵	۰/۶۱۲	−۰/۵۹۲	۴۴/۲۳۶	−۲۹/۵۷۲	MPS	Uniform		
۱۱۱/۱۲۱	۵/۳۰۹	۰/۱۶۲	۴۸/۲۹۰	−۱۰/۷۷۷	LSE			
۱۱۵/۲۰۸	۱/۱۹۴	۰/۶۰۱	۴۷/۲۱۳	−۱۳/۲۲۰	MLE			
۱۰۷/۴۷۱۳	۰/۶۳۹	−۰/۶۱۰	۴۰/۷۰۷	−۲۶/۱۳۰	MPS	$B(\cdot, ۰/۴)$		
۱۷۱/۸۹۵	۱/۷۱۸	−۰/۲۳۴	۵۰/۶۲۲	−۴/۹۱۳	LSE			
۱۰۴/۰۷۰	۱/۳۳۶	۰/۵۹۱	۴۵/۱۷۰	−۱۵/۱۴۸	MLE			
۱۷۱/۰۴۶	۰/۴۹۵	−۰/۲۴۱	۴۲/۷۹۲	−۳۲/۳۹۴	MPS	$B(\cdot, ۰/۷۵)$		
۱۷۳/۰۰۸	۱/۰۶۰	−۰/۲۷۷	۵۳/۷۱۳	−۳/۱۶۶	LSE			
۱۶۵/۲۵۵	۱/۰۴	۰/۴۴۱	۴۵/۲۰۹	−۱۳/۰۴۸	MLE			
۱۸۹/۹۳۲	۰/۴۸۶	−۰/۳۳۹	۴۷/۰۹۴	−۴۰/۴۸۲	MPS	[۱]		
۱۹۵/۹۱۶	۱/۶۰	−۰/۲۴۹	۵۶/۳۰۷	۲/۷۵۹	LSE			
۱۹۴/۵۶۸	۰/۸۱۶	۰/۳۸۰	۴۶/۲۷۰	−۸/۴۷۶	MLE			
۱۶۸/۲۷۹	۰/۵۵۰	−۰/۲۷۹	۴۹/۱۸۲	−۴۳/۴۴۳	MPS	[۲]		
۱۷۱/۷۰۱	۱/۷۸۸	−۰/۴۲۲	۴۹/۸۰۱	−۴/۱۹۲	LSE			
۱۶۶/۹۴۴	۱/۰۶۳	۰/۴۷۴	۴۴/۹۳۲	−۱۵/۰۰۲	MLE			
۱۴۳/۲۴۰	۰/۴۱۱	−۰/۰۴۲	۳۰/۴۲۰	−۷/۵۹۱	MPS	MRC	۷	۱۰
۱۴۵/۶۶۴	۰/۳۹۴	−۰/۱۱۱	۳۹/۲۹۱	−۰/۰۹۴	LSE			
۱۶۷/۸۷۰	۰/۵۷۷	۰/۲۶۱	۳۶/۲۵۶	−۴/۰۴۸	MLE			
۱۸۹/۳۲۳	۰/۴۲۳	−۰/۰۵۵	۳۰/۲۴۵	−۱۰/۰۱۳	MPS	MFC		
۱۹۰/۱۴۵	۰/۴۰۷	−۰/۱۱۸	۳۹/۲۵۷	−۶/۱۴۱	LSE			
۱۹۳/۵۷۷	۰/۶۱۱	۰/۲۷۰	۳۵/۹۲۹	−۱/۳۵۲	MLE			
۲۳۳/۲۲۴	۰/۳۹۲	−۰/۱۱۹	۳۰/۴۲۱	−۱۵/۸۱۴	MPS	Uniform		
۲۳۴/۷۴۳	۰/۸۱۰	−۰/۰۱۷	۴۰/۲۳۷	−۱۱/۹۴۵	LSE			
۲۳۹/۱۹۸	۰/۴۹۳	۰/۲۳۸	۳۷/۹۶۶	−۰/۸۵۶	MLE			
۲۱۳/۳۱۵	۰/۳۶۹	−۰/۱۲۰	۳۱/۶۳۴	−۱۲/۸۴۴	MPS	$B(\cdot, ۰/۴)$		
۲۱۰/۹۷۰	۰/۴۳۷	−۰/۰۵۰	۳۹/۹۵۲	−۷/۵۶۵	LSE			
۲۰۵/۵۳۲	۰/۵۴۹	۰/۲۵۳	۳۴/۴۳۴	−۳/۹۸۱	MLE			
۲۴۲/۲۰۳	۰/۳۵۳	−۰/۱۴۳	۳۱/۸۶۲	−۱۵/۶۸۷	MPS	$B(\cdot, ۰/۷۵)$		
۲۵۳/۲۰۷	۰/۴۹۹	−۰/۰۵۲	۴۱/۹۴۹	−۱۱/۰۹۹	LSE			
۲۴۳/۳۹۳	۰/۵۳۹	۰/۲۵۷	۳۶/۹۲۱	−۲/۰۳۴	MLE			
۲۵۴/۷۷۲	۰/۳۵۴	−۰/۱۹۴	۳۲/۳۹۶	−۲۰/۱۲۱	MPS	[۳]		
۲۵۳/۰۵۶	۰/۶۷۰	۰/۰۱۶	۴۲/۵۶۸	−۷/۹۰۰	LSE			
۲۵۰/۱۹۴	۰/۴۸۵	۰/۲۰۹	۳۶/۲۷۱	−۳/۸۲۴	MLE			
۲۴۸/۰۵۴	۰/۳۵۸	−۰/۲۰۸	۳۳/۱۶۶	−۲۴/۰۶۹	MPS	[۴]		
۲۴۲/۲۶۱	۰/۴۲۱	−۰/۰۷۱	۴۱/۳۳۵	−۱۶/۲۶۸	LSE			
۲۴۷/۶۳۷	۰/۵۲۰	۰/۲۳۳	۳۶/۹۴۶	−۲/۹۶۸	MLE			

نتایج مربوط به کمترین قدر مطلق اریبی پارامتر مقیاس (θ)، به شرح ذیل است:

۱. اندازه نمونه مؤثر m کوچک

(آ) $m = ۴$

جدول ۵. نتایج روش‌های برداشت متفاوت تولید طرح‌های سانسور فزاینده نوع دو از توزیع وایبل با $\theta = ۱۰۰$ و $\beta = ۱$

$\mathbf{E(X_{m:m:n})}$	β RMSE	β Bias	θ RMSE	θ Bias	Method	Plan	m	n
۶۸/۸۲۹	۰/۴۱۵	۰/۳۳۵	۳۸/۵۸۳	−۲۳/۴۴۵	MPS	MRC	۸	۲۰
۷۱/۶۲۷	۰/۵۲۲	۰/۱۴۷	۳۸/۱۱۸	−۲/۰۲۱	LSE			
۶۹/۸۳۷	۰/۵۶۹	۰/۲۷۴	۳۷/۴۶۸	−۷/۷۴۵	MLE			
۷۴/۴۰۹	۰/۴۲۴	۰/۱۸۵	۳۸/۶۰۰	−۲۶/۰۱۵	MPS	MFC		
۷۳/۲۱۰	۰/۵۲۹	۰/۷۷۵	۳۷/۶۶۸	−۳/۷۸۸	LSE			
۷۴/۴۰۹	۰/۵۸۸	۰/۲۷۸	۳۸/۴۴۴	−۸/۰۴۸۲	MLE			
۲۲۵/۸۹۵	۰/۳۴۴	−۰/۲۵۶	۳۴/۲۲۴	−۲۵/۹۷۹	MPS	Uniform		
۲۲۲/۳۳۶	۰/۴۱۷	−۰/۱۱۰	۳۷/۴۳۷	−۱۵/۱۳۵	LSE			
۲۲۵/۷۴۶	۰/۳۷۶	۰/۱۶۶	۳۳/۷۷۸	−۵/۳۶۳	MLE			
۲۰۲/۴۲۷	۰/۳۰۸	−۰/۲۰۶	۳۱/۷۶۳	−۱۹/۱۳۷	MPS	$B(\cdot, ۰/۴)$		
۲۰۴/۸۱۷	۰/۴۸۵	−۰/۰۸۹	۳۸/۹۴۵	−۱۲/۹۲۰	LSE			
۲۰۲/۹۳۵	۰/۳۸۰	۰/۱۶۴	۳۳/۵۹۶	−۶/۵۶۴	MLE			
۲۵۶/۲۰۴	۰/۳۳۱	−۰/۲۴۴	۳۲/۰۴۷	−۲۲/۴۷۱	MPS	$B(\cdot, ۰/۷۵)$		
۲۵۷/۳۰۸	۰/۴۶۸	−۰/۰۳۳	۳۹/۶۷۷	−۱۲/۵۱۶	LSE			
۲۵۷/۱۹۰	۰/۳۵۳	۰/۱۴۹	۳۴/۹۵۲	−۳/۳۰۸	MLE			
۲۶۰/۷۳۹	۰/۳۴۸	−۰/۲۶۴	۳۲/۵۸۰	−۲۴/۳۷۷	MPS	[۵]		
۲۶۲/۹۷۴	۰/۵۶۱	۰/۰۳۴	۳۹/۲۲۵	−۱۰/۱۶۷	LSE			
۲۶۱/۷۷۰	۰/۳۶۰	۰/۱۳۸	۳۳/۲۴۳	−۳/۷۶۹	MLE			
۲۵۳/۵۷۷	۰/۳۶۹	−۰/۳۱۲	۳۷/۷۶۸	−۳۲/۰۱۵	MPS	[۶]		
۲۵۴/۷۳۷	۰/۳۶۹	−۰/۱۰۸	۴۰/۷۱۰	−۱۶/۵۷۲	LSE			
۲۵۲/۳۶۷	۰/۳۳۴	۰/۱۳۸	۳۵/۴۱۳	−۳/۹۸۱	MLE			
۲۱۹/۵۰۰	۰/۲۳۲	−۰/۰۹۳	۲۴/۳۵۳	۴/۷۵۸	MPS	MRC	۱۶	۲۰
۲۲۱/۰۳۵	۰/۲۷۴	۰/۰۲۳	۲۵/۵۷۶	−۳/۸۵۱	LSE			
۲۱۹/۸۵۳	۰/۲۵۵	۰/۰۹۶	۲۹/۰۸۶	۱/۲۰۷	MLE			
۲۸۵/۱۲۲	۰/۲۲۱	−۰/۰۸۴	۲۲/۲۶۱	−۳/۱۶۹	MPS	MFC		
۲۸۱/۱۶۹	۰/۳۱۹	۰/۰۹۳	۲۶/۳۵۵	−۷/۱۷۴	LSE			
۲۷۹/۷۶۲	۰/۲۵۶	۰/۰۹۷	۲۳/۸۸۸	−۱/۹۳۴	MLE			
۳۳۲/۹۲۱	۰/۲۲۱	−۰/۱۰۷	۲۲/۵۳۷	−۴/۸۰۷	MPS	Uniform		
۳۳۸/۸۱۶	۰/۳۱۰	۰/۰۸۰	۲۶/۲۵۹	−۶/۶۷۴	LSE			
۳۳۴/۸۹۸	۰/۲۳۹	۰/۰۸۷	۲۵/۶۳۲	−۰/۶۴۰	MLE			
۳۱۵/۰۳۷	۰/۲۲۵	−۰/۰۸۹	۲۲/۸۲۴	−۲/۷۴۳	MPS	$B(\cdot, ۰/۴)$		
۳۱۲/۱۹۶	۰/۲۹۷	۰/۰۹۰	۲۶/۳۱۲	−۶/۰۰۴	LSE			
۳۱۶/۹۵۳	۰/۲۴۶	۰/۰۹۱	۳۲/۲۷۷	۰/۷۹۶	MLE			
۳۳۸/۸۲۲	۰/۲۲۴	−۰/۱۰۵	۲۲/۷۸۴	−۴/۱۸۲	MPS	$B(\cdot, ۰/۷۵)$		
۳۳۴/۴۶۰	۰/۳۱۴	۰/۰۹۹	۲۷/۹۱۴	−۴/۴۹۳	LSE			
۳۳۵/۸۱۶	۰/۲۵۵	۰/۰۹۹	۲۹/۸۹۱	۰/۶۴۶	MLE			
۳۳۲/۶۸۵	۰/۲۲۸	−۰/۱۱۰	۲۶/۷۹۱	−۴/۳۹۵	MPS	[۷]		
۳۳۱/۵۸۰	۰/۲۴۵	۰/۰۹۰	۲۴/۴۰۲	−۴/۸۱۲	LSE			
۳۳۴/۵۸۳	۰/۲۵۷	۰/۰۹۸	۲۵/۶۵۰	−۰/۶۱۰	MLE			
۳۳۵/۶۳۵	۰/۲۲۱	−۰/۱۲۸	۲۳/۳۴۸	−۷/۴۷	MPS	[۸]		
۳۳۵/۲۷۴	۰/۲۹۶	۰/۰۷۹	۲۸/۲۰۶	−۶/۴۶۰	LSE			
۳۳۵/۵۸۸	۰/۲۳۷	۰/۰۸۴	۲۹/۷۷۳	۰/۲۴۰	MLE			

i. برای $\beta = ۰/۵$، توزیع دوجمله ای با $p = ۰/۴$ و روش برآوردیابی LSE

ii. برای $\beta = ۱$، الگوی برداشت [۱] و روش برآوردیابی LSE

iii. برای $\beta = ۲$، توزیع دوجمله‌ای با $p = ۰/۴$ و روش برآوردیابی LSE

جدول ۶. نتایج روش‌های برداشت متفاوت تولید طرح‌های سانسور فزاینده نوع دو از توزیع وایبل با $\theta = ۱۰۰$ و $\beta = ۲$

	β		θ					
$\mathbf{E(X_{m:m:n})}$	RMSE	Bias	RMSE	Bias	Method	Plan	m	n
۷۴/۲۸۱	۱/۶۹۰	۰/۲۷۴	۳۱/۰۲۹	-۹/۹۵۶	MPS	MRC	۴	۱۰
۷۴/۹۵۱	۲/۷۲۳	۰/۵۵۷	۳۱/۷۹۷	۸/۲۸۳	LSE			
۷۶/۹۴۲	۲/۹۰۸	۱/۴۴۴	۲۸/۳۹۸	-۱۰/۲۸۹	MLE			
۷۶/۲۱۰	۱/۶۹۷	۰/۲۴۶	۳۱/۱۴۸	-۸/۷۴۸	MPS	MFC		
۷۶/۹۴۲	۲/۹۰۸	۰/۴۴۴	۲۸/۳۹۸	-۱۰/۲۸۹	LSE			
۷۶/۳۶۷	۲/۹۸۷	۱/۴۹۹	۲۸/۶۵۶	-۱۱/۲۴۰	MLE			
۹۸/۴۸۵	۱/۱۹۸	-۰/۱۹۵	۲۸/۷۹۸	-۱۱/۱۳۷	MPS	Uniform		
۹۷/۷۲۵	۱/۷۱۱	-۰/۰۲۶	۸۸/۷۲۴	-۱۹/۴۰۵	LSE			
۹۹/۵۰۷	۲/۲۱۳	۱/۱۶۲	۲۶/۰۷۷	-۸/۶۰۷	MLE			
۹۶/۲۵۵	۱/۳۱۸	-۰/۲۰۰	۲۷/۱۳۱	-۶/۵۲۶	MPS	$B(\cdot, ۰/۴)$		
۹۶/۷۳۶	۱/۴۱۳	۰/۴۶۳	۲۷/۰۴۲	-۷/۲۴۴	LSE			
۹۷/۳۹۸	۲/۸۳۸	۱/۱۳۷	۲۶/۱۴۸	-۸/۳۸۹	MLE			
۱۲۶/۲۰۳	۱/۱۰۹	-۰/۴۶۲	۲۵/۷۷۱	-۱۱/۲۱۱	MPS	$B(\cdot, ۰/۷۵)$		
۱۲۶/۲۲۳	۳/۵۹۲	-۰/۴۲۲	۳۵/۵۹۱	-۱۴/۹۸۰	LSE			
۱۲۳/۵۰۸	۲/۱۴۶	۰/۹۲۹	۲۳/۸۵۰	-۷/۸۵۶	MLE			
۱۳۲/۵۲۷	۱/۰۱۰	-۰/۵۸۰	۲۶/۹۵۶	-۱۷/۰۱۴	MPS	[۱]		
۱۳۳/۵۰۷	۴/۵۵۹	-۰/۸۸۵	۳۲/۲۳۲	-۱۱/۴۵۴	LSE			
۱۳۱/۳۱۳	۱/۶۵۳	۰/۷۳۴	۲۴/۸۲۶	-۸/۱۱۳	MLE			
۱۲۳/۰۶۸	۱/۰۰۷	-۰/۵۸۴	۳۰/۶۳۷	-۲۱/۰۳۱	MPS	[۲]		
۱۲۴/۸۸۴	۳/۰۶۱	-۰/۸۹۶	۳۵/۴۸۲	-۲۲/۲۱۳	LSE			
۱۲۴/۶۵۶	۲/۰۴۰	۰/۹۶۷	۲۵/۸۲۳	-۸/۸۹۷	MLE			
۱۱۸/۴۴۵	۰/۸۶۳	-۰/۱۳۶	۱۸/۴۳۷	۲/۶۱۹	MPS	MRC	۷	۱۰
۱۱۲/۱۰۸	۰/۷۳۲	-۰/۵۱۷	۳۰/۰۷۱	-۸/۲۹۰	LSE			
۱۲۴/۷۴۸	۱/۱۲۷	۰/۵۵۴	۱۸/۵۸۱	-۳/۶۱۷	MLE			
۱۳۴/۷۱۶	۰/۷۸۶	-۰/۱۲۲	۱۸/۸۷۹	۱/۲۹۳	MPS	MFC		
۱۳۴/۶۴۶	۱/۰۳۹	-۰/۳۲۴	۲۵/۵۳۵	-۱۲/۲۵۴	LSE			
۱۳۵/۵۸۷	۱/۰۷۱	۰/۴۸۳	۱۷/۸۹۱	-۳/۰۲۳	MLE			
۱۴۷/۲۱۸	۰/۷۲۶	-۰/۱۸۸	۱۸/۴۰۰	-۱/۸۴۰	MPS	Uniform		
۱۵۱/۱۰۳	۱/۰۵۷	-۰/۲۴۱	۲۳/۳۹۵	-۱۳/۷۴۴	LSE			
۱۴۸/۳۶۱	۱/۰۰۱	۰/۴۹۵	۱۸/۸۵۷	-۲/۳۳۰	MLE			
۱۴۱/۰۷۲	۰/۷۴۷	-۰/۱۶۱	۱۸/۷۱۱	-۱/۵۸۸	MPS	$B(\cdot, ۰/۴)$		
۱۳۹/۳۸۵	۱/۰۳۵	-۰/۳۱۵	۲۵/۸۸۸	-۱۴/۸۲۷	LSE			
۱۴۲/۰۶۳	۱/۰۱۱	۰/۴۶۳	۱۹/۲۰۴	-۲/۷۱۸	MLE			
۱۵۳/۰۱۷۸	۰/۷۱۱	-۰/۲۵۸	۱۹/۱۲۹	-۳/۱۱۰	MPS	$B(\cdot, ۰/۷۵)$		
۱۵۳/۶۱۰	۱/۲۶۱	-۰/۱۴۷	۲۳/۵۱۶	-۱۳/۸۷۹	LSE			
۱۵۳/۸۵۱	۱/۰۲۲	۰/۴۸۵	۱۹/۰۹۰	-۲/۱۶۴	MLE			
۱۵۵/۹۰۴	۰/۶۵۵	-۰/۳۱۰	۱۸/۵۳۶	-۴/۱۳۰	MPS	[۳]		
۱۵۳/۷۵۹	۱/۶۵۰	-۰/۱۵۷	۲۳/۰۵۱	-۱۳/۴۹۱	LSE			
۱۵۴/۸۵۲	۰/۹۷۷	۰/۴۵۶	۲۰/۱۶۶	-۲/۱۸۶	MLE			
۱۵۱/۷۳۳	۰/۶۷۱	-۰/۳۳۳	۱۸/۷۳۱	-۶/۴۲۹	MPS	[۴]		
۱۵۴/۴۵۲	۱/۹۸۹	-۰/۲۹۶	۲۴/۴۶۳	-۱۶/۶۲۶	LSE			
۱۵۴/۶۱۶	۰/۹۹۳	۰/۴۶۳	۱۸/۳۳۷	-۲/۶۹۰	MLE			

(ب) $m = ۸$

i. برای $\beta = ۰/۵$، توزیع MRC و روش برآوردیابی MLE

ii. برای $\beta = ۱$، توزیع MRC و روش برآوردیابی LSE

iii. برای $\beta = ۲$، توزیع MFC و روش برآوردیابی MPS

جدول ۷. نتایج روش‌های برداشت متفاوت تولید طرح‌های سانسور فزاینده نوع دو از توزیع وایبل با $\theta = ۱۰۰$ و $\beta = ۲$

$\mathbf{E(X_{m:m:n})}$	β RMSE	β Bias	θ RMSE	θ Bias	Method	Plan	m	n
۸۱٫۹۹۲	۰٫۷۸۴	−۰٫۱۸۳	۲۳٫۶۱۵	−۱۱٫۰۹۷	MPS	MRC	۸	۲۰
۸۰٫۶۸۹	۰٫۸۲۲	۰٫۰۱۱	۲۴٫۶۷۰	−۱۲٫۳۰۸	LSE			
۸۱٫۲۰۱	۰٫۱۱۰	۰٫۴۹۵	۲۰٫۳۷۴	−۵٫۶۹۵	MLE			
۸۳٫۳۳۳	۰٫۸۶۲	۰٫۱۵۷	۲۶٫۵۷۵	−۱۲٫۹۷۴	MPS	MFC		
۸۳٫۴۷۰	۰٫۷۶۲	−۰٫۰۶۴	۲۳٫۵۴۰	−۹٫۳۲۴	LSE			
۸۳٫۴۸۵	۰٫۱۱۵	۰٫۵۳۵	۲۰٫۷۱۵	−۵٫۱۵۳	MLE			
۱۴۵٫۷۷۰	۰٫۶۷۳	−۰٫۵۰۲	۱۸٫۹۸۵	−۸٫۷۷۵	MPS	Uniform		
۱۴۳٫۸۹۰	۰٫۸۴۲	−۰٫۲۱۴	۲۳٫۰۲۸	−۱۶٫۶۵۴	LSE			
۱۴۵٫۳۶۲	۰٫۷۲۴	۰٫۳۱۳	۱۷٫۸۶۲	−۴٫۲۳۹	MLE			
۱۳۸٫۴۱۸	۰٫۶۵۱	−۰٫۴۱۹	۱۸٫۴۴۰	−۴٫۵۶۰	MPS	$B(\cdot, ۰٫۴)$		
۱۳۹٫۵۵۳	۱٫۰۶۴	−۰٫۱۶۸	۲۱٫۵۸۵	−۱۳٫۳۷۱	LSE			
۱۳۷٫۳۸۲	۰٫۷۷۱	۰٫۳۴۴	۱۷٫۵۵۶	−۴٫۵۶۶	MLE			
۱۵۶٫۳۸۹	۰٫۶۳۵	−۰٫۴۸۰	۱۷٫۳۱۷	−۶٫۶۹۲	MPS	$B(\cdot, ۰٫۷۵)$		
۱۵۶٫۸۶۴	۱٫۱۴۸۳	−۰٫۱۸۷	۲۲٫۰۴۵	−۱۳٫۶۸۷	LSE			
۱۵۴٫۰۹۳	۰٫۶۹۷	۰٫۲۸۶	۱۸٫۱۱۹	−۴٫۶۰۱	MLE			
۱۵۹٫۸۷۸	۰٫۶۷۱	−۰٫۵۰۴	۳۹٫۷۵۷	−۶٫۰۶۱	MPS	[۵]		
۱۵۹٫۰۷۴	۰٫۹۳۷	−۰٫۲۴۶	۲۰٫۸۹۴	−۱۱٫۴۶۴	LSE			
۱۵۸٫۱۵۷	۰٫۶۸۲	۰٫۲۷۷	۱۸٫۵۷۳	−۲٫۸۱۰	MLE			
۱۵۴٫۷۲۴	۰٫۷۰۶۳	−۰٫۵۸۷	۸۰٫۵۳۸	−۹٫۷۴۳	MPS	[۶]		
۱۵۴٫۴۳۸	۰٫۸۹۵	−۰٫۲۷۰	۲۳٫۷۷۷	−۱۷٫۳۰۸	LSE			
۱۵۵٫۱۷۷	۰٫۷۰۸	۰٫۲۷۹	۱۷٫۱۱۹	−۳٫۷۰۵	MLE			
۱۴۵٫۰۶۲	۰٫۴۶۴	−۰٫۱۶۹	۱۴٫۱۹۴	۴٫۰۸۳	MPS	MRC	۱۶	۲۰
۱۴۵٫۸۰۷	۰٫۵۳۴	−۰٫۰۲۱	۱۳٫۷۸۵	−۶٫۰۳۷	LSE			
۱۴۵٫۴۸۴	۰٫۵۰۹	۰٫۱۹۴	۱۲٫۳۰۰	−۰٫۷۲۰	MLE			
۱۶۵٫۴۸۲	۰٫۴۳۳	−۰٫۱۴۸	۱۸٫۴۱۷	۲٫۱۹۹	MPS	MFC		
۱۶۴٫۳۵۱	۰٫۶۲۷	۰٫۰۸۶	۱۴٫۷۸۵	−۸٫۲۱۸	LSE			
۱۶۳٫۹۳۳	۰٫۵۱۱	۰٫۱۹۵	۱۲٫۱۷۶	−۱٫۵۲۶	MLE			
۱۷۹٫۲۵۶	۰٫۴۲۲	−۰٫۲۰۲	۱۳٫۱۵۵	−۰٫۵۲۹	MPS	Uniform		
۱۷۸٫۹۸۶	۰٫۶۱۲	۰٫۰۲۴	۱۵٫۲۹۵	−۹٫۳۱۹	LSE			
۱۷۸٫۹۵۲	۰٫۴۸۶	۰٫۱۹۰	۱۲٫۵۵۳	−۰٫۵۵۴	MLE			
۱۷۵٫۳۳۰	۰٫۴۴۹	−۰٫۱۶۲	۱۳٫۶۱۲	۱٫۲۲۳	MPS	$B(\cdot, ۰٫۴)$		
۱۷۵٫۵۲۸	۰٫۵۵۱	−۰٫۰۲۲	۱۵٫۵۰۸	−۸٫۲۶۶	LSE			
۱۷۴٫۱۸۳	۰٫۴۹۳	۰٫۱۷۶	۱۲٫۷۳۸	−۰٫۸۵۱	MLE			
۱۸۰٫۶۴۷	۰٫۴۱۵	−۰٫۱۷۵	۱۲٫۴۸۶	۰٫۴۶۸	MPS	$B(\cdot, ۰٫۷۵)$		
۱۸۰٫۸۷۶	۰٫۶۲۶	۰٫۰۳۳	۱۵٫۴۲۱	−۸٫۲۸۳	LSE			
۱۸۰٫۱۶۶	۰٫۴۷۹	۰٫۱۷۸	۱۳٫۰۸۳	−۰٫۷۶۲	MLE			
۱۷۸٫۳۴۹	۰٫۴۱۸	−۰٫۱۸۸	۱۲٫۹۲۹	−۰٫۵۹۳	MPS	[۷]		
۱۸۰٫۹۸۷	۰٫۶۰۰	۰٫۰۵۱	۱۴٫۹۸۷	−۷٫۹۵۵	LSE			
۱۸۰٫۶۲۴	۰٫۴۹۵	۰٫۱۶۹	۱۲٫۹۵۱	−۰٫۹۲۱	MLE			
۱۸۰٫۲۹۶	۰٫۴۲۴	−۰٫۲۲۶	۱۲٫۹۲۷	−۱٫۲۵۵	MPS	[۸]		
۱۷۹٫۰۷۸	۰٫۶۰۸	۰٫۰۳۱	۱۵٫۴۴۸	−۹٫۰۵۹	LSE			
۱۷۹٫۴۹۳	۰٫۴۹۶	۰٫۱۹۶	۱۳٫۲۵۳	−۰٫۷۵۳	MLE			

۲. اندازه نمونه مؤثر m بزرگ

(آ) $m = ۷$

i. برای $\beta = ۰٫۵$، توزیع یکنواخت و روش برآوردیابی MLE

ii. برای $\beta = ۱$، توزیع MRC و روش برآوردیابی LSE
iii. برای $\beta = ۲$، توزیع MFC و روش برآوردیابی MPS

(ب) $m = ۱۶$

i. برای $\beta = ۰/۵$، توزیع MRC و روش برآوردیابی MLE
ii. برای $\beta = ۱, ۲$، توزیع یکنواخت و روش برآوردیابی MLE

همچنین نتایج مربوط به کمترین قدر مطلق اریبی پارامتر شکل β، به صورت زیر است:

۱. اندازه نمونه مؤثر m کوچک

(آ) $m = ۴$

i. برای $\beta = ۰/۵$، توزیع یکنواخت و و روش برآوردیابی MPS
ii. برای $\beta = ۱, ۲$، توزیع یکنواخت و و روش برآوردیابی LSE

(ب) $m = ۸$

i. برای $\beta = ۰/۵$، توزیع MFC و روش برآوردیابی MPS
ii. برای $\beta = ۱$، توزیع دوجمله‌ای با $p = ۰/۷۵$ و روش برآوردیابی LSE
iii. برای $\beta = ۲$، توزیع MRC و روش برآوردیابی LSE

۲. اندازه نمونه مؤثر m بزرگ

(آ) $m = ۷$

i. برای $\beta = ۰/۵$، توزیع دوجمله‌ای با $p = ۰/۷۵$ و روش برآوردیابی LSE
ii. برای $\beta = ۱$، توزیع یکنواخت و روش برآوردیابی LSE
iii. برای $\beta = ۲$، توزیع MFC و روش برآوردیابی MPS

(ب) $m = ۱۶$

i. برای $\beta = ۰/۵, ۱, ۲$، توزیع MRC و روش برآوردیابی LSE

به طور مشابه می توان از جداول ارائه شده نتایج ذیل را مرتبط با کوچکترین $RMSE$ پارامتر θ استخراج نمود:

۱. اندازه نمونه مؤثر m کوچک

(آ) $m = ۴$

i. برای $\beta = ۰/۵, ۱$، توزیع دوجمله ای با $p = ۰/۴$ و روش برآوردیابی MPS

ii. برای $\beta = ۲$، توزیع دوجمله‌ای با $p = ۰/۷۵$ و روش برآوردیابی MLE

(ب) $m = ۸$

i. برای $\beta = ۰/۵, ۱$، توزیع دوجمله ای با $p = ۰/۴$ و روش برآوردیابی MPS

ii. برای $\beta = ۲$، الگوی برداشت [۶] و روش برآوردیابی MLE

۲. اندازه نمونه مؤثر m بزرگ

(آ) $m = ۷$

i. برای $\beta = ۰/۵$، توزیع MRC و روش برآوردیابی MPS

ii. برای $\beta = ۱$، توزیع MFC و روش برآوردیابی MPS

iii. برای $\beta = ۲$، توزیع یکنواخت و روش برآوردیابی MPS

(ب) $m = ۱۶$

i. برای $\beta = ۰/۵$، توزیع MRC و روش برآوردیابی MPS

ii. برای $\beta = ۱$، توزیع یکنواخت و روش برآوردیابی MPS

iii. برای $\beta = ۲$، توزیع MFC و روش برآوردیابی MLE

همچنین نتایج مربوط به کوچکترین $RMSE$ پارامتر شکل β، به صورت زیر است:

۱. اندازه نمونه مؤثر m کوچک

(آ) $m = ۴$

i. برای $\beta = ۰/۵, ۱$، الگوی برداشت [۱] و روش برآوردیابی MPS

ii. برای $\beta = ۲$، الگوی برداشت [۲] و روش برآوردیابی MPS

(ب) $m = ۸$

i. برای $\beta = ۰/۵, ۱$، توزیع دو جمله‌ای با $p = ۰/۴$ و روش برآوردیابی MPS

ii. برای $\beta = ۲$، توزیع MRC و روش برآوردیابی MLE

۲. اندازه نمونه مؤثر m بزرگ

(آ) $m = ۷$

i. برای $\beta = ۰/۵$، طرح برداشت [۴] و روش برآوردیابی MPS

ii. برای $\beta = ۱$، توزیع دوجمله‌ای با $p = ۰/۷۵$ و روش برآوردیابی MPS

iii. برای $\beta = ۲$، طرح برداشت [۳] و روش برآوردیابی MPS

(ب) $m = ۱۶$

i. برای $\beta = ۰٫۵, ۱$، توزیع یکنواخت و روش برآوردیابی MPS

ii. برای $\beta = ۲$، توزیع دوجمله‌ای با $p = ۰٫۷۵$ و روش برآوردیابی MPS

به طور کلی، مقادیر قدر مطلق اریبی و $RMSE$ های متناظر برآوردگرهای مورد نظر تحت همه توزیع‌های برداشت، با افزایش n و m کاهش می‌یابد. اگر حجم نمونه مؤثر کوچک باشد، اغلب روش برآوردیابی LSE کمترین مقدار قدر مطلق اریبی برای θ را دارد؛ در حالی که برای حجم نمونه مؤثر بزرگ، اغلب روش برآوردیابی MLE مقادیر کوچکتری را دارا هستند. اغلب، کمترین مقادیر قدر مطلق اریبی برآورد گرهای β برای حجم نمونه مؤثر کوچک و $\beta < ۱$ متعلق به روش MPS، و برای $\beta \geq ۱$ روش LSE است. در بین برآوردگرهای θ، کمترین مقدار $RMSE$ اغلب برای $\beta < ۲$، متعلق به روش MPS و برای $\beta \leq ۲$ روش MLE است. همچنین بیشتر اوقات، برآوردگرهایی که از روش MPS حاصل می‌شوند، برای همه مقادیر β دارای کمترین مقدار $RMSE$ است. لازم به ذکر است که برای حجم نمونه مؤثر بزرگ، عملکرد توزیع‌های متفاوت برداشت بسیار نزدیک به یکدیگر است. این موضوع ناشی از وجود حجم زیادی ازاعداد صفر و مقدار کوچک $n - m$ است.

همان طور که ذکر شد، از لحاظ تحلیلی بررسی امید ریاضی مورد انتظار در حالت برداشت تصادفی کار دشواری است، از این رو از لحاظ عددی برای مقادیر متفاوت n, m, p و β بررسی و مقایسه انجام شده است. از طرفی چون محاسبه $E(X_{m:m:n})$ برای n بزرگ سنگین است، لذا مقدار n بزرگ ۲۰ در نظر گرفته شده است. از جداول در می‌یابیم، کوچکترین مقدار $E(X_{m:m:n})$ به شرح ذیل است:

۱. اندازه نمونه مؤثر m کوچک

(آ) $m = ۴$

i. برای $\beta = ۰٫۵, ۱$، توزیع MRC و روش برآوردیابی LSE

ii. برای $\beta = ۲$، توزیع MFC و روش برآوردیابی MPS

(ب) $m = ۸$

i. برای $\beta = ۰٫۵, ۱$، توزیع MRC و روش برآوردیابی MPS

ii. برای $\beta = ۲$، توزیع MRC و روش برآوردیابی LSE

۲. اندازه نمونه مؤثر m بزرگ

(آ) $m = ۷$

i. برای $\beta = ۰٫۵, ۱, ۲$، توزیع MRC و روش برآوردیابی MPS

(ب) $m = 16$

i. برای $\beta = 0.5$، توزیع MRC و روش برآوردیابی LSE

ii. برای $\beta = 1.2$، توزیع MRC و روش برآوردیابی MPS

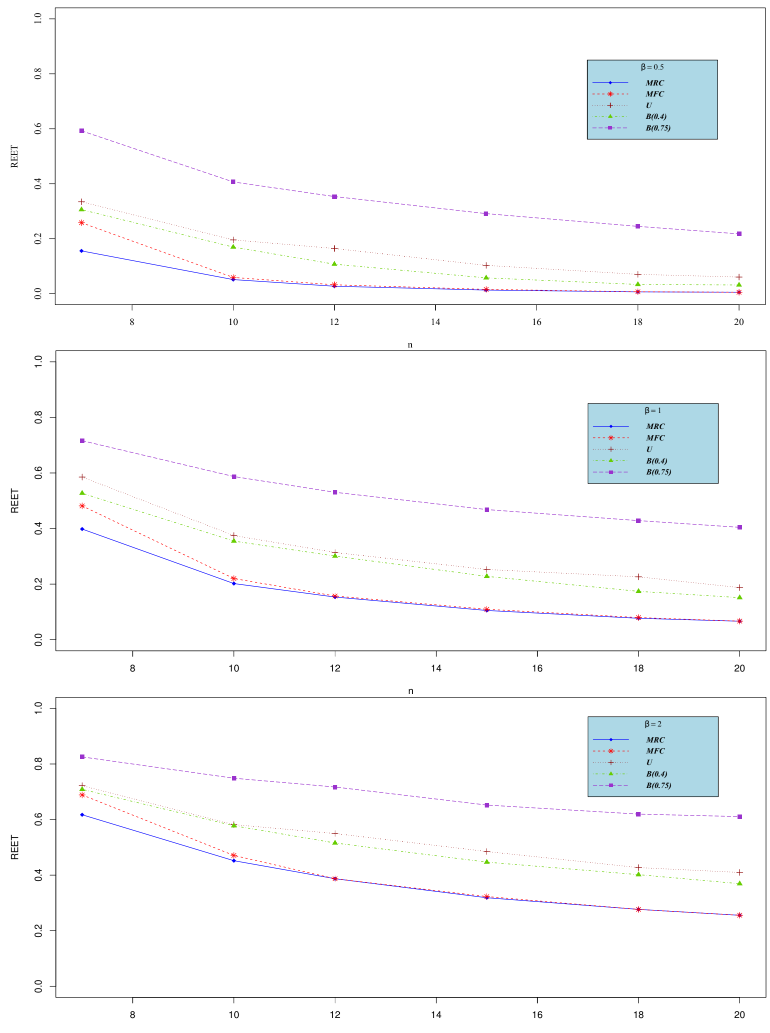
از این نتایج می‌توان دریافت که، هنگامی که $\beta \leq 1$ است ،یعنی نرخ خطر کاهشی است، برای n و m ثابت کاهش مدت زمان آزمایش تحت الگوهای برداشت پیشنهادی (MRC و MFC) نسبت به سایر روش‌های برداشت بسیار چشمگیر است. هر چند برای $\beta > 1$ (نرخ خطر صعودی) این کاهش کمی کمتر به نظر می رسد و مقادیر $E(X_{m:m:n})$ توزیع‌های یکنواخت گسسته و دوجمله‌ای اندکی نزدیک به مقادیر متناظر تحت الگوهای برداشت معرفی شده است، اما با این حال، روش‌های پیشنهادی کماکان برتری خود را حفظ می کنند. پس به طور کلی می‌توان گفت که دو روش برداشت پیشنهادی تأثیر چشمگیری در کاهش مدت زمان انتظار آزمایش دارند و بین این دو روش MRC عملکرد بهتری نسبت به MFC دارد. باید توجه داشت که به دلیل نزدیک بودن مقادیر برآورد β، تحت روش‌های برآوردیابی متفاوت برای β ثابت، n، m، و الگوی برداشت یکسان، مقادیر امید ریاضی بزرگترین آماره ترتیبی سانسور فراینده نوع دو، یعنی $E(X_{m:m:n})$، نزدیک به یکدیگر هستند.

برای درک بهتر نقش m، n، p و انواع رهیافت‌های برداشت در سانسور فزاینده نوع دو با برداشت‌های تصادفی و مقایسه زمان‌های مورد انتظار تحت این نوع سانسور و نمونه کامل از معیار $REET$ بهره می‌گیریم. شکل ۱ مقادیر $REET$ را برای مقادیر متفاوت β و $m = 4$ در برابر $n = 7, 10, 12, 15, 18, 20$ را ترسیم می‌کند. اگر با افزایش n مقدار $REET$ نزدیک به ۱ باشد، بیانگر این مطلب است که کوتاه شدن زمان آزمایش معنادار و قابل ملاحظه نیست به بیان دیگر افزایش واحدهای آزمایشی (n) تأثیر چندانی در کوتاه شدن زمان آزمایش ندارد. در توزیع‌های برداشت یکنواخت و توزیع دوجمله‌ای با شانس برداشت بالا، p بزرگ، کاهش جزئی در زمان آزمایش رخ می‌دهد، هرگاه تعداد بزرگی از واحدها را در آزمایش طول عمر قرار دهیم. همچنین برای $\beta > 1$ این وضعیت تشدید می‌شود. بنابراین به طور کلی می‌توان گفت که اثر n روی کاهش زمان آزمایش کمتر معنا دار است؛ هرگاه نرخ خطر صعودی و توزیع برداشت یکنواخت و یا احتمال برداشت در طی آزمایش (p) بزرگ باشد. از طرفی با وجود این که توزیع برداشت دوجمله‌ای با $p < 0.5$ به طور نسبی عملکرد قابل قبولی دارد اما دو رهیافت برداشت پیشنهادی MRC و MFC علاوه بر این که مقادیر $REET$ کوچکتری دارند؛ با افزایش حجم نمونه نیز به طور قابل ملاحظه‌ای کاهش می یابند، که بدین معناست که کوتاه شدن زمان آزمایش مورد انتظار بسیار معنادار است. این نتایج می تواند در جهت طراحی آزمون طول عمر بکار رود.

۸ مثال عددی

در این بخش عملکرد چهار رهیافت برداشت متفاوت، از دید زمان کل آزمایش، با استفاده از مجموعه داده‌های زیر

۱	۳	۵	۷	۱۱	۱۱	۱۱	۱۲	۱۴	۱۴	۱۴	۱۶	۱۶	۲۰	۲۱
۲۳	۴۲	۴۷	۵۲	۶۲	۷۱	۷۱	۸۷	۹۰	۹۵	۱۲۰	۱۲۰	۲۲۵	۲۴۶	۲۶۱



شکل ۱. مقادیر $REET$ در برابر حجم نمونه متفاوت

که مربوط به زمان‌های خرابی سیستم تهویه هوای مطبوع هواپیما است، مورد ارزیابی قرار می‌گیرد. این داده‌ها اولین بار توسط لینهارت و زوچینی (۱۹۸۶) معرفی شدند. برای بررسی آن که توزیع وایبل دوپارامتری برای این داده‌ها مناسب است، از آزمون نیکویی برازش اندرسون دارلینگ استفاده می‌شود. مقدار این آماره و p- مقدار به ترتیب برابر ۰٫۵۵۲ و ۰٫۱۵۹ هستند. با توجه به بالا بودن p- مقدار، فرضیه برازنده بودن توزیع وایبل به دادها نمی‌تواند رد شود. با استفاده از بسته نرم افزاری $maxLik$ در R برآورد ماکسیمم درستنمایی این مجموعه داده به صورت

جدول ۸. نمونه‌های سانسور فزاینده نوع دو از داده‌های واقعی و بردارهای برداشت متناظر

مدل MRC	۱	۳	۵	۷	۱۱	۱۱	۱۱	۱۲	۱۴	۲۱
$\mathbf{r}_{10}$	۱	۰	۰	۰	۰	۰	۲	۰	۳	۱۴
مدل MFC	۱	۳	۵	۷	۱۱	۱۱	۱۴	۱۴	۲۰	۲۳
$\mathbf{r}_{10}$	۱	۰	۲	۰	۰	۲	۱	۲	۱	۱۱
مدل یکنواخت گسسته	۱	۳	۵	۷	۱۱	۴۲	۴۷	۷۱	۹۵	۱۲۰
$\mathbf{r}_{10}$	۵	۱۱	۴	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰
مدل دوجمله‌ای با $p = ۰/۴$	۱	۵	۱۴	۱۶	۲۰	۲۳	۴۲	۶۲	۸۷	۱۲۰
$\mathbf{r}_{10}$	۶	۴	۶	۰	۰	۱	۰	۱	۱	۱
مدل دوجمله‌ای با $p = ۰/۷۵$	۱	۳	۷	۱۱	۱۶	۵۲	۶۲	۸۷	۱۲۰	۲۲۵
$\mathbf{r}_{10}$	۱۷	۲	۱	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰

$\hat{\beta} = ۰/۸۵۳۶$ و $\hat{\theta} = ۵۴/۶۱۳۶$ به دست می‌آید. حال از این داده‌ها طبق الگوریتم ۸ مرحله‌ای ذیل، نمونه سانسور فزاینده نوع دو به حجم $m = ۱۰$ ساخته و در جدول ۸ ارایه شده است.

۱- ابتدا ۱۰۰۰۰بار مجموعه بردارهای برداشت سانسور از توزیع‌های متفاوت، با $(n, m) = (۳۰, ۱۰)$ تولید می‌شوند.

۲- نمونه‌های سانسور فزاینده نوع دو از توزیع وایبل با پارامتر مقیاس ۵۴/۶۱۳۶ و پارامتر شکل ۰/۸۵۳۶ تولید می‌شوند.

۳-بردارهای سانسورشده فزاینده‌ای انتخاب می‌شوند که مؤلفه اول آن‌ها در فاصله (۰/۹۵۵, ۱/۴) قرار گیرند.

۴- بردار میانگین با میانگین‌گرفتن از مؤلفه‌های اول، مؤلفه‌های دوم و به همین ترتیب تا مؤلفه آخر به‌دست می‌آید.

۵- ماکسیمم قدر مطلق اختلاف بین بردار میانگین و هر بردار مرحله سوم محاسبه می‌شود.

۶- مینیمم مقادیر مرحله قبل محاسبه می شود.

۷- از بین بردارهای مرحله سوم آن برداری به عنوان بردار مطلوب انتخاب می‌شود که دارای کمترین (مینیمم)، مقدار ماکسیمم قدر مطلق اختلاف بین بردار میانگین با خودش است. همچنین طرح بردار برداشت متناظر این نمونه در نظر گرفته می‌شود.

۸- نمونه سانسور فزاینده انتخاب شده با نزدیک‌ترین مقدار داده‌های واقعی در جدول جایگزین می‌شود و طرح سانسور متناظر انتخاب می‌شود.

همان‌طور که در جدول ۸ ملاحظه می‌شود، بزرگترین مشاهدات در مدل‌های MRC و MFC کوچکتر از مقدار مطابق آن‌ها در توزیع‌های یکنواخت گسسته و دوجمله‌ای است. همین موضوع به سادگی نشان می‌دهد زمان کل آزمایش در مدل‌های برداشت پیشنهادی کاهش یافته است. لازم به ذکر است با هر بار تکرار الگوی بالا نمونه‌های متفاوتی انتخاب می‌شود اما رتبه‌بندی چهار روش تولید تصادفی برداشت‌ها همواره حفظ می‌شود که در آن معیار برتر مربوط به انتخابی است که بزرگترین مشاهده آن کوچکتر از بقیه مدل‌های برداشت باشد.

۹ بحث و نتیجه‌گیری

در این مقاله ما دو روش، برای طرح برداشت تصادفی سانسور فزاینده نوع دو، تحت طول عمرهای توزیع وایبل دو پارامتری پیشنهاد داده و با توزیع‌های برداشت موجود در متون علمی مرتبط مقایسه نمودیم. مقایسه زمان پایان آزمایش طول عمر بر اساس روش‌های مختلف برداشت تصادفی موضوع مهم و جالب توجهی است که اصلی‌ترین قسمت این مقاله را شامل می‌شود. بر اساس نتایج شبیه‌سازی به دست آمده، هر چند برداشت‌های مدل دوجمله‌ای بهتر از مدل برداشت یکنواخت گسسته، به معنای مقدار کمینه $E(X_{m:m:n})$ عمل می‌کند، اما امید ریاضی زمان کل آزمایش تحت آن، بسیار زیاد به مقدار احتمال برداشت p وابسته است؛ بخصوص زمانی که حجم نمونه کوچک است. بنابراین پارامتر p عامل مهمی در طول مدت زمان آزمایش است که می تواند یک مسئله چالش برانگیزی برای استفاده از توزیع دو جمله‌ای باشد. هرگاه p بزرگ است، $n-m$ واحد از n واحد آزمون، در مراحل آغازین آزمون عمر حذف می‌شوند و در نتیجه طول عمرهای مشاهده شده خیلی نزدیک به دم توزیع زمان شکست است. بنابراین امید ریاضی زمان کل آزمایش سانسور فزاینده نوع دو به حالتی که نمونه کامل است، شبیه می‌شود. از طرف دیگر احتمال برداشت p ممکن است در هر مرحله در موقعیت‌های خاصی ثابت نباشد. برای مطالعه بیش‌تر به سینگ و همکاران (۲۰۱۳) مراجعه شود. طرح‌های پیشنهادی ارائه شده در این مقاله، کمترین مقدار امید زمان کل در مطالعات شبیه سازی و کوچکترین زمان کل آزمایش در مثال عددی را، در مقایسه با روش‌های توصیف شده دیگر دارند. در نتیجه زمان آزمون و هزینه‌های مرتبط با آن کاهش می‌یابد. همچنین روش MRC کمی بهتر از روش MFC عمل می‌کند و پیشنهاد می‌شود به عنوان یک انتخاب بهینه برای طرح‌های سانسور فزاینده نوع دو تحت توزیع طول عمر وایبل دو پارامتری به کاربرده شود. زیرا الگوی منطقی و قابل قبولی ارائه می‌دهد و همچنین همیشه مقدار زمان کل مورد انتظار کمتری نسبت به طرح برداشت دوجمله‌ای، یکنواخت گسسته و حتی طرح برداشت‌های ثابت که در جدول ۱ آمده است، به‌دست می‌دهد. این نتایج اطلاعات مهمی را در جهت طراحی آزمون طول عمر در اختیار محققان قرار می دهد.

تقدیر و تشکر

نویسندگان مقاله از رهنمودها و نظرات ارزنده داوران، هیئت تحریریه و ویراستار محترم مجله علوم آماری که سبب ارتقای کیفی مقاله شد، کمال تشکر و قدردانی را دارند.

مراجع

Balakrishnan, N. and Sandhu, R. A. (1995), A Simple Simulational Algorithm for Generating Progressive Type-II Censored Samples, *The American Statistician* ,

49, 229–230.

Cheng R.C., and Amin, N.A.K. (1983), Estimating Parameters in Continuous Univariate Distributions with a Shifted Origin, *Journal of the Royal Statistical Society. Series B* , **45**, 394–403.

Cohen, A.C. (1975), Multi-Censored Sampling in the Three Parameter Weibull Distribution, *Technometrics*, **17**, 347–351.

Cramer E., and Iliopoulos G. (2010), Adaptive Progressive Type-II Censoring, *TEST*, **19**, 342–358.

Dey S., and Dey T. (2014), Statistical Inference for the Rayleigh Distribution under Progressively Type-II Censoring with Binomial Removal, *Applied Mathematical Modelling* , **38**, 974-982.

Jukić, D., Benšić, M., and Scitovski, R. (2008), On the Existence of the Nonlinear Weighted Least Squares Estimate for a Three-Parameter Weibull Distribution, *Computational Statistics & Data Analysis*, **52** , 4502–4511.

Linhart, H., and Zucchini,W. (1986), *Model Selection*,Wiley, NewYork.

Markovic, D., Jukić, D., and Benšić , M. (2009), Nonlinear Weighted Least Squares Estimation of a Three-Parameter Weibull Density with a Nonparametric Start, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **228**, 304–312.

Ng, H. K. T., Luo , L., Hu Y., and Duan F. (2012), Parameter Estimation of Three-Parameter Weibull Distribution based on Progressively Type-II Censored Samples, *Journal of Statistical Computation and Simulation*, **82**(11), 1661-1678.

Ghahramani M., Sharafi M., and Hashemi R. (2020), Analysis of the Progressively Type-II Right Censored Data with Dependent Random Removals, *Journal of Statistical Computation and Simulation*, **90**(6),1001-1021.

Sharafi M. (2019), Inference of the Two-Parameter Lindley Distribution based on Progressive Type II Censored Data with Random Removals, *Communications in Statistics- Simulation and Computation,* DOI: 10.1080/03610918.2019.1691226.

Singh S. K., Singh U., and Sharma K. M. (2013), Expected Total Test Time and Bayesian Estimation for Generalized Lindley Distribution under Progressively Type-II Censored Sample Where Removals Follow the Beta-Binomial Probability Law, *Applied Mathematics and Computation*, **222**, 402-419.

Singh S. K., Singh U., and Sharma K. M. (2016), Bayesian Estimation for Poisson-Exponential Model under Progressive Type-II Censoring Data with Binomial Removal and Its Application to Ovarian Cancer Data, *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, **45**(9), 3457-3475.

Thomas D. R., and Wilson W. M. (1972), Linear Order Statistic Estimation for the Two-Parameter Weibull and Extreme Value Distributions from Type-II Progressively Censored Samples, *Technometrics*, **14**, 679–691.

Tse S. K., Ding C., and Yang C. (2008), Optimal Accelerated Life Tests under Interval Censoring with Random Removals: The Case of Weibull Failure Distribution, *Statistics,* **42**, 435-451.

Tse S. K., Yang C., and Yuen H. K. (2000), Statistical Analysis of Weibull Distributed Lifetime Data under Type II Progressive Censoring with Binomial Removals, *Journal of Applied Statistics,* **27**, 1033-1043.

Yuen H. K., and Tse S. K. (1996), Parameters Estimation for Weibull Distributed Lifetimes under Progressive Censoring with Random Removals, *Journal of Statistical Computation and Simulation,* **55**, 57-71.